Université de Rennes 1 Année 2017-2018
ISTIC Mathématiques 1 (L1)

Chapitre 2 : Fonctions classiques réelles

Domaine de définition

Exercice 2.1. Trouver le domaine de définition des fonctions numériques d'une variable réelle données par les formules suivantes :

(a) $\tan(2x)$ $\mathbb{R} - \{\frac{\pi}{4} + n\frac{\pi}{2} \mid n \in \mathbb{Z}\}$, (b) $\ln(1-x)$ $]-\infty,1[$, (c) $\ln(1-x^2)$ $]-1,1[$ (d) $\sqrt{x^2-3x-4}$ $[-1,4]$ (e) $\dfrac{x}{1-\sqrt{1-x}}$ $]-\infty,0[\cup]0,1[$.

Composées de fonctions

Exercice 2.2. Soit f et g deux fonctions numériques d'une variable réelle données par

$$f(x) = \frac{3}{x} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \frac{2-x}{2+x}.$$

$D(f) = Im(f) = \mathbb{R} - \{0\}$, $D(g) = \mathbb{R} - \{-2\}$, $Im(g) = \mathbb{R} - \{1\}$

(a) Trouver le domaine de définition ainsi que l'image de f et de g.

(b) Déterminer les antécédents de 0 et -2 par f et de 0 et -2 par g. $f^{-1}(0) = \emptyset$, $f^{-1}(-2) = \{-\frac{3}{2}\}$, $g^{-1}(0) = \{2\}$, $g^{-1}(-2) = \{-6\}$

Soient f_1, f_2, f_3 et f_4 les fonctions numériques d'une variable réelle donées par

$$f_1(x) = f(f(x)), \quad f_2(x) = f(g(x)), \quad f_3(x) = g(f(x)) \quad \text{et} \quad f_4(x) = g(g(x)).$$

(c) Déterminer le domaine de définition de f_i, $i = 1, \ldots, 4$. $D(f_1) = \mathbb{R} - \{0\}$, $D(f_2) = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$, $D(f_3) = \mathbb{R} - \{0, -\frac{3}{2}\}$, $D(f_4) = \mathbb{R} - \{-2, -6\}$

(d) Trouver une expression simplifiée de f_i, $i = 1, \ldots, 4$. $f_1(x) = x$, $f_2(x) = \frac{3(2+x)}{2-x}$, $f_3(x) = \frac{2x-3}{2x+3}$, $f_4(x) = \frac{2+3x}{6+x}$

Symétrie

Exercice 2.3. Parmi les fonctions numériques d'une variable réelle données par les formules suivantes, lesquelles sont paires ou impaires ?

(a) $5x^4 - 3x^2$, P (b) $2x^4 - x^3 + 1$, (c) $\sin(x^3)$,I (d) $\sin^2(x^3)$,P (e) $\mathrm{e}^{|x|}$,P

(f) $\ln(|x|)$,P (g) $\tan(\sin(x))$I, (h) $\mathrm{e}^{\sin(x)}$ (i) $\sin(\ln(x))$. (j) $\cos(x) + e^{x^2} - x^4$P.

Exercice 2.4.

(a) Montrer que le graphe de la fonction donnée par la formule $f(x) = x^2 + 2x + 3$ est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = -1$. C.à.d. $f(-1+t) = f(-1-t)$.

(b) Montrer que le graphe de la fonction donnée par la formule $g(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 4$ est symétrique par rapport au point $M(1, -3)$. C.à.d. $g(1-t) + 3 = -g(1+t) + 3$

Exercice 2.5. Soient f et g deux fonctions numériques d'une variable réelle.

