

Exercices corrigés de Géométrie Algébrique

Dans tous ces exercices, les anneaux considérés sont commutatifs et unitaires.

Exercice 1 Soient $P, Q, R \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ avec P irréductible et Q non multiple de P . On suppose que pour tout $x \in \mathbb{C}^n$ les conditions $P(x) = 0$ et $Q(x) \neq 0$ impliquent $R(x) = 0$. Montrer que P divise R .

Corrigé. Considérons les idéaux $(P), (R) \subset A = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]_Q$. On a des ensembles algébriques $V(P), V(R)$ dans $\text{Spec}(A)$ qui est l'ouvert $\{Q \neq 0\}$ dans $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^n$. De plus $V(P) \subset V(R)$ par hypothèse.

Par le Nullstellensatz, ou théorème des zéros de Hilbert, on en déduit que $\sqrt{(R)} \subset \sqrt{(P)}$ en tant qu'idéaux de A . Donc, $Q^m R^d = PP_0$ dans $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ pour certains $P_0 \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ et $m > 0$. Comme $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ est factoriel, P divise R .

Exercice 2 *Espaces topologiques irréductibles.* Montrez les faits suivants. Si X est un espace topologique non vide séparé et irréductible, alors X est un point. Dans un espace topologique irréductible, les ouverts non vides sont denses, et en particulier se coupent. Un ouvert non vide d'un espace topologique irréductible est lui aussi irréductible. Si X est un espace topologique et $Y \subset X$ est une partie irréductible alors \overline{Y} est aussi irréductible.

Corrigé. Soit X espace topologique séparé et irréductible. Si $x, y \in X$ et $x \neq y$ alors il y a deux ouverts $U \subset X$ et $V \subset X$ tel que $U \cap V = \emptyset$, contradiction. Donc, X est un point (s'il est non vide).

Soit X un espace topologique irréductible, $U \subset X$ un ouvert non vide. Soit $\overline{U} \subset X$ l'adhérence de U , alors $Y = X - U$ est fermé et $Y \cup \overline{U} = X$, donc $\overline{U} = X$. En particulier, si $U, V \subset X$ sont deux ouverts non vides, $U \cap V \neq \emptyset$.

Soit X un espace irréductible, $U \subset X$ un ouvert non vide. Supposons que U n'est pas irréductible, alors il y a deux ouverts non vides $U_1, U_2 \subset U$ tel que $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Mais les U_i sont aussi ouverts dans X , contradiction. Donc, U est irréductible.

Si X est un espace topologique et $Y \subset X$ est une partie irréductible, alors \overline{Y} est aussi irréductible. En effet, si $Y_1 \subset Y_2 = \overline{Y}$ est une décomposition de Y en une réunion de deux fermés, alors les $Y_i \cap Y$ sont fermés dans Y et leur réunion contient Y , donc pour $i = 1$ ou 2 on a $Y \subset Y_i$, mais alors $\overline{Y} \subset Y_i$.

Exercice 3 Soit A un anneau et $X = \text{Spec}(A)$. Montrez que X est irréductible ssi $A_{\text{réd}}$ est intègre.

Corrigé. Supposons X irréductible. Alors si $xy \in \sqrt{0}$, pour tout $p \subset A$ premier, on a $x \in p$ ou $y \in p$. Ainsi $X = V(x) \cup V(y)$. Comme X est irréductible, $V(x) = X$ ou $V(y) = X$. Si $V(x) = X$ par exemple, alors tout premier contient x , donc $x \in \cap p = \sqrt{0}$. Ceci montre que $\sqrt{0}$ est premier, donc $A_{\text{réd}}$ est intègre.

Réciproquement, si $X = V(I) \cup V(J)$, alors tout premier p contient IJ , donc $IJ \subset \sqrt{0}$. Comme $\sqrt{0}$ est premier par hypothèse, on en déduit que $I \subset \sqrt{0}$ ou $J \subset \sqrt{0}$, donc $V(I) = X$ ou $V(J) = X$, donc X est irréductible.

