Université de Rennes 1 | Année 2017-2018
ISTIC | Mathématiques 1 (L1)

Chapitre 1 : Les nombres complexes

Forme algébrique, trigonométrique, et exponentielle

Exercice 1.1. Donner la forme algébrique des complexes suivants

(a) $z_1 = (2+i)^4 = (3+4i)^2 = -7+24i$; (b) $z_3 = \dfrac{1-3i}{1-i} - \dfrac{5-5i}{1+2i} = 2-i-(-1-3i) = 3+2i$

Exercice 1.2. (a) Donner le module et un argument de $1+i$. module $\sqrt{2}$, argument $\frac{\pi}{4}$

(b) Donner le module et un argument de $(1+i)^5$. module $4\sqrt{2}$, argument $\frac{5\pi}{4}$

(c) En déduire la forme algébrique de $(1+i)^5$. $4\sqrt{2}(-\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}) = -4-4i$

(d) Quelle est la forme algébrique de $(1-i)^5$? Comme $(\overline{z})^5 = \overline{(z^5)}$, réponse $-4+4i$

Exercice 1.3. Donner la forme exponentielle de

(a) $z = 1 - i\sqrt{3} = 2 \cdot e^{-i\frac{\pi}{3}}$; (b) $z = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$; (c) $z = -\sqrt{3}+3i = 2\sqrt{3}\cdot e^{i\frac{2\pi}{3}}$;

Exercice 1.4. Donner la forme exponentielle des nombres complexes suivantes

(a) $(4+4i)^2$; (b) $(4+4i)(1-i\sqrt{3})$; (c) $z = \dfrac{2}{1-i}$; (d) $\dfrac{4+4i}{1-i\sqrt{3}}$

(a) $= (4\sqrt{2}e^{i\pi/4})^2 = 32e^{i\pi/2} (= 32i)$ (b) $= 4\sqrt{2}e^{i\pi/4}\cdot 2e^{-i\pi/3} = 4\sqrt{2}e^{-i\pi/12}$ (c) $= 2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot e^{-(-i\pi/4)} = \sqrt{2}\cdot e^{i\pi/4}$ (d) $= 2\sqrt{2}\cdot e^{i\pi 7/12}$

Exercice 1.5. (a) Donner la forme exponentielle de $1+i$ et de $i-1$. $\sqrt{2}\cdot e^{i\pi/4}$ et $\sqrt{2}\cdot e^{i3\pi/4}$

(b) Donner la forme exponentielle de

$$z = \frac{(1+i)^{19}}{(i-1)^{11}} = \sqrt{2}^{19-11} e^{i\cdot 19\pi/4 - i\cdot 11\cdot 3\pi/4} = \sqrt{2}^{8} e^{-i\cdot 14\pi/4} = 2^4\cdot e^{-i7\pi/2} = 16\cdot e^{i\pi/2}.$$

(c) Donner la forme algébrique de z. $= 16i$

Représentation graphique

Exercice 1.6. Représenter dans le plan complexe l'ensemble des points M, d'affixe z tel que

(a) $z=-2$, (b) $z=5i$, (c) $z=2+2i$, (d) $z=2-2i$, (e) $z=-2-2i$,

et en déduire la forme exponentielle de z.

Exercice 1.7. Soit $z = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$.

(a) Déterminer la forme exponentielle de $\bar{z}$, $\frac{1}{z}$ et de $-z$. $2e^{-i\frac{\pi}{4}}, \frac{1}{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}, 2e^{i\frac{5\pi}{4}}$

(b) Représenter dans le même graphique les points d'affixe z, $\bar{z}$, $-z$, iz et $\frac{1}{z}$

Exercice 1.8. Représenter dans le plan complexe, l'ensemble des points M, d'affixe z tels que :

$$\text{(a)}\ |z| = 2 \quad \text{(b)}\ \ \mathrm{Re}(z) = -1 \quad \text{(c)}\ |z| = 2 \text{ et } \arg(z) \in [\frac{9\pi}{4}, \frac{11\pi}{4}] \quad \text{(d)}\ |z| = 2 \text{ et } \mathrm{Im}(z) = 1$$

Exercice 1.9. Quel est l'ensemble des complexes z tels que z, $\frac{1}{z}$ et $1 - z$ ont le même module ? $|z| = |\frac{1}{z}| = \frac{1}{|z|}$ implique $|z| = 1$, c.à.d. z doit être sur le cercle de rayon 1. Au même temps, $|z - 0| = |z - 1|$ implique que z se situe sur la médiatrice du segment [0,1]. Solution : $1/2 \pm \sqrt{3}/2$

Exercice 1.10. Représenter dans le plan complexe, l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie la condition donnée :

$$\text{(a)}\ |z-3| = |z-(1+2i)| \quad \text{(b)}\ |z-3| < |z-(1+2i)| \quad \text{(c)}\ |z+3-i| \leqslant 2 \quad \text{(d)}\ |z-2+i| = \sqrt{5}$$

(a) La médiatrice entre les points 3 et $1+2i$; (b) Le demi-plan ouvert dont le bord est la droite de (a), et qui contient le point 3 ; (c) Le disque fermé de rayon 2 de centre $-3+i$; (d) le cercle de rayon $\sqrt{5}$ autour de $2-i$ (ce cercle contient l'origine).