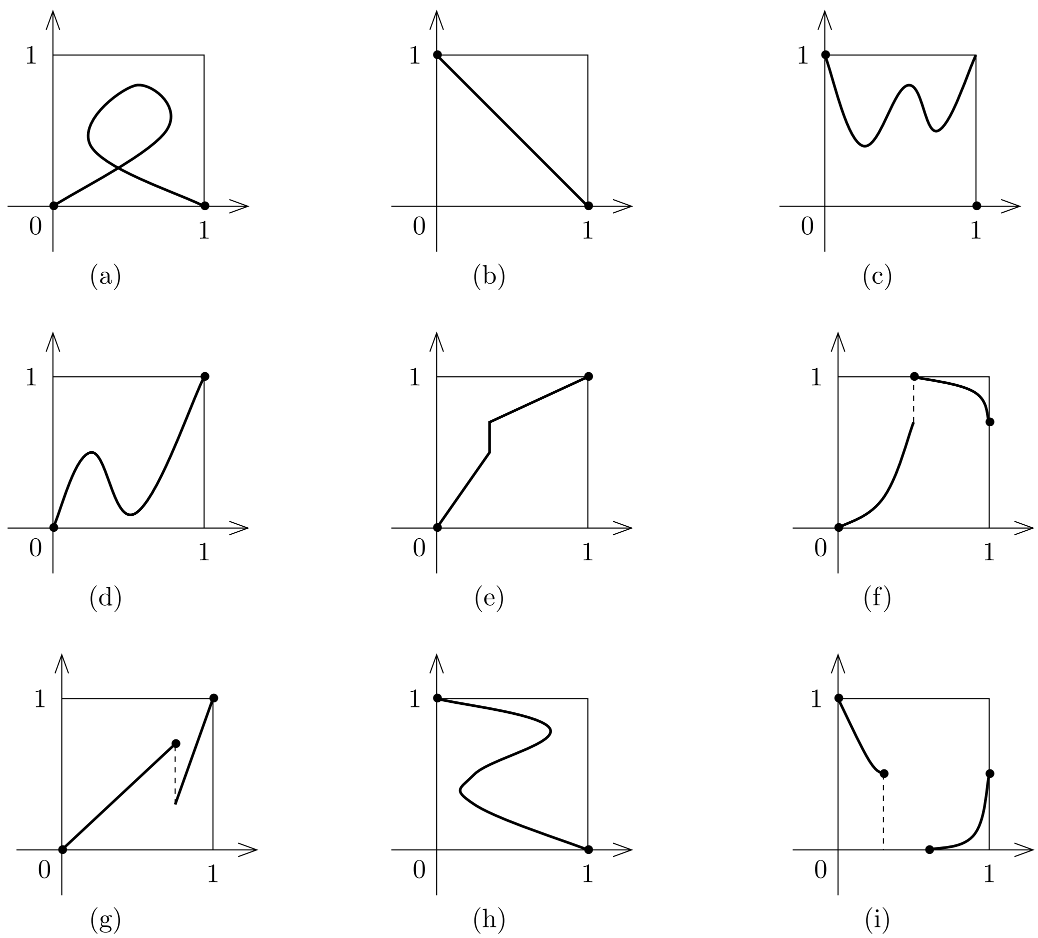
(a) Montrer : si f et g sont impaires alors la composition $f \circ g$ est impaire.

(b) Montrer : si g est paire alors $f \circ g$ est paire.

(c) Montrer : si f est paire et g est impaire alors $f \circ g$ est paire.

Applications, injections, surjections, bijections

Exercice 2.6. Dans chacun des cas suivants indiquer s'il s'agit du graphe d'une application, injection, surjection, bijection de [0,1] dans [0,1]. Si c'est une bijection, dessiner le graphe de la fonction réciproque.



Exercice 2.7. Soit f la fonction donnée par la formule

$$f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+3}}.$$

On admet que f est une bijection $f : \mathbb{R} \longrightarrow]-2{,}2[$. Trouver l'expression de la fonction réciproque. $y^2 = \frac{4x^2}{x^2+3}$ avec $f(x) > 0$ si $x > 0$, et $f(x) < 0$ si $x < 0$. On trouve $x^2 = \frac{3y^2}{4-y^2}$, et donc la fonction réciproque $g(y) = \frac{\sqrt{3}\cdot y}{\sqrt{4-y^2}}$.

Inéquations, valeur absolue

Exercice 2.8. Résoudre les équations et inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$:

(a) $|2x-5| = 4$, $\{\frac{1}{2}, \frac{9}{2}\}$ (b) $|2x+4| < 3$, $]-\frac{7}{2}, -\frac{1}{2}[$ (c) $|x^2+5x| \leqslant 4$ $[\frac{-5-\sqrt{41}}{2}, -4] \cup [-1, \frac{-5+\sqrt{41}}{2}]$.

Polynômes : division euclidienne

Exercice 2.9. Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne du polynôme A par le polynôme B, dans chacun des cas suivants :

(a) $A(x) = x^4 + 2x^2 + 1$, $B(x) = x^4 - 2x^2 - 1$ $P = 1 \cdot Q + (4x^2 + 2)$

(b) $A(x) = x^3 + 1$, $B(x) = x + 2$ $P = (x^2 - 2x + 4) \cdot Q - 7$

(c) $A(x) = x^5 - x^3 + x - 1$, $B(x) = x^2 + x - 3$ $P = (x^3 - x^2 + 3x - 6) \cdot Q + (16x - 19)$

(d) $A(x) = x^4 - 1$, $B(x) = x^2 + (1-i)x - i$ $P = (x^2 + (1-i)x - i) \cdot Q$ (pas de reste)

Polynômes : résolution d'équations

Exercice 2.10. Soit $P(x) = x^3 - 4x^2 + 3x + 2$. Trouver une racine en essayant plusieurs valeurs "évidentes". Soit r_1 la racine ainsi trouvée. Effectuer une division euclidienee de P par $(x - r_1)$. Soit Q le polynôme ainsi obtenu. Trouver les racines r_2 et r_3 de Q. En déduire la factorisation du polynôme P. Racines $r_1 = 2$, $r_{2,3} = 1 \pm \sqrt{2}$.

