# Chapitre 6 : Probabilité

## Combinatoire

**Exercice 6.1.** Dans cet exercice on va étudier les coefficients binomiaux $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$.

(a) Montrer que pour $0 \leqslant k \leqslant n$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ (symétrie)

(b) Démontrer la formule récursive $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

(c) Montrer $k \cdot \binom{n}{k} = n \cdot \binom{n-1}{k-1}$

(d) Montrer par récurrence la formule du binôme de Newton : si $a,b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, alors

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \text{ (exemple : } (a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4),$$

(e) Déduire de la formule de Newton que $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$, poser $a = b = 1$

(f) Déduire de la formule de Newton que $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = 0$. poser $a = 1$, $b = -1$.

(g) Pour les questions (a), (b) et (e), donner aussi une interprétation combinatoire (faisant intervenir le nombre de sous-ensembles).

**Exercice 6.2.** (a) Écrire tous les sous-ensembles avec 2 éléments de l'ensemble $\{A,B,C,D,E\}$. Vérifier qu'il y en a $\binom{5}{2}$.

(b) Si l'on choisit deux lettres parmi $\{A,B,C,D,E\}$ au hasard, quelle est la probabilité qu'une des deux lettres est un "$A$" ? Parmi les 10 ensembles, il y a 4 qui contiennent un $A$, donc la proba est $\frac{4}{10} = 40\%$. Autre calcul : $1-$proba de choisir successivement deux non-$A$ $= 1 - \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{2}{5}$.

**Exercice 6.3.** (a) Combien de séries de résultats possibles (tenant compte de l'ordre) y a-t-il si l'on jette un dé quatre fois ? $6^4$

(b) Et combien de séries contenant au moins un 6 ? Tous sauf ceux sans 6. Donc $6^4 - 5^4$.

(c) Si l'on jette un dé quatre fois, quelle est la probabilité d'obtenir au moins un 6 ? $\frac{671}{1296} =$ 0,5177

**Exercice 6.4.** J'ai 7 invités, que je veux arranger à une table avec 7 places.

(a) Combien de possibilités y a-t-il ? $7! = 5040$

(b) Supposons que ma table est circulaire, et que parmi les invités il y a une famille de 4 personnes qui veut être ensemble. Combien de dispositions de places possibles y a-t-il ? $7 \cdot 4! \cdot 3! = 1008$

(c) Si l'on place les invités aléatoirement, quelle est la probabilité que la famille soit assise ensemble ? $\frac{7\cdot1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot1\cdot2\cdot3}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7} = \frac{1}{5}$

**Exercice 6.5.** Il y a 9 Rennais et 7 Brestois qui veulent former un comité de 6 personnes avec 3 personnes de chaque ville.

(a) Combien de possibilités y a-t-il ? $\binom{9}{3} \cdot \binom{7}{3} = 2940$

(b) Quid s'il y a un des Rennais et un des Brestois qui se détestent et ne veulent pas siéger ensemble ? $\binom{9}{3} \cdot \binom{7}{3} - \binom{8}{2} \cdot \binom{6}{2} = 2520$

(c) Si les Rennais et Brestois choisissent aléatoirement et indépendamment leurs 3 représentants, quel est la probabilité que les deux ennemis se retrouvent dans le comité ? $\frac{\binom{8}{2} \cdot \binom{6}{2}}{\binom{9}{3} \cdot \binom{7}{3}} = \frac{1}{7}$. Help ! Qui a une bonne explication pour ce résultat simple ?

**Exercice 6.6.** On considère un jeu avec 32 cartes.

(a) Combien y a-t-il de mains de 4 cartes ? $\binom{32}{4}$ Toutes ces mains apparaissent avec la même probabilité.

(b) Combien y a-t-il de mains de 4 cartes contenant exactement deux rois ? $\binom{4}{2} \cdot \binom{28}{2}$

(c) Quelle est la probabilité qu'une donne de 4 cartes contienne exactement deux rois ? $\frac{4 \cdot 3 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29} \simeq 0{,}063 = 6{,}3\%$

**Exercice 6.7.** Combien de fois faut il lancer un dé pour avoir au moins une chance sur deux d'obtenir un 6 ? Et neuf chances sur dix ? On veut $(\frac{5}{6})^k < \frac{1}{2}$, donc $k > \log_{\frac{5}{6}}(\frac{1}{2}) = \ln(\frac{1}{2})/\ln(\frac{5}{6}) = 3{,}8$ donc 4 lancers. Pour 9 chances sur dix, $k > \ln(\frac{1}{10})/\ln(\frac{5}{6}) = 12{,}63$, donc 13 lancers.

