Correction de l'exercice 1.15

(a) *Déterminer les racines 3-ièmes de* $1+i$.
Sous forme trigonométrique, on a $w := 1+i = \sqrt{2}\mathrm{e}^{i\pi/4}$, c'est-à-dire que son module est $r = \sqrt{2}$ et l'un de ses arguments est $\theta = \pi/4$ (je dis bien *l'un* de ses arguments car $9\pi/4$, $17\pi/4$, $-7\pi/4$ sont d'autres arguments possibles...). Posons :

$$z_0 = \sqrt[3]{r}\mathrm{e}^{i\theta/3} = \sqrt[3]{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{i\pi/12}.$$

On sait que z_0 est *une* racine 3-ième particulière de w. On peut simplifier son expression en se rappelant que $\sqrt[3]{\sqrt{2}} = \sqrt[6]{2}$ (voir détail ci-dessous), donc $z_0 = \sqrt[6]{2}\mathrm{e}^{i\pi/12}$. On obtient *toutes* les racines 3-ièmes de w en multipliant z_0 par les racines 3-ièmes de l'unité qui sont $1, \mathrm{e}^{2i\pi/3}, \mathrm{e}^{4i\pi/3}$, et on trouve ainsi :

$$\sqrt[6]{2}\mathrm{e}^{i\pi/12}, \sqrt[6]{2}\mathrm{e}^{9i\pi/12}, \sqrt[6]{2}\mathrm{e}^{17i\pi/12}.$$

Revenons sur l'égalité $\sqrt[3]{\sqrt{2}} = \sqrt[6]{2}$. Pour un nombre réel $x > 0$ et un entier $p \geqslant 1$, le nombre réel $\sqrt[p]{x}$ est par définition l'unique nombre réel > 0 dont la puissance p-ième est égale à x, on a donc $(\sqrt[p]{x})^p = x$. Maintenant prenons deux entiers $m, n \geqslant 1$ et vérifions que $\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[mn]{x}$. On a :

$$\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}}\right)^{mn} = \left(\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}}\right)^{m}\right)^{n} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x.$$

Ceci montre que $\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}}$ est un nombre réel > 0 dont la puissance mn-ième est égale à x, donc c'est la racine mn-ième de x par définition. C'est ce qu'ou voulait vérifier. Dans le cas $m = 3$ et $n = 2$, on a bien $\sqrt[3]{\sqrt{2}} = \sqrt[6]{2}$.

(b) *Déterminer les racines 4-ièmes de* $4i$ *et représentez-les dans le plan complexe.*
Posons $w = 4i = 4\mathrm{e}^{i\pi/2}$ (on se rappelle que i est de module 1 et que $\pi/2$ est l'un de ses arguments !). Le module de w est $r = 4$, et $\theta = \pi/2$ est l'un de ses arguments. Ainsi le nombre $z_0 = \sqrt[4]{4}\mathrm{e}^{i\pi/8}$ est une racine 4-ième particulière de w. On note qu'on peut simplifier $\sqrt[4]{4} = \sqrt{\sqrt{4}} = \sqrt{2}$. Pour trouver toutes les racines 4-ièmes de w, on multiplie par les racines 4-ièmes de l'unité qui sont $1, i, -1, -i$ et on trouve :

$$\sqrt{2}\mathrm{e}^{i\pi/8}, \sqrt{2}\mathrm{e}^{5i\pi/8}, \sqrt{2}\mathrm{e}^{9i\pi/8}, \sqrt{2}\mathrm{e}^{13i\pi/8}.$$

Dans le plan complexe, ces nombres sont représentés par des points situés sur le cercle de rayon $\sqrt{2}$, à l'extrémité des 4 rayons dont l'angle avec le demi-axe $[Ox)$ est $\pi/8$, $5\pi/8$, $9\pi/8$, $13\pi/8$.

(b) *Déterminer les racines 6-ièmes de* $\frac{1-i\sqrt{3}}{1+i}$.
On met d'abord le nombre donné w sous forme exponentielle. On a :

$$1 - i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\mathrm{e}^{-i\pi/3}.$$

Comme $1 + i = \sqrt{2}\mathrm{e}^{i\pi/4}$, on obtient :

$$w = \frac{1 - i\sqrt{3}}{1 + i} = \frac{2\mathrm{e}^{-i\pi/3}}{\sqrt{2}\mathrm{e}^{i\pi/4}} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{-7i\pi/12}.$$

Une racine 6-ième particulière est

$$z_0 = \sqrt[6]{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-7i\pi/72} = \sqrt[12]{2}\mathrm{e}^{-7i\pi/72}.$$

Pour trouver toutes les racines 6-ièmes de w, on multiplie z_0 par les 6 racines 6-ièmes de l'unité qui sont 1, $\mathrm{e}^{i\pi/3}$, $\mathrm{e}^{2i\pi/3}$, $\mathrm{e}^{3i\pi/3} = -1$, $\mathrm{e}^{4i\pi/3}$, $\mathrm{e}^{5i\pi/3}$. Ceci revient à multiplier 5 fois successivement z_0 par la première racine 6-ième différente de 1 dans la liste ci-dessus, c'est-à-dire $\mathrm{e}^{i\pi/3} = \mathrm{e}^{24i\pi/72}$. Finalement on trouve :

$$\sqrt[12]{2}\mathrm{e}^{-7i\pi/72},\ \sqrt[12]{2}\mathrm{e}^{17i\pi/72},\ \sqrt[12]{2}\mathrm{e}^{41i\pi/72},\ \sqrt[12]{2}\mathrm{e}^{65i\pi/72},\ \sqrt[12]{2}\mathrm{e}^{89i\pi/72},\ \sqrt[12]{2}\mathrm{e}^{113i\pi/72}.$$