Exercice 2.11. Soit $P(x) = x^3 + 5x^2 + 8x + 4$.

(a) Démontrer que -2 est une racine du polynôme P.

(b) Factoriser le polynôme P en facteurs linéaires. Quelle est la multiplicité de la racine -2 ? $(x+2)^2(x-5)$

(c) Esquisser le graphe de P.

Exercice 2.12. Soit $P(z) = x^3 - (2+3i)x^2 + (-3+5i)x + 6 + 2i$.

(a) Trouver la racine réelle a de P et effectuer la division euclidienne de P par $x - a$. $P = (x-2) \cdot (x^2 - 3ix - 3 - i)$

(b) Déterminer toutes les racines de P. Racines 2 et $\frac{3}{2}i \pm (1 + \frac{i}{2}) = 1 + 2i$ et $-1 + i$

Exercice 2.13. Un exemple d'un polynôme réel qui ne peut pas être décomposé en facteurs linéaires dans $\mathbb{R}[x]$: soit $P(x) = x^3 - 3x^2 + 7x - 5$.

(a) Trouver une racine réelle a de P et effectuer la division euclidienne de P par $x - a$. Racine 1, et $P(x) = (x-1)(x^2 - 2x + 5)$

(b) Montrer que P n'a pas d'autres racines réelles. Le polynôme $x^2 - 2x + 5$ n'a pas de racines réelles.

(c) Décomposer P en facteurs linéaires dans $\mathbb{C}[x]$. Les racines de $x^2 - 2x + 5$ sont $1 \pm 2i$. Donc $P(x) = (x-1)(x-1-2i)(x-1+2i)$

Fonctions rationnelles : décomposition en éléments simples

Exercice 2.14. Décomposer sur $\mathbb{R}$ en éléments simples :

(a) $\dfrac{1}{x^2-4x+3}$ $= \frac{-1}{2(x-1)} + \frac{1}{2(x-3)}$ (b) $\dfrac{3x-11}{x^2-5x+6}$; $= \frac{5}{x-2} - \frac{2}{x-3}$ (c) $\dfrac{2x^3-9x^2+10x-5}{x^2-5x+6}$; Faire d'abord une division de polynômes ! $= 2x+1+\frac{5}{x-2} - \frac{2}{x-3}$

Fonction logarithme, exponentielle, puissance

Exercice 2.15. Simplifier les expressions suivantes autant que possible :

(a) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^x 9^{\frac{x}{2}}$, (b) $\log_9\left(\dfrac{1}{27}\right)$ (c) $\ln(1+\cos(x)) + \ln(1-\cos(x)) - 2\ln(\sin(x))$.

(a) 1 (b) $-\log_9(9\cdot 3) = -\frac{3}{2}$ (c) $\ln(\frac{1^2-\cos^2(x)}{\sin^2(x)}) = 0$

Exercice 2.16. Résoudre l'inéquation

$$\ln\left(\frac{x}{x+1}\right) > 0.$$

$\Leftrightarrow \ln(x) > \ln(x+1)$. Pas de solution, car ln est croissante (pas encore vu en cours).

Exercice 2.17. Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

(a) $\ln\left(\dfrac{e^x-1}{(x-1)(x+2)}\right)$ (b) $\left(\dfrac{x(x-2)}{(x+1)(x+3)}\right)^\alpha$, pour $\alpha \in]0,1[$.

(a) $]-2,0[\cup]1,+\infty[$ (b) $]-\infty,-3[\cup]-1,0[\cup]2,\infty[$

Fonctions trigonométriques réciproques

Exercice 2.18. Simplifier les expressions suivantes :

(a) $\cos(\arccos(x))$, $x \in [-1,1]$$= x$; (b) $\arccos(\cos(x))$, $x \in [0,\pi]$$= x$;

(c) $\arccos(\cos(x))$, $x \in [-\pi,0]$$= -x$. Dessiner le graphe de $\arccos(\cos(x))$! ; (d) $\sin(\arccos(x))$ $x \in [-1,1]$$= \sqrt{1-x^2}$ semi-cercle

COMPLÉMENTS

Domaine de définition

Exercice 2.19. Trouver le domaine de définition des fonctions numériques d'une variable réelle données par les formules suivantes :

(a) $x^5 - 3x^2 + 2x - 7$, (b) $\dfrac{1}{x^2-5x+6}$, (c) $|\ln(x)|$,

(d) $\dfrac{1}{\sin(2x)}$, (e) $\dfrac{1}{x\cdot\cos(x)}$, (f) $\dfrac{1}{\mathrm{e}^x-1}$.