Exercice 4 Décrire les composantes irréductibles du fermé $Y \subset \mathbb{A}_k^3$ donné par $y^2 = xz, z^2 = y^3$.

Corrigé. Soit $A = k[x, y, z]/(y^2 - xz, z^2 - y^3)$ l'anneau de fonctions de Y . Les composantes irréductibles de Y correspondent aux idéaux premiers minimaux de A . Soit p un tel idéal. De $y^2 = xz$ et $z^2 = y^3$ on tire $z^2 = xyz$ donc $z(z - xy) = 0$. Ainsi $z \in p$ ou $z - xy \in p$.

Dans le premier cas, $y^3 = z^2$ est dans p donc $y \in p$. Comme $p_1 = (z, y)$ est un idéal premier, c'est un idéal premier minimal. Il correspond à la composante irréductible $Y_1 = \text{Spec}(A/p_1) = \text{Spec}(k[x])$ qui n'est autre que l'axe des x dans \mathbb{A}_k^3 .

Dans le deuxième cas on a $z = xy$ dans A/p , donc $y^2 = x^2y$ puis $y(y - x^2) = 0$ dans A/p . Il s'ensuit que $y \in p$ ou $y - x^2 \in p$. Le premier sous-cas mène à $p = p_1$, et le deuxième sous-cas mène à $p = p_2 = (y - x^2, z - x^3)$. Cet idéal premier minimal correspond à la composante irréductible $Y_2 = \text{Spec}(A/p_2) = \text{Spec}(k[x])$ qui est aussi une droite affine, cette fois-ci image de $x \mapsto (x, x^2, x^3)$ dans \mathbb{A}_k^3 . C'est la *cubique gauche* (affine).

Exercice 5 *Critère valuatif de propreté pour \mathbb{P}^n .* Soit $U \subset \mathbb{P}_k^1$ un ouvert non vide et $f : U \rightarrow \mathbb{P}_k^n$ un morphisme de variétés algébriques. Montrer qu'il se prolonge en un morphisme $\mathbb{P}_k^1 \rightarrow \mathbb{P}_k^n$.

Corrigé. Soit $x \in \mathbb{P}_k^1 \setminus U$ et soit t un paramètre au voisinage de x . Le morphisme f est donné par $(f_1 : \dots : f_n)$, où $f_i \in k(t)$ est régulière sur $U \setminus \{x\}$. On peut écrire $f_i = u_i t^{a_i}$ avec $u_i \in k(t)$ inversible dans $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^1, x}$, c'est-à-dire non nulle en $t = 0$ (car $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^1, x} \simeq k[t]_{(t)}$ est un anneau de valuation discrète d'uniformisante t , cf plus loin). Soit $a = \min_i a_i$, alors

$$f = (\epsilon_0 z^{a_0 - a} : \dots : \epsilon_n z^{a_n - a})$$

se prolonge, comme cette formule montre, en une application régulière dans un voisinage de x .

N.B. ce prolongement est unique car \mathbb{P}_k^n est *séparé*.

Exercice 6 On considère la courbe $X \subset \mathbb{A}_k^2$ donnée par $y^2 = x^2 + x^3$.

(1) Montrer que la fonction y/x n'est pas régulière sur X . Quel est le plus grand ouvert de X sur lequel elle est régulière ?

(2) Montrer que X est rationnelle.

Corrigé. (1) Une remarque préliminaire : quand on manipule des anneaux quotients de la forme A/I , il est très pratique de noter par une même lettre un élément de A et son image dans A/I . Cet abus ne mène pas à des confusions tant qu'on utilise des tournures du style « $f = g$ modulo I » ou « $f = g$ dans A/I ».

