UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Mathématiques 1 pour ISTIC

Contrôle continu (durée deux heures)
(le 23/11/2017)

Nom : **Prénom :**

Documents, téléphones et calculatrices interdits

Exercice 1. (Pas de justifications demandées dans cet exercice.) *Question de cours.* (1 pt) Donner un exemple de fonction réelle $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui n'est ni paire ni impaire.

Par exemple $f(x) = 1 + x$. Seules notes possibles : 0 ou 1.

Parmi les fonctions données par les formules suivantes, dire lesquelles sont paires, ou impaires, ou ni l'une ni l'autre.

1.1) (1 pt) $f(x) = \sin(x) + 2x^3 =$ impaire. Toute autre réponse obtient 0.

1.2) (1 pt) $f(x) = \exp(x^2) + |x| =$ paire. Toute autre réponse obtient 0.

Exercice 2. *Question de cours.* (1 pt) Soient $x, y \in \mathbb{R}$ et $x > 0$. Donner la définition de la puissance x^y à l'aide des fonctions exp et ln.

$x^y = \exp(y \ln(x))$. Si juste : 1 point, toute autre réponse obtient 0.

2.1) (2 pt) Simplifier les expressions suivantes au maximum.

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{4y} \cdot 8^{\frac{2y}{3}} = 1.$$

Si juste : 1 point
Si $\sqrt{2}^4$ <u>ou</u> $8^{1/3}$ n'est pas simplifié : 0.5 point
Sinon : 0.

$$\frac{2\log_5(25)}{\log_2(16)} = 1.$$

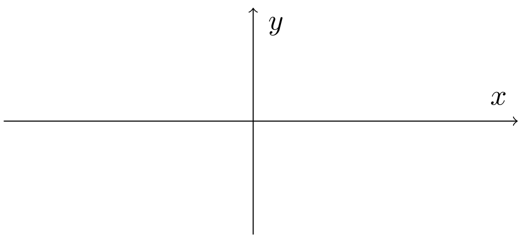
Si juste : 1 point
Si $\log_5(25)$ <u>ou</u> $\log_2(16)$ n'est pas simplifié : 0.5 point
Sinon : 0.

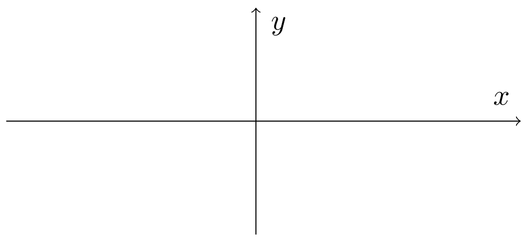
2.2) (1 pt) Trouver le domaine de définition des fonctions suivantes :

$f_1(x) = \sin(x) \cdot \ln(\frac{1}{x-2})$ $\qquad \mathcal{D}(f_1) =]2, +\infty[.$ Si juste : 0.5 point, toute autre réponse obtient 0.

$f_2(x) = \frac{x^2+1}{e^x - 1}$ $\qquad \mathcal{D}(f_2) = \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$ Si juste : 0.5 point, toute autre réponse obtient 0.

Exercice 3. (Pas de justifications demandées dans cet exercice.) *Question de cours.* (1 pt) Tracez les graphes des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos(x)$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = |\cos(x)|$ en accordant du soin aux points particuliers.





On veut que les points d'annulation de f et de f' soient bien placés. La note est : 1 point si les deux graphes sont justes, 0.5 s'il y a une erreur, 0 s'il y a ≥ 2 erreurs.

3.1) (1 pt) Donnez l'ensemble de définition A et l'image $\text{im}(h) = h(A)$ de la fonction $h : A \to \mathbb{R}$ définie par $h(x) = \ln(|\cos(x)|)$.

$A = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. Si juste : 1 point, toute autre réponse obtient 0.

$\text{im}(h) =]-\infty, 0]$. Si juste : 1 point, toute autre réponse obtient 0.

3.2) (1 pt) Donnez la plus petite période $T > 0$ de la fonction h.

$T = \pi.$ Si juste : 1 point
Si réponse $T = 2\pi$: 0.5 point
Sinon : 0.

