MAT1
Gr 16

TD du mardi 1er décembre 2020

Nous avions :

$$y(t) = 4\left(e^{-3t} - e^{-4t}\right)$$ à terminer.

⇝ Dérivée avec signe, variations, graphique

$$y'(t) = -12e^{-3t} + 16e^{-4t}$$

$$y'(t) \geqslant 0 \text{ ssi } -12e^{-3t} + 16e^{-4t} \geqslant 0$$

$$\text{ssi } 16e^{-4t} \geqslant 12e^{-3t}$$

$$\text{ssi } 4 \geqslant 3e^{t}$$

$$\text{ssi } \boxed{\frac{4}{3} \geqslant e^{t}} \quad \text{c'est-à-dire } \boxed{t \leqslant \ln\frac{4}{3}}$$

$$\left[\frac{4}{3} = 1{,}33\ldots \quad \ln\frac{4}{3} \simeq 0{,}3\ldots\right]$$

x	$-\infty$		$\ln(4/3)$		$+\infty$
$y'(t)$		$+$	0	$-$	
$y(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	$27/64$	$\searrow$	0

Finir l'exercice

Fonction $y(t) = 4(e^{-3t} - e^{-4t})$.

$$\lim_{t \to -\infty} y(t) = \text{F.i. } \infty - \infty$$

NB si on pose $u = -t$, on se retrouve à regarder $e^{3u} - e^{4u}$ lorsque $u \to +\infty$.

Pour lever l'indétermination, on met en facteur le terme "dominant" :

$$y(t) = 4 \times e^{-4t}(\underbrace{e^{t} - 1}_{\to -1})$$

$$\left(\text{ou: } y(u) = \underbrace{4e^{4u}}_{\to +\infty} \overbrace{(\underbrace{e^{-u}}_{\to 0} - \underbrace{1}_{\to 1})}\right) \text{ quand } u \to +\infty.$$

La limite lorsque $t \to -\infty$ est $-\infty$

Limite lorsque $t \to +\infty$:

$$\lim_{t \to \infty} 4(\underbrace{e^{-3t}}_{\to 0} - \underbrace{e^{-4t}}_{\to 0}) = 0 \quad (\text{pas de F.i.})$$

$$y\left(\ln \tfrac{4}{3}\right) = 4\left(e^{-3\ln\frac{4}{3}} - e^{-4\ln\frac{4}{3}}\right)$$

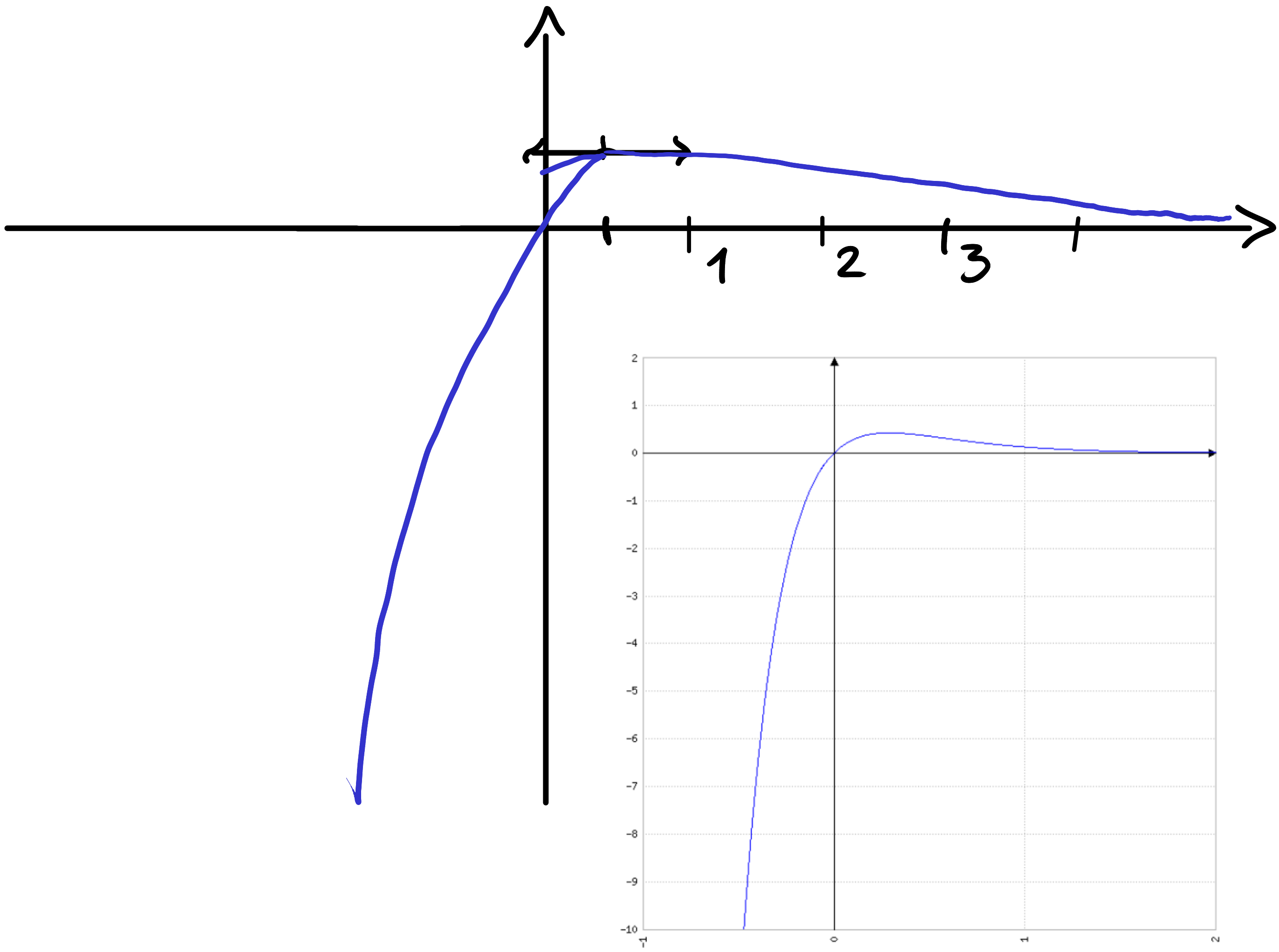
$$= 4\left(\left(e^{\ln\frac{4}{3}}\right)^{-3} - \left(e^{\ln\frac{4}{3}}\right)^{-4}\right)$$