Soit $A = k[x, y]/(y^2 - x^2 - x^3)$ l'anneau de fonctions de X . La fonction $f = y/x$ est régulière sur $X - \{0\}$, c'est-à-dire que c'est un élément de $A[1/x]$. Montrons qu'elle n'est pas régulière sur X , ce qui veut dire que ce n'est pas l'image d'un élément de A par le morphisme $A \rightarrow A[1/x]$. Or il est facile de voir que $g := y^2 - x^2 - x^3$ est irréductible dans $k[x, y]$, et comme $k[x, y]$ est factoriel un irréductible engendre un idéal premier, donc A est intègre. Ainsi $A \rightarrow A[1/x]$ est injectif, et on souhaite juste voir que $f \notin A$. Or si $f \in A$, l'égalité $y = fx$ dans A se relève dans $k[x, y]$ en $y = fx + gh$ pour un certain $h \in k[x, y]$. En faisant $x = 0$ on trouve $y = y^2 h(0, y)$ dans $k[y]$, ce qui est impossible.

(2) Rappelons qu'une variété X est *rationnelle* si elle est birationnelle à un espace projectif, c'est-à-dire s'il existe deux ouverts isomorphes $U \subset X$ et $V \subset \mathbb{P}_k^n$. Ici, il s'agit de trouver un isomorphisme entre un ouvert de X et un ouvert de \mathbb{A}_k^1 . Intuitivement, on voit que si on pose $t = y/x$ alors l'équation de X donne $x = t^2 - 1$ et donc $y = tx = t(t^2 - 1)$. Pour formaliser ceci on considère le morphisme $\mathbb{A}_k^1 \rightarrow X$ donné par $t \mapsto (t^2 - 1, t(t^2 - 1))$. Il est clair que c'est un isomorphisme de $\mathbb{A}_k^1 \setminus \{\pm 1\}$ sur son image.

Exercice 7 *La cubique gauche.* On note Y la *cubique gauche*, image du morphisme de Veronese $\nu_3 : \mathbb{P}_k^1 \rightarrow \mathbb{P}_k^3$ donné par $\nu_3(x : y) = (x^3 : x^2y : xy^2 : y^3)$. Montrer que ν_3 induit un isomorphisme de \mathbb{P}_k^1 sur Y et écrire l'isomorphisme inverse. Montrer que Y est une *variété déterminantielle*, c'est-à-dire une variété définie par l'annulation des mineurs d'une certaine matrice.

Corrigé. Soit $Z \subset \mathbb{P}_k^3$ la sous-variété définie en coordonnées homogènes $(a : b : c : d)$ par les équations $ac = b^2$, $ad = bc$, $bd = c^2$. C'est une variété déterminantielle car les équations sont les mineurs $(2, 2)$ de la matrice

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & d \end{pmatrix}.$$

Il est clair que $Y \subset Z$ et si on construit un morphisme $f : Z \rightarrow \mathbb{P}_k^1$ qui est inverse pour ν_3 on aura tout démontré. Si $z = (a : b : c : d) \in Z$ alors a ou d est non nul, dans le premier cas on pose $f(z) = (a : b)$ et dans le second on pose $f(z) = (c : d)$. Il est facile de vérifier que ces deux expressions coïncident sur l'ouvert $\{a \neq 0, d \neq 0\}$, donc on a bien défini un morphisme f sur Z , et que c'est un inverse pour ν_3 .