Composées de fonctions

Exercice 2.20. Soit f et g deux fonctions numériques d'une variable réelle.
On suppose que $f(x) = \mathrm{e}^x$ et $(f \circ g)(x) = 3x - 4$. Déterminer $g(x)$.

Exercice 2.21. Soit f et g deux fonctions numériques d'une variable réelle.
On suppose que $(f \circ g)(x) = \dfrac{1}{x^2}$ et $g(x) = 2x + 1$. Déterminer f.

Inéquations, valeur absolue

Exercice 2.22. Résoudre les équations et inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$:

(a) $|x^2 - 2x - 5| = 1$, (b) $|x^3 - 1| = 7$, (c) $|2x^2 - 5x - 4| \leq 3$.

Exercice 2.23. Tracer le graphe des fonctions numériques d'une variable réelle données par les formules suivantes :

(a) $|x^2 - 5x + 6|$, (b) $|\sin(2x)|$.

Exercice 2.24. Tracer le graphe de la fonction numérique d'une variable réelle donnée par :

$$f(x) = \left|\frac{x-2}{x+1}\right|$$

COMPLÉMENTS

Exercice 2.25. Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne du polynôme P par le polynôme Q, dans chacun des cas suivants :

(a) $P(x) = x^6 - 1$, $Q(x) = x^2 - x - 2$,
(b) $P(x) = x^4 - x^3 + 2x^2 - 7$, $Q(x) = 2x^2 + 5$,
(c) $P(x) = x^5 - x^4 + 2x^3 + x$, $Q(x) = x^3 + 2x^2 - 3$.

Exercice 2.26. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes.

(a) $2iz + 5 = 3 + 2i$ (b) $1 - 2iz + 4z = 3i(1 + 5i)$ (c) $(z + i)(z - 5) = z^2 - i$

(d) $(z - 3i)(2z - 1) = 1 - 4z^2$ (e) $z^2 = -1$ (f) $z^2 + 9 = 0$ (g) $z^4 + 2z^2 = 0$

Exercice 2.27.
(a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 - 1 = 0$.
(b) Développer le produit $(z - 1)(z^3 + z^2 + z + 1)$.
(c) Quelles sont les solutions dans $\mathbb{C}$, de l'équation $z^3 + z^2 + z + 1 = 0$?

Exercice 2.28. Factoriser le polynôme $x^3 + x^2 - x - 1$ $= (x+1)^2(x-1)$

Exercice 2.29. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z - 2)^n + (z + 2)^n = 0$

Exercice 2.30. Résoudre dans $\mathbb{C}$

(a) $z = 2\overline{z} - 2 + 6i$ (b) $2z + i\overline{z} = 5 - 4i$

Exercice 2.31. Soit $P(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$ avec $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$.
Montrer que, si z_0 est racine de P, alors son conjugué $\overline{z}_0$ est aussi racine de P.

Exercice 2.32. On pose $P(z) = z^4 - 3z^3 + \frac{9}{2}z^2 - 3z + 1$.

(a) Montrer que si $\alpha \in \mathbb{C}$ est solution de l'équation $P(z) = 0$, il en est de même de $\overline{\alpha}$ et $\frac{1}{\alpha}$.

(b) Calculer $P(1+i)$. Déduire alors la résolution de l'équation $P(z) = 0$.

(c) Écrire $P(z)$ sous forme d'un produit de deux polynômes du second degré, à coefficients réels.

Fonction réciproque

Exercice 2.33. Soit f la fonction donnée par la formule

$$\frac{2x}{3x-1}.$$

Déterminez le domaine de définition et l'image de f et décider si f est injective ou non.
Lorsque f est bijective, trouvez l'expression de la fonction réciproque et déterminez le domaine de définition et l'image de cette dernière. Puis tracez la fonction et sa réciproque dans un même repère.

Exercice 2.34. Trouver une formule pour l'inverse de la fonction f donné par :

$$x \mapsto f(x) = 5 - 12x - 2x^2, \quad \text{si} \quad x > -3.$$

Esquisser le graphe de f et le graphe de son inverse sur un même graphique.

Fonctions trigonométriques réciproques

Exercice 2.35. Trouvez des exemples numériques pour montrer qu'en général

$$\arctan(x) \neq \frac{\arcsin(x)}{\arccos(x)}.$$