**Exercice 6.8.** Dans une loterie, le joueur doit choisir 8 nombres entre 1 et 40. Le tirage sélectionne 8 nombres parmi les 40. En admettant que le tirage est équiprobable pour les $\binom{40}{8}$ combinaisons, quelle est la probabilité que le joueur ait

(a) les 8 bons nombres ?

(b) 7 parmi les 8 bons nombres ? $\frac{8 \cdot 32}{\binom{40}{8}} = 3{,}3 \cdot 10^{-6}$

(c) aucun bon nombre ? $\frac{\binom{32}{8}}{\binom{40}{8}} = 0{,}13677 = 13{,}677\%$

**Exercice 6.9.** Trois chasseurs tirent simultanément sur un canard. Leurs probabilités de tuer le canard sont $p_1 = 10\%$, $p_2 = 20\%$ et $p_3 = 25\%$. Quelle est la probabilité que le canard soit encore vivant après ce triple tir ? $(0{,}9) \cdot (0{,}8) \cdot (0{,}7) = 0{,}54 = 54\%$

**Exercice 6.10.** Dans un jeu de cartes standard (32 cartes, dont 8 coeurs) on tire trois fois (sans remise).

(a) Combien de séries de résultats y a-t-il ? $32 \cdot 31 \cdot 30 = 29760$

(b) Combien d'entre eux contiennent aucune carte coeur ? $24 \cdot 23 \cdot 22 = 12144$

(c) Combien d'entre eux contiennent exactement un coeur ? $\binom{3}{1} \cdot 8 \cdot 24 \cdot 23 = 13248$

(d) Quelle est la probabilité d'obtenir aucun coeur ? Exactement un coeur ? 0,4080 et 0,445

**Exercice 6.11.** (Le paradoxe des anniversaires) Pour cet exercice on suppose pour simplifier que chaque année a 365 jours, et que les anniversaires des gens sont équitablement repartis dans l'année.

(a) Si l'on choisit 23 personnes au hasard, quelle est la probabilité qu'ils ont tous des anniversaires différents ? Écrivez la formule. $\frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdot \ldots \cdot \frac{343}{365}$ (23 facteurs)

(b) Utilisez un ordinateur ou une calculatrice programmable pour calculer numériquement la probabilité dans (a). (Solution : 0,4927)

(c) Si on choisit 23 personnes au hasard, quelle est la probabilité qu'il y a au moins un couple de personnes parmi les 23 qui partagent le même anniversaire ? Êtes-vous surpris par ce résultat ? 0,5073, donc plus que 50% !

### Variables aléatoires, lois de probabilité

**Exercice 6.12.** On jette un dé deux fois.

(a) Quel est l'ensemble $\Omega$ dans ce cas, et combien d'éléments a-t-il ? $|\Omega| = 36$

(b) $\mathbb{P}(\text{deux fois le même résultat}) = ?$ $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

(c) Regardons la variable aléatoire "max" – par exemple $\max((4,2)) = 4$. Quelle est la loi de cette v.a. ? Autrement dit, pour $k \in \{1, \ldots, 6\}$, déterminer $\mathbb{P}(\max(a_1, a_2) = k)$, où $a_1$ et $a_2$ sont des nombres obtenus en jetant un dé. $\frac{2k-1}{36}$

(d) Regardons la variable aléatoire "somme des deux résultats". Quelle est la loi de cette variable aléatoire ? Pour $k = 2,3,4...$ on obtient probabilités $\frac{1}{36}, \frac{2}{36}, \frac{3}{36}, \frac{4}{36}, \frac{5}{36}, \frac{6}{36}, \frac{5}{36}, \frac{4}{36}, \frac{3}{36}, \frac{2}{36}, \frac{1}{36},$

**Exercice 6.13.** 6% de la population possède le groupe sanguin O– (les "donneurs universels"). Quelle est la probabilité que, dans un groupe de 100 personnes choisis au hasard, il y a exactement 5 de groupe sanguin O– ? Loi binomiale $\binom{100}{5} \cdot (0{,}06)^5 \cdot (0{,}94)^{95}$

**Exercice 6.14.** Prenons une pièce qui donne Pile dans 60% des cas et Face dans 40% des cas. On joue au jeu suivant : on lance la pièce de façon répétée, jusqu'à la première apparition de Pile. Quand on obtient un Pile, on arrête le jeu. Soit $X$ le nombre de jets faits dans le jeu.

(a) Quelles sont les valeurs possibles de $X$ ?

(b) Calculez la loi de $X$, c.à.d. déterminez $\mathbb{P}(X = k)$ pour toutes les valeurs $k$ possibles.

Commentaire : Cette loi est très importante, elle s'appelle la *la géométrique de paramètre p* (avec, ici, $p = 0{,}6$).