Une autre façon de montrer que Z est bien l'image de ν_3 est de considérer le morphisme d'anneaux gradués induit par ν_3 , à savoir $\nu_3^\# : k[a, b, c, d] \rightarrow k[x, y]$ défini par $a \mapsto x^3$, $b \mapsto x^2y$, $c \mapsto xy^2$, $d \mapsto y^3$, et

de montrer que l'idéal J engendré par les polynômes $ac = b^2$, $ad = bc$, $bd = c^2$ est égal à tout le noyau. (Ceci anticipe un peu sur la suite, car cela sous-entend que l'image est un sous-schéma fermé de \mathbb{P}_k^3 , propriété fondamentale des morphismes projectifs que l'on verra plus tard.) Pour cela on utilise les trois équations de J pour chasser tous les monômes en b^2 , c^2 et bc . Ainsi, si P est dans le noyau, on peut l'écrire de manière unique $P = Q + Rb + Sc$ où $Q, R, S \in k[a, d]$. Alors $0 = P(x^3, x^2y, xy^2, y^3) = Q(x^3, y^3) + R(x^3, y^3)x^2y + S(x^3, y^3)xy^2$ et, comme les valeurs des exposants de x et y dans les trois termes sont distinctes modulo 3, on en déduit que $Q = R = S = 0$.

Exercice 8 *Connexité et fonctions.* Soit X un schéma. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (1) X est connexe,
 - (2) $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ ne possède pas d'idempotent non trivial ($e \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ tel que $e^2 = e$ et $e \neq 0, 1$),
 - (3) $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ n'est pas un anneau produit non trivial $A_1 \times A_2$.
- (Indication : (1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1).)

Corrigé. (1) \Rightarrow (2) : si $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ possède un idempotent non trivial e , alors

$$U_0 = \{x \in X, e(x) \neq 0 \text{ dans } k(x)\} \text{ et } U_1 = \{x \in X, e(x) \neq 1 \text{ dans } k(x)\}$$

sont deux ouverts de X (pourquoi ?), disjoints, non vides, et qui le recouvrent.

(2) \Rightarrow (3) : si $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) \simeq A_1 \times A_2$, alors l'élément $e = (1, 0)$ est un idempotent non trivial.

(3) \Rightarrow (1) : si X n'est pas connexe, on a $X = Y \amalg Z$ et donc $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) = \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y) \times \Gamma(Z, \mathcal{O}_Z)$.

Remarque. L'exercice montre en fait que si X a un nombre fini r de composantes connexes, alors $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ est un produit de r facteurs, et possède exactement 2^r idempotents.

Exercice 9 Soit $Y \subset \mathbb{A}_k^3$ le schéma donné par des équations $x^2 - yz = 0$ et $xz - x = 0$. Montrer que Y admet trois composantes irréductibles, trouver les idéaux premiers correspondants de $\mathcal{O}_Y(Y)$. Montrer que Y est connexe.

Corrigé. Les idéaux premiers minimaux de $k[x, y, z]/(x^2 - yz, xz - x)$ sont (x, y) et (x, z) et $(z - 1, x^2 - y)$. Les composantes irréductibles de Y s'intersectent, donc Y est connexe.

Exercice 10 Soit X un schéma et \mathcal{F} un \mathcal{O}_X -module cohérent. L'objet de cet exercice est de montrer que la fonction $d: X \rightarrow \mathbb{N}$ définie par $d(x) = \dim_{k(x)}(\mathcal{F} \otimes k(x))$, est semi-continue supérieurement. (On rappelle que cela signifie que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble $\{x \in X; d(x) \geq n\}$ est fermé.) Comme l'assertion est locale sur X , on se ramène au cas $X = \text{Spec}(A)$ et \mathcal{F} est le module induit par un A -module fini M (un module M sur un anneau A est dit *de type fini* ou simplement *fini* s'il possède un ensemble fini de générateurs).

Soit $p \in \text{Spec}(A)$ et $n = d(p)$. On va produire un ouvert $U = D(f) \subset \text{Spec}(A)$ contenant p et tel que $d|_U \leq n$. On fixe un isomorphisme $\varphi: k(p)^n \rightarrow M_p \otimes_{A_p} k(p)$ et un élément $f \notin p$, quelconque pour l'instant. Soit A_p l'anneau local en p et $M_p = M \otimes_A A_p$. On considère le diagramme ci-contre, dans lequel $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont les morphismes canoniques.

$$\begin{array}{ccc} A[\frac{1}{f}]^n & \xrightarrow{\chi} & M[\frac{1}{f}] \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \gamma \\ (A_p)^n & \xrightarrow{\psi} & M_p \\ \downarrow \beta & & \downarrow \delta \\ k(p)^n & \xrightarrow{\varphi} & M \otimes k(p) \end{array}$$

(1) Utilisez le lemme de Nakayama rappelé ci-dessous pour relever φ en une surjection de A_p -modules $\psi: (A_p)^n \rightarrow M_p$.