Linéarisation

Exercice 1.11. Linéariser :

(a) $\sin^3 x = (-\frac{1}{4}) \cdot (\sin(3x) - 3\sin(x))$; (b) $\cos^2(3x)\sin(5x) = \frac{1}{4}(\sin(11x) + 2\sin(5x) - \sin(x))$.

Racines carrées

Exercice 1.12. Déterminer les racines carrées de $z = 1 + i\sqrt{3}$ de deux manières différentes :

(a) sous forme algébrique ; Si $(\alpha + i\beta)^2 = 1 + i\sqrt{3}$, alors $\alpha^2 - \beta^2 = 1, 2\alpha\beta = \sqrt{3}$ et $\alpha^2 + \beta^2 = |\alpha + i\beta|^2 = |(\alpha + i\beta)^2| = |1 + i\sqrt{3}| = 2$. On déduit $\alpha + i\beta = \pm\left(\sqrt{\frac{3}{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

(b) sous forme exponentielle après avoir cherché la forme exponentielle de z. $z = 2e^{i\pi/3}$, donc les racines carrées de z sont $\pm\sqrt{2}e^{i\pi/6}$

Exercice 1.13. Déterminer les racines carrées de

(a) $-11 + 60i$ Racines $\pm(5 + 6i)$; (b) $1 + 4\sqrt{5}i$ Racines $\pm(\sqrt{5} + 2i)$;

Équations du second degré

Exercice 1.14. Résoudre dans $\mathbb{C}$:

(a) $(z - 2 - i)(z - 3 + i) = 0$; (b) $2z^2 - 6z + 5 = 0$;

(c) $z^2 - (3 + 4i)z - 1 + 5i = 0$; (d) $z^2 + (2 + i)z - 1 + 7i$ (Rappel : $\sqrt{625} = 25$) ;

(a) Solutions $z = 2 + i$ et $z = 3 - i$; (b) $z = \frac{3}{2} \pm \frac{i}{2}$; (c) $z = \frac{3}{2} + 2i \pm (\frac{1}{2} + i) = 2 + 3i$ ou $1 + i$; (d) $z = -1 - \frac{i}{2} \pm (2 - i \cdot \frac{3}{2}) = 1 - 2i$ ou $-3 + i$

Calcul de racines n-ièmes

Exercice 1.15. Déterminer des racines sous forme exponentielle.

(a) Déterminer les racines 3-ièmes de $1+i$. $\sqrt[6]{2} \cdot e^{i\pi/12}$, $\sqrt[6]{2} \cdot e^{i\cdot 3\pi/4}$, $\sqrt[6]{2} \cdot e^{i\cdot 17\pi/12}$,

(b) Déterminer les racines 4-ièmes de $4i$ et représentez-les dans le plan complexe. $\sqrt{2} \cdot e^{i\pi/8}$, $\sqrt{2} \cdot e^{i\cdot 5\pi/8}$, $\sqrt{2} \cdot e^{i\cdot 9\pi/8}$, $\sqrt{2} \cdot e^{i\cdot 13\pi/8}$

(c) Déterminer les racines 6-ièmes de $\dfrac{1-i\sqrt{3}}{1+i}$.

Une racine $\sqrt[12]{2} \cdot e^{-7i\pi/12}$, autres exposants $-3i\pi/12, i\pi/12, 5i\pi/12, 9i\pi/12, 13i\pi/12$

Applications en électronique

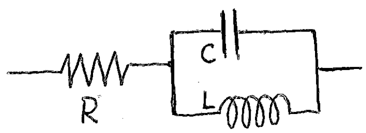

FIGURE 1

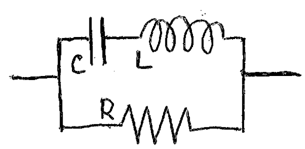

FIGURE 2

Exercice 1.16. L'*impédance électrique* mesure l'opposition d'un circuit électrique au passage d'un courant alternatif sinusoidal – c.à.d., à un courant de la forme $I(t) = \sin(2\pi\omega t)$, où ω s'appelle la *pulsation*, et $2\pi\omega$ s'appelle la *fréquence*. L'impédance est un nombre complexe. Nous considérons le circuit de la Figure 1 ci-dessus, alimenté par un courant sinusoïdal. Ici R désigne une résistance, C un condensateur et L une bobine.

— Si deux éléments d'un circuit sont d'impédance Z_A et Z_B, et je veux calculer l'impédance totale Z du circuit. Si les deux éléments sont en série, alors les impédances complexes s'additionnent
$$Z = Z_A + Z_B.$$
En revanche, s'ils sont en parallèle, alors ce sont les *admittances* qui s'additionnent : $\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_A} + \frac{1}{Z_B}$, donc
$$Z = \frac{1}{\frac{1}{Z_A} + \frac{1}{Z_B}}.$$

— L'impédance d'un condensateur est donnée par $Z_C = \frac{1}{iC\omega}$, où C est la capacité (en Farad) du condensateur.

