EXAMEN 2016-2017

Ex1

a) $Q(X) = (X+1)(X^2+4X+5) = (X+1)(X+2-i)(X+2+i)$

on observe que $Q(-1)$ — on calcule les racines de X^2+4X+5

b) $X^5+5X^4+10X^3+10X^2+9X+5 = (X^2+1)\times Q$

c) Sur $\mathbb{C}$: $P = (X+i)(X-i)(X+1)(X+2-i)(X+2+i)$

sur $\mathbb{R}$: $P = (X^2+1)(X+1)(X^2+4X+5)$

Ex2

$$\frac{e^{-1/x}+e^x-1}{x} = \frac{e^{-1/x}}{x} + \frac{e^x-1}{x}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-1/x}}{x} = \lim_{y\to+\infty} \frac{y}{e^y} = 0 \text{ par th. de comparaison}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x-1}{x} = \exp'(0) = \exp(0) = 1$$

(on reconnaît le taux d'accroissement de la fonction exp !)

$$\text{donc } \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-1/x}+e^x-1}{x} = 1$$

$$\frac{2x^3-x^{5/2}-x}{\underbrace{(x+1)(x^2+1)}_{x^3+x^2+x+1}} = \frac{x^3\left(2-\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x^2}\right)}{x^3\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 2$$

→ réponse $\ln(2)$

Ex3

a) $D(g) = \mathbb{R}^{+*}$ $\quad g'(x) = 2x - \frac{2}{x} = 2\,\frac{x^2-1}{x}$

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	‖ $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

b) $g(x) \geq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$

donc $D(f) = \mathbb{R}^{+*}$

c) $f'(x) = \dfrac{x^2-1}{x\sqrt{x^2-2\ln x}}$ — tangente horizontale en $x=1$

d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{1-2\,\frac{\ln x}{x}} = 1$

e) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)-x = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x^2}-2\ln x-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2-2\ln x}+x} = 0$ — asymptote d'éq. $y=x$ en $+\infty$

Ex4

a) $\dfrac{1}{4-x^2} = \dfrac{1/4}{2-x} + \dfrac{1/4}{2+x}$

b) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{4-\cos^2 x}\,dx = \int_1^{-1} \frac{-1}{4-u^2}\,du = \int_{-1}^{1} \frac{1}{4-u^2}\,du = \frac{1}{4}\Big[\ln|x+2| - \ln|x-2|\Big]_{-1}^{1} = \frac{1}{2}\ln 3$

$u = \cos x$; $du = -\sin x\,dx$