(2) Choisissez f pour que ψ se relève à son tour en un morphisme surjectif $\chi: A[\frac{1}{f}]^n \rightarrow M[\frac{1}{f}]$. Concluez.

Rappel : Théorème (Lemme de Nakayama) Soit A un anneau et $I \subset A$ un idéal. Soit M un A -module fini. Si $M = IM$, alors il existe $a \in A$ avec $a \equiv 1 \pmod I$, tel que $aM = 0$.

Un cas particulier très utile est le cas où A est un anneau local, et I est l'idéal maximal m de A . Dans ce cas le théorème dit que $M = mM$ implique $M = 0$.

Corrigé. Les morphismes canoniques α, γ proviennent du fait que $f \notin p$, et les morphismes β, δ sont les morphismes de réduction modulo l'idéal maximal pA_p . (Notez que de manière générale, pour M un A -module et $I \subset A$ un idéal, on a $M \otimes_A A/I \simeq M/IM$.) Fixons une fois pour toutes une base e_1, \dots, e_n du $A[\frac{1}{f}]$ -module libre $A[\frac{1}{f}]^n$. Les images des e_i dans $(A_p)^n$ et $k(p)^n$ donnent des bases dans ces modules libres; on les notera encore e_i quand il n'y aura pas de confusion possible.

(1) Le morphisme $M_p \rightarrow M \otimes k(p) \simeq M_p/pM_p$ est surjectif. On peut donc choisir un relevé $x_i \in M_p$ de chaque $\varphi(e_i)$ (il faudrait écrire $(\varphi\beta\alpha)(e_i)\dots$). Ceci définit un morphisme $\psi: (A_p)^n \rightarrow M_p$ par $\psi(e_i) = x_i$. Soit $K = \text{coker}(\psi)$. Comme le produit tensoriel est exact à droite (i.e. il préserve les coker), on a $K \otimes k(p) \simeq \text{coker}(\psi \otimes k(p)) = \text{coker}(\varphi) = 0$. Par Nakayama, $K = 0$ donc ψ est surjectif.

(2) On a $x_i = \frac{m_i}{s_i}$ avec $m_i \in M$ et $s_i \in A$, $s_i \notin p$. Posons $f = s_1 \dots s_n$, il est clair que x_i provient d'un élément $y_i \in M[\frac{1}{f}]$ (qui s'écrit encore $y_i = \frac{m_i}{s_i}$, avec les abus de notations évidents). Donc on peut définir $\chi: A[\frac{1}{f}]^n \rightarrow M[\frac{1}{f}]$ par $\chi(e_i) = y_i$. Il reste à faire en sorte que χ soit surjectif. Soient μ_1, \dots, μ_r des générateurs de M , alors leurs images dans $M[\frac{1}{f}]$ engendrent ce dernier. On note encore μ_k (au lieu de $\mu_k/1$) les images dans $M[\frac{1}{f}]$ (et dans M_p). Il suffira que μ_i soit dans l'image de χ pour que χ soit surjectif. Or, comme ψ est surjectif, on peut écrire dans M_p

$$\mu_k = \psi \left(\sum_{i=1}^n \frac{a_{k,i}}{t_{k,i}} e_i \right)$$

pour des éléments $a_{k,i} \in A$ et $t_{k,i} \notin p$. Il est clair que si on multiplie f par le produit des $t_{k,i}$ ($1 \leq k \leq r$, $1 \leq i \leq n$) alors toutes les égalités écrites ont un sens dans les localisés par rapport à f , à la place des localisés par rapport à $A \setminus p$. En d'autres termes, $\mu_k = \chi \left(\sum_{i=1}^n \frac{a_{k,i}}{t_{k,i}} e_i \right)$ dans $M[\frac{1}{f}]$.

