MAT1
Gr 16

TD du mercredi 18 novembre 2020

Programme du jour : feuille 10, exercices 2 et 3

On rappelle maintenant la "méthode de la variation de la constante" : une solution particulière de l'équation différentielle

$$f'(x) + a(x)f(x) = b(x)$$

est donnée par

$$f_0(x) = c(x)e^{-A(x)}$$

où A est une primitive de la fonction a et où c est une primitive de la fonction $b(x)e^{A(x)}$.

Exercice 2. Donner une solution particulière, puis toutes les solutions des équations différentielles suivantes. On pourra appliquer la méthode de la variation de la constante.

1. $f'(x) + f(x) = e^{-x}$
2. $f'(x) + f(x) = e^{x}$
3. $f'(x) - xf(x) = x$

D'où vient la formule pour f_0 ?

Pour l'éq. $f'(x)+a(x)f(x)=0$ les solutions sont les fonctions $f(x) = c\,e^{-A(x)}$ où A est une primitive de a.

Pour l'éq $f'(x)+a(x)f(x) = b(x)$, on pourrait chercher une solution $f(x) = c(x)e^{-A(x)}$

"on fait varier la constante"

$$f'(x) = c'(x)e^{-A(x)} + c(x)\left(-A'(x)e^{-A(x)}\right) = (\dots)e^{-A(x)}$$

$$\text{donc } f'(x)+a(x)f(x) = \Big[c'(x) - c(x)\overbrace{A'(x)}^{a(x)}\Big]e^{-A(x)} + a(x)c(x)e^{-A(x)} = c'(x)e^{-A(x)}$$

On aura $f'(x)+a(x)f(x) = b(x)$ ssi :

$$c'(x)e^{-A(x)} = b(x)$$

Ceci se réécrit : $c'(x) = b(x)e^{A(x)}$.

On peut prendre pour c une prim. de $b(x)e^{A(x)}$.

1. Corrigé par Mallory.

2. $f'(x) + f(x) = e^x =: b(x)$

Une sol. particulière est $f_0(x) = c(x)e^{-A(x)}$

où $c(x)$ est une prim de $b(x)e^{A(x)} = \underbrace{e^x}_{b(x)}\underbrace{e^x}_{e^{A(x)}} = e^{2x}$

$$a(x) = 1$$
$$A(x) = x$$

$$c(x) = \text{prim. de } e^{2x} = \frac{1}{2}e^{2x}$$

$$f_0(x) = \frac{1}{2}e^{2x}e^{-x} = \frac{1}{2}e^x$$

Les sol. de l'éq. de départ sont

$$f(x) = ce^{-x} + f_0(x) = ce^{-x} + \frac{1}{2}e^x \quad , c \in \mathbb{R}.$$

Rem $A(x) = \int a(x)dx$ pose problème

x apparaît avec des "statuts" différents.

Il faut préférer écrire :

$$A(x) = \int_{x_0}^{x} a(t)dt$$

3. $f'(x) - x f(x) = x$.

$$a(x) = -x$$

$$A(x) = -\frac{1}{2}x^2 \leftarrow$$ prim de $-x$!

$$b(x) = x$$

$$c(x) = \text{prim. de } b(x)e^{A(x)} = \int_{x_0}^{x} b(t)e^{A(t)}\,dt$$

$$c(x) = \text{prim de } x e^{-1/2\, x^2} = -e^{-1/2\, x^2}$$ vérifiez, tout le monde !

$$f_0(x) = c(x)e^{-A(x)}$$

$$= -e^{-1/2\, x^2} e^{\frac{1}{2}x^2} = -e^0 = -1.$$

L'ens. des sol est formé des fonctions

$$f(x) = c e^{\frac{1}{2}x^2} - 1, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Exercice 3. On étudie l'équation différentielle

$$(E) \ : \ f'(x) - f(x) = -4xe^{-x}.$$

On commence par chercher une solution particulière. On va utiliser deux manières différentes.

1. Première manière : appliquer la méthode de la variation de la constante. Au cours du raisonnement, on pourra utiliser une intégration par parties.
2. Deuxième manière : chercher une solution particulière sous la forme $f_0(x) = (\alpha x + \beta)e^{-x}$.
3. Donner toutes les solutions de (E).
4. Donner la solution qui vérifie $f(0) = 1$. Quelle sa limite lorsque x tend vers $+\infty$?
5. Donner la solution qui vérifie $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Etudier cette solution : dérivée, tableau de variations, limites en $-\infty$, tracé du graphe.

1. $c(x) = \int -4xe^{-2x}\,dx$ $\quad \begin{cases} u' = e^{-2x} & u = -\frac{1}{2}e^{-2x} \\ v = -4x & v' = -4 \end{cases}$

IPP $\Rightarrow$ $c(x) = (-4x)\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right) - \int -\frac{1}{2}e^{-2x} \times \underbrace{(-4)}_{v'}\,dx$

$$= 2xe^{-2x} - \int 2.e^{-2x}\,dx$$

$$= 2xe^{-2x} + e^{-2x} = (2x+1)e^{-2x}$$

D'où une sol. particulière

$$f_0(x) = c(x)\,e^{-A(x)} = (2x+1)\,e^{-2x}\,e^{x}$$

$$= (2x+1)\,e^{-x}$$

L'ens solution est

$$\boxed{S_E = \left\{ f(x) = c\,e^{x} + (2x+1)e^{-x}, \ c \in \mathbb{R} \right\}.}$$

2. Corrigé par Alusena
3. Fait
4. Trouver la sol. qui vérifie $f(0)=1$ et donner sa limite quand $x \longrightarrow +\infty$.

$\rightsquigarrow$ Pour quel c la fonction
$$f(x) = ce^{x} + (2x+1)e^{-x}$$ vérifie-t-elle $f(0)=1$?

On a : $f(0) = c\,e^{0} + e^{-0} = c+1$

$f(0) = 1$ ssi $c = 0$

donc $f(x) = (2x+1)e^{-x}$.

Lila dit : $\lim\limits_{x\to+\infty} \underbrace{(2x+1)}_{\to+\infty}\underbrace{e^{-x}}_{\to 0} = 0$

⚠ Forme indéterminée $\infty \times 0$.

Ici la limite est 0 car « l'exponentielle est plus forte que tous les polynômes ».

Ici $\begin{cases} \lim\limits_{+\infty} 2x+1 = +\infty \\ \lim\limits_{+\infty} e^{-2x} = 0 \end{cases} \Rightarrow$ exp gagne donc

$$\lim_{x\to+\infty} (2x+1)\,e^{-x} = 0$$

$\begin{cases} \lim\limits_{-\infty} 2x+1 = -\infty \\ \lim\limits_{-\infty} e^{-2x} = +\infty \end{cases}$ $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} (2x+1)\,e^{-2x} = -\infty$

Voici des exemples qui montrent qu'avec une forme indéterminée, tout peut se produire. Dans tous ces exemples, $\begin{cases} f(x) \text{ tend vers } +\infty \\ g(x) \text{ tend vers } 0 \end{cases}$ lorsque $x \to +\infty$.

$f(x)$	$g(x)$	$f(x)g(x)$	Limite en $+\infty$
x^2	$1/x$	x	$+\infty$
x	$1/x^2$	$1/x$	0
x	$1/x$	1	1
$x(1+\sin^2 x)$	$1/x$	$1+\sin^2 x$	PAS DE LIMITE!