Mathématiques 1 pour ISTIC

corrigé du Controle continu (durée deux heures)
(le 26/10/2017)

Nom : **Prénom :**

Exercice 1. *Question de cours.*

$z = r\cos(\theta) + ir\sin(\theta)$.

1.1)

$z = 2\cos(\frac{\pi}{3}) + i2\sin(\frac{\pi}{3}) = 1 + i\sqrt{3}$

1.2)

$z = \frac{(3+6\,i)(3+4\,i)}{(3-4\,i)(3+4\,i)} = -\frac{3}{5} + i\frac{6}{5}$

Exercice 2. *Question de cours.*

$|z|^2 = a^2 + b^2$

2.1)

$$u = \frac{\sqrt{6} - i\,\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i) = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}$$
$$v = 1 - i = \sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}) = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

2.2)

$$w = \frac{u}{v} = e^{i\frac{\pi}{12}}$$

Exercice 3. *Question de cours.*

$w_0 = 1 \qquad w_1 = e^{i\frac{2\pi}{n}} \qquad w_2 = e^{i\frac{4\pi}{n}} \qquad \cdots \qquad w_{n-1} = e^{i\frac{(n-1)\pi}{n}}$

3.1)

On écrit la forme exponentielle de $2 - 2i$:

$$2 - 2i = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}.$$

Alors les racines cubiques sont :

$$u_k = \sqrt{2}e^{\frac{i(-\frac{\pi}{4}+2k\pi)}{3}}, \quad k = 0, 1, 2.$$

Donc

$$u_0 = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{12}}, \quad u_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}, \quad u_2 = \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}$$

3.2)

$u_0^2 = u_1 u_2$.

Exercice 4. *Question de cours.*

$X - x$ divise P, et $(X-x)^2$ ne divise pas P ; ou $P(x) = 0$, $P'(x) \neq 0$.

4.1)

Comme $P(1) = 0$, $x_1 = 1$.

4.2)

$Q(X) := P(X)/(X-1) = X^2 - X - 12$

4.3)

$\Delta = b^2 - 4ac = 49$, une racine carrée de Δ est 7. On en déduit que

$x_2 = 4$ $\qquad\qquad$ $x_3 = -3$

Exercice 5. *Question de cours.*

$P(X) = X^2 + 1$

5.1)

$Q(X) = X^2 - X + 1$ $\qquad\qquad$ $R(X) = bX + (c-1)$

5.2)

$R(X) = 0$ si et seulement si $b = 0$ et $c = 1$.

Exercice 6.

6.1) (1 pt)

$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$, $\mathcal{D}(g) = \mathbb{R} - \{1\}$

6.2) (1 pt)

Pour $x \in \mathcal{D}(f) = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$,

$$f(x) = \frac{(5x-4)(x+1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{5x-4}{x-1} = g(x).$$

6.3) (1 pt)

On note que $g(x) = 5 + 1/(x-1)$. Donc

$$Im(g) = \mathbb{R} - \{5\}, \quad Im(f) = \mathbb{R} - \{5, 9/2\}.$$