Concluons : pour tout q dans l'ouvert $U = D(f)$, en tensorisant par le corps résiduel $k(q)$ on voit que $\chi \otimes k(q)$ est surjectif, donc $d(q) = \dim_{k(q)}(M \otimes_A k(q)) \leq n$. Par conséquent $\{p \in \text{Spec}(A); d(p) \leq n\}$ est ouvert, donc $\{p \in \text{Spec}(A); d(p) \geq n+1\}$ est fermé, ce qu'on voulait.

Exercice 11 *Foncteur de points d'un schéma affine.* Soit X un schéma et A un anneau. Montrez qu'un morphisme de schémas $X \rightarrow \text{Spec}(A)$ est la même chose qu'un morphisme d'anneaux $A \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$. Utilisez ceci pour donner une interprétation des fonctions (globales) sur X en termes de morphismes de X vers un certain schéma affine.

Corrigé. Soit $f: X \rightarrow \text{Spec}(A)$ un morphisme de schémas. En prenant les sections globales de $f^\sharp: \mathcal{O}_{\text{Spec}(A)} \rightarrow f_*\mathcal{O}_X$ on obtient un morphisme $\varphi: A \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$. Réciproquement, soit $\varphi: A \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ un morphisme d'anneaux. Considérons un recouvrement de X par des ouverts affines $U_i = \text{Spec}(B_i)$. En composant φ avec l'application de restriction $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow \Gamma(U_i, \mathcal{O}_X) = B_i$, on obtient un morphisme $A \rightarrow B_i$ qui induit un morphisme de schémas $f_i: U_i \rightarrow \text{Spec}(A)$. Pour que les f_i se recollent en un morphisme $f: X \rightarrow \text{Spec}(A)$, il faut vérifier qu'ils coïncident sur les intersections $U_i \cap U_j$. Le schéma $U_i \cap U_j$ n'est pas nécessairement affine (nous verrons plus loin dans le cours qu'il l'est si X est *séparé*), mais on peut toujours le recouvrir par des schémas affines $V_{i,j}^k = \text{Spec}(C_{i,j}^k)$. Alors il est clair que f_i et f_j coïncident sur chaque $V_{i,j}^k$, en vertu de l'égalité des applications de restriction $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow \Gamma(U_i, \mathcal{O}_X) \rightarrow \Gamma(V_{i,j}^k, \mathcal{O}_X)$ et $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow \Gamma(U_j, \mathcal{O}_X) \rightarrow \Gamma(V_{i,j}^k, \mathcal{O}_X)$. On obtient ainsi $f: X \rightarrow \text{Spec}(A)$. Nous laissons de côté la vérification du fait que les applications $f \mapsto \varphi$ et $\varphi \mapsto f$ sont inverses l'une de l'autre.

Plus généralement, soit k un anneau et supposons que X et $\text{Spec}(A)$ sont des k -schémas. Alors les mêmes raisonnements montrent se donner un morphisme de k -schémas $X \rightarrow \text{Spec}(A)$ est la même chose que se donner un morphisme de k -algèbres $A \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$.

En particulier, se donner une fonction globale sur X , c'est-à-dire un élément de $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$, qui est la même chose qu'un morphisme d'anneaux $\mathbb{Z}[T] \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$, revient donc à se donner un morphisme de schémas $X \rightarrow \text{Spec}(\mathbb{Z}[T]) = \mathbb{A}_{\mathbb{Z}}$.