car $e^{xy} = (e^{x})^{y}$

$$= 4\left(\left(\frac{4}{3}\right)^{-3} - \left(\frac{4}{3}\right)^{-4}\right)$$

$$= 4\left(\frac{3^3}{4^3} - \frac{3^4}{4^4}\right) = 4\,\frac{4\times 27 - 81}{4^4}$$

$$= \frac{108 - 81}{4^3} = \frac{27}{64} \simeq 0{,}4\ldots$$



Passons à la feuille 13.

Exercice 1. On considère la fonction

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}.$$

1. Trouver les constantes a, b, c telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$ différent de 1, on a

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}.$$

2. Donner une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]1, +\infty[$.
3. Calculer $\int_2^3 f(x)dx$.

Voir la feuille d'Alix.

Un commentaire : pour calculer

$$2 \times \int \frac{1}{x-1}\, dx$$

on doit travailler sur un intervalle.

(= une partie de la forme $]a, b[$)

ouverts ou fermés

réels ou $\pm\infty$

Dans l'exemple, on se met sur l'un des intervalles $]-\infty, 1[$ ou $]1, +\infty[$.

prim : $2\ln(\underbrace{1-x}_{>0})$

prim : $2\ln(\underbrace{x-1}_{>0})$

Si on met une valeur absolue, ça inclut les deux cas :

$$\boxed{2 \ln |x-1|}$$

marche toujours, càd sur $]-\infty, 1[$ et $]1, +\infty[$.

Sujet d'examen de décembre 2019

Exercice 1. Simplifier les expressions suivantes

12 min

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)^{-1} \quad , \quad e^{-\ln(x^2+1)} \quad , \quad (e^x \times e^{-2x})^{-3} \quad , \quad \frac{x^2y^5}{x^{-3}y^2}$$

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)^{-1} = \left(\frac{3+1}{6}\right)^{-1} = \left(\frac{4}{6}\right)^{-1} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} = \frac{3}{2}$$

$$e^{-\ln(x^2+1)} = \left(e^{\ln(x^2+1)}\right)^{-1} = (x^2+1)^{-1} = \frac{1}{x^2+1}$$

$$(e^x \times e^{-2x})^{-3} = \left(e^{x-2x}\right)^{-3} = (e^{-x})^{-3} = e^{3x}$$

car $\boxed{e^{ab} = (e^a)^b}$

$$\frac{x^2y^5}{x^{-3}y^2} = \frac{x^2}{x^{-3}} \times y^3 = \frac{x^2}{\frac{1}{x^3}} \times y^3 = x^5y^3$$

car $\underline{\frac{x^n}{x^m} = x^{n-m}}$ pour tous n, m entiers positifs ou négatifs !

$$\frac{x^2}{x^{-3}} = x^{2-(-3)} = x^5$$

Exercice 2. On rappelle que le volume d'une boule de rayon R est donné par $V(R) = \frac{4}{3}\pi R^3$. La mesure du rayon d'une boule donne $R = 3 \pm 0,5$ cm. Calculer les incertitudes absolues et relatives sur le calcul de son volume. On indiquera si nécessaire les unités, et on fera l'approximation $\pi \simeq 3$ pour les calculs.

12 min

Rappel : l'incertitude absolue sur V est notée ΔV (ou parfois $\Delta_a V$ si on veut insister sur « absolue »).

Elle vaut : $\Delta V = V'(R)\Delta R$
$$= 4\pi R^2 \Delta R$$

L'incertitude relative, parfois notée $\Delta_r V$ (pour insister sur « relative ») est :
$$\Delta_r V = \frac{\Delta V}{V(R)}$$
absolue

Applic. numérique : $R = \underbrace{3}_{R_0} \pm \underbrace{0,5}_{\Delta R}$ cm

$$\Delta_a V = 4\pi \overbrace{R^2}^{cm^2} \overbrace{\Delta R}^{cm} \simeq 4 \times \overbrace{3}^{\pi} \times 9 \times 0,5 = 54 \text{ cm}^3$$

R_0 serait plus clair

Exercice 3. Calculer les dérivées partielles (par rapport à x et par rapport à y) des fonctions

12 min

$$f(x,y) = e^{-2y}\sin(3x) \quad , \quad g(x,y) = \ln(x^2 + ye^x).$$

$$f(x,y) = e^{-2y}\sin(3x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3\, e^{-2y} \cos(3x)$$

on voit f comme une fonction de variable y (le reste est "constant")

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \sin(3x) \times \left(-2 \times e^{-2y}\right)$$

$(e^u)' = u'e^u$

$$g(x,y) = \ln(x^2 + ye^x)$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) =$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) =$$