Exercice 4. (Pas de justifications demandées dans cet exercice.)
4.1) (1 pt) Trouvez le plus grand réel $a > 0$ tel que la fonction $f_2 : [0; a] \to \mathbb{R}$ définie par $f_2(x) = \sin^2(x) - 5$ soit injective.

$a = \frac{\pi}{2}$. Si juste : 1 point, toute autre réponse obtient 0.

4.2) (1 pt) Trouvez l'unique réel t tel que la fonction $g : [0; \frac{\pi}{2}] \to [-5; t]$ définie par $g(x) = \sin^2(x) - 5$ soit bijective.

$t = -4$. Si juste : 1 point, toute autre réponse obtient 0.

4.3) (2 pts) Donnez l'ensemble de départ A, l'ensemble d'arrivée B et l'expression de la bijection réciproque $h = g^{-1}$, c'est-à-dire $h : A \to B$ avec :

$A = [-5; -4]$. Si juste : 0.5 point, toute autre réponse obtient 0.

$B = [0; \frac{\pi}{2}]$. Si juste : 0.5 point, toute autre réponse obtient 0.

$h(y) = \arcsin(\sqrt{y+5})$. Si juste : 1 point, toute autre réponse obtient 0.

Exercice 5. (4 pts) Calculez les limites suivantes, en donnant le détail de votre calcul :

$$\text{Note :} \begin{cases} \text{Si juste : 1 point} \\ \text{Si seulement une limite intermédiaire est calculée correctement : 0.5 point} \\ \text{Sinon : 0.} \end{cases}$$

5.1) $\lim\limits_{\substack{x \to e \\ x > e}} \ln(\ln(x)) = 0.$

5.2) $\lim\limits_{\substack{x \to e \\ x > e}} \ln(\ln(\ln(x))) = -\infty.$

5.3) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x - \ln(x) = +\infty.$

5.4) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x+1}{x}\right)^x = e.$

Exercice 6. *Question de cours.* (1 pt) Soit I l'intervalle $[-1; 1]$.

$$\text{Note : } \begin{cases} \text{Si 3 exemples corrects : 1 point} \\ \text{Si 1 exemple incorrect : 0.5 point} \\ \text{Si} \geq 2 \text{ exemples incorrects : 0.} \end{cases}$$

Donner un exemple d'une fonction $f_1 : I \to \mathbb{R}$ qui n'est pas continue,

$$f_1(x) = \begin{cases} 0 \text{ pour } x \leq 0, \\ 1 \text{ pour } x > 0 \end{cases} \quad \text{qui n'est pas continue en } x = 0 \text{ (par exemple)}$$

d'une fonction $f_2 : I \to \mathbb{R}$ qui est continue, mais pas dérivable,

$$f_2(x) = |x| \text{ continue, mais pas dérivable en } x = 0 \text{ (par exemple).}$$

et d'une fonction $f_3 : I \to \mathbb{R}$ qui est dérivable, mais pas constante :

$$f_3(x) = x \text{ (par exemple).}$$

6.1) (2 pts) En utilisant les règles de calcul, trouver la dérivée de chacune des fonctions suivantes : $f_1(x) = \sin(x \cdot e^x)$ et $f_2(x) = \dfrac{\ln(5-x)}{\sqrt{x}}$.

$$f_1'(x) = \cos(x \cdot e^x) \cdot (e^x + xe^x). \text{ Si juste : 1 point, toute autre réponse obtient 0.}$$

$$f_2'(x) = \tfrac{\sqrt{x}}{x^2-5x} - \tfrac{\ln(5-x)}{2\sqrt{x^3}}. \text{ Si juste : 1 point, toute autre réponse obtient 0.}$$

6.2) (1 pt) Évaluez les deux limites suivantes.

$$\lim_{t\to 0} \frac{e^t - 1}{t} = \exp'(0) = 1. \text{ Si juste : 0.5 point, toute autre réponse obtient 0.}$$

$$\lim_{x\to\infty} x^{-2} \cdot \arctan(x) = 0. \text{ Si juste : 0.5 point, toute autre réponse obtient 0.}$$