Remarque. Voici l'explication du titre (« *Foncteur de points* »). À tout S -schéma X on peut associer son foncteur de points h_X de la façon suivante. Si T est un S -schéma, on pose $h_X(T) = \text{Hom}_S(T, X)$, l'ensemble des morphismes de schémas de T dans X , qu'on appelle l'ensemble des *points de X à valeurs dans T* . La

terminologie vient du fait que si T est le spectre d'un corps k , un morphisme $T \rightarrow X$ est donné par un point $x \in X$ et un morphisme de corps $k(x) \hookrightarrow k$, cf Hartshorne ex. 2.7 page 80. On appelle h_X le foncteur de points de X . Le *lemme de Yoneda* montre que h_X caractérise X , précisément, le foncteur

$$h: \text{Sch}/S \rightarrow \text{Fonct}((\text{Sch}/S)^\circ, \text{Ens})$$

est pleinement fidèle (ce qui veut dire grosso modo que c'est un plongement de catégories). L'exercice que nous venons de faire décrit le foncteur de points d'un schéma affine : $h_{\text{Spec}(A)}(T) = \text{Hom}_{\text{Ann}}(A, \Gamma(T, \mathcal{O}_T))$. Pour le lemme de Yoneda, voir par exemple Eisenbud-Harris.

Exercice 12 *Image schématique.* Soit $f : Z \rightarrow X$ un morphisme de schémas. Montrer qu'il existe un sous-schéma fermé $Y \subset X$ tel que f se factorise en $Z \rightarrow Y \rightarrow X$ et que pour tout diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} Y' & \hookrightarrow & X \\ \uparrow & \nearrow f & \\ Z & & \end{array}$$

où Y' est un sous-schéma fermé de X , il existe un morphisme $Y \rightarrow Y'$ sur X (il est automatiquement unique). Le sous-schéma fermé Y s'appelle l'*image schématique* de f . Si Z est réduit, alors Y est l'adhérence de l'image de f avec sa structure de schéma réduit.

Corrigé. Considérons d'abord le cas où $X = \text{Spec}(A)$ est affine. Alors $f : Z \rightarrow \text{Spec}(A)$ est donné par $\xi : A \rightarrow \Gamma(Z, \mathcal{O}_Z)$. Soit $I = \ker(\xi)$, alors le sous-schéma fermé $\text{Spec}(A/I) \subset \text{Spec}(A)$ satisfait la propriété universelle recherchée, donc $\text{Spec}(A/I)$ est l'image schématique de f .

Si X est arbitraire, pour chaque ouvert affine $U = \text{Spec}(A)$ avec $V := f^{-1}(U)$, l'image schématique de $f|_V : V \rightarrow U$ existe et est définie par l'idéal $I = \ker(A \rightarrow \Gamma(V, \mathcal{O}_V))$. De plus, pour chaque inclusion d'ouverts affines $U' \subset U$, le morphisme $U' \rightarrow U$ est plat, donc $A \rightarrow A'$ est plat aussi de sorte que le produit tensoriel $\otimes_{A'} A'$ préserve le noyau, donc $\ker(A' \rightarrow \Gamma(V', \mathcal{O}_{V'})) = I \otimes_{A'} A'$. Ceci nous dit que la restriction à U' de l'image schématique de $V \rightarrow U$ est l'image schématique de $V' \rightarrow U'$. (N.B. l'évocation de la platitude est essentielle ici ; nous étudierons cette notion plus en détail plus tard.)

Maintenant recouvrons X par des ouverts affines $U_i = \text{Spec}(A_i)$ et posons $f_i = f|_{f^{-1}(U_i)}$. D'après ce qui précède, l'image schématique de f_i et celle de f_j coïncident sur tous les ouverts affines $U_k \subset U_i \cap U_j$, donc sur $U_i \cap U_j$. Donc ces images schématiques se recollent en un sous-schéma fermé de X .