— L'impédance d'une bobine est donnée par $Z_L = iL\omega$, où L est l'inductance (en Henry) de la bobine.

— L'impédance d'une résistance est donnée par $Z_R = R$ où R est la résistance (en Ohm).

(a) Montrer que l'impédance complexe du circuit ci-dessus est de $Z_{circuit} = R - i\frac{L\omega}{LC\omega^2 - 1}$

$$Z_{circuit} = R + \frac{1}{\frac{1}{iL\omega} + \frac{1}{\frac{1}{iC\omega}}} = \ldots$$

(b) Pour quelle pulsation ω le courant I est-il nul ? (Intuitivement, ceci arrive quand $|Z_{circuit}|$ est "infiniment grand".) $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. Donc la *fréquence* critique est $\frac{2\pi}{\sqrt{LC}}$

Exercice 1.17. Regardons le circuit de la Figure 2, alimenté par un courant sinusoidal.

(a) Montrer que l'impédance complexe de ce circuit est de $\frac{R(LC\omega^2-1)}{(LC\omega^2-1)-iRC\omega}$.

(b) Pour quelle pulsation ω l'impédance est-elle nulle ? De nouveau, $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, et la fréquence est $\frac{2\pi}{\sqrt{LC}}$.

COMPLÉMENTS

Forme algébrique et trigonométrique

Exercice 1.18. Pour tout complexe z, on pose

$$P(z) = z^3 + (-4+i)z^2 + (13-4i)z + 13i$$

Écrire la forme algébrique de $P(i)$, de $P(-i)$, de $P(2-3i)$.

Forme exponentielle d'un nombre complexe

Exercice 1.19. (a) Déterminer la forme exponentielle de $\sqrt{3}-i$ et de $-1+i$.

(b) Déteminer la forme exponentielle de

$$z = \frac{(\sqrt{3}-i)^{13}}{(-1+i)^{18}}.$$

(c) Donner la forme algébrique de z.

Exercice 1.20. Sachant que

$$e^{\frac{i\pi}{12}} = \frac{e^{\frac{i\pi}{3}}}{e^{\frac{i\pi}{4}}},$$

calculer $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$. $\cos(\frac{\pi}{12}) = \frac{1}{2}(\frac{e^{i\pi/3}}{e^{i\pi/4}} + \frac{e^{i\pi/4}}{e^{i\pi/3}}) = \frac{1}{2}(\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{1+i\sqrt{3}}) = ... = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

Exercice 1.21. Calculer les deux complexes :
(a) $z_1 = (1+i\sqrt{3})^5 + (1-i\sqrt{3})^5$
(b) $z_2 = (1+i\sqrt{3})^5 - (1-i\sqrt{3})^5$
Indication : pour (a) En posant $z = 1+i\sqrt{3}$ on pourrait montrer que $z_1 = 2\,\mathrm{Re}(z^5)$.

Représentation graphique

Exercice 1.22. Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct. Déterminer et représenter dans le plan complexe l'ensemble des points M d'affixe z tels que :

(a) $-1 \le \mathrm{Im}(z) \le 2$. (b) $\frac{1}{2} \le |z-i| \le 3$.

(c) $|z| = 3$ et $\mathrm{Re}(z) > 0$. (d) $z = (1+i)w$ où $|w| = 1$ et $\mathrm{Im}(w) > 0$.

Linéarisation

Exercice 1.23. Linériser $\cos^2(x) \cdot \sin^4(x)$.

Équations du second degré

Exercice 1.24. Résoudre dans $\mathbb{C}$: $\quad 5z^2 + (9-7i)z + 2 - 6i = 0$

Exercice 1.25. Résoudre dans $\mathbb{C}$:
(a) $z^4 + z^2 - 20 = 0$; (b) $z^4 + 10z^2 + 169 = 0$.

Calcul de racines n-ièmes

Exercice 1.26. Donner sous forme exponentielle les racines huitièmes de $e^{4i\frac{\pi}{3}}$.

Exercice 1.27. Déterminer graphiquement les racines quatrièmes de $-i$

Nombres complexes et géométrie

Exercice 1.28. Soient les points du plan complexe $M_1(z)$, $M_2(z^2)$, $M_3(z^3)$.
Déterminer les complexes z tels que :

1) M_1, M_2, M_3 sont alignés.
2) Le triangle $M_1M_2M_3$ est rectangle en M_1
3) Le triangle $M_1M_2M_3$ est équilatéral.

Exercice 1.29. Quel est l'ensemble des complexes z tels que le complexe

$$Z = 2z^2 - 3z + 1$$

est réel ? Soit $z = a + ib$. Alors z est réel ssi $a = \frac{3}{4}$ ou $b = 0$.