Si Z est réduit, notons W le sous-schéma fermé de X défini par la structure réduite sur l'adhérence de l'image ensembliste de f . Clairement l'application ensembliste sous-jacente à f se factorise en $f' : Z \rightarrow W$. Par ailleurs pour toute fonction φ sur un ouvert $U \subset X$ qui est nulle sur $U \cap W$, $\varphi \circ f'$ est nulle car elle est nulle en tout point de Z et celui-ci est réduit. Donc le morphisme de faisceaux de fonctions $f^\#$ induit $(f')^\# : \mathcal{O}_W \rightarrow f'_* \mathcal{O}_Z$. On a ainsi défini un morphisme de schémas $f' : Z \rightarrow W$ tel que f se factorise par f' . Or l'image schématique Y est le plus petit sous-schéma qui vérifie cette propriété donc $Y \subset W$. Comme de plus Y contient l'image ensembliste de f et est réduit (car localement son anneau de fonctions A/I est un sous-anneau d'un anneau de fonctions sur un ouvert de Z qui est réduit), on obtient $W \subset Y$. D'où égalité.

Remarque. Il y a plusieurs notions d'*images* pour un morphisme de schémas, chacune avec ses avantages et ses inconvénients. Sur l'image au sens ensembliste, il n'y a pas en général de structure de schéma naturelle. Le meilleur résultat disponible est le théorème de Chevalley : *l'image ensembliste d'un morphisme de type fini de schémas noethériens est constructible* (une partie constructible d'un espace topologique est une partie qui est réunion finie de parties localement fermées). Pour plus de détails sur les différentes notions d'images, voir Eisenbud-Harris paragraphe V.1.

Exercice 13 *Fonctions sur \mathbb{P}^n .* Montrez que les fonctions globales sur l'espace projectif \mathbb{P}_k^n sont les constantes.

Corrigé. Fixons des coordonnées homogènes $(x_0 : \dots : x_n)$ sur l'espace projectif. Sur l'ouvert standard $U_i = \{x_i \neq 0\}$ les fonctions x_j/x_i sont bien définies, et $U_i = \text{Spec}(k[x_0/x_i, \dots, x_n/x_i])$. Une fonction globale

sur \mathbb{P}_k^n est donnée par des fonctions f_i sur U_i qui coïncident sur les $U_i \cap U_j$. L'inclusion $U_i \cap U_j \subset U_i$ correspond au morphisme d'anneaux $k[x_0/x_i, \dots, x_n/x_i] \hookrightarrow k[x_0/x_i, \dots, x_n/x_i, x_i/x_j]$ et $f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j}$ s'écrit $f_i(x_0/x_i, \dots, x_n/x_i) = f_j(x_0/x_j, \dots, x_n/x_j)$. Si $i \neq j$ et f_i n'est pas un polynôme constant, alors le degré en x_i de $f_i(x_0/x_i, \dots, x_n/x_i)$ est strictement négatif, ce qui n'est pas possible dans $f_j(x_0/x_j, \dots, x_n/x_j)$. Par contraposée, f_i est égale à une constante $\lambda \in k$, et par symétrie f_j est aussi une constante qui est nécessairement λ .

Remarque. C'est un fait général que les schémas projectifs (plus généralement, propres) ont « peu » de fonctions, à savoir que l'espace des fonctions est de dimension finie, par opposition aux schémas affines qui en ont beaucoup. Plus généralement, le *théorème de finitude* de Serre-Grothendieck dit que pour tout schéma propre X et tout \mathcal{O}_X -module cohérent \mathcal{F} , les groupes de cohomologie $H^i(X, \mathcal{F})$ sont de dimension finie.

Exercice 14 *Schéma des racines n -ièmes de l'unité.* Soit A un anneau et $n \geq 1$ un entier. Montrez qu'il existe un schéma affine, noté $\mu_{n,A}$ et appelé schéma des racines n -ièmes de l'unité, tel que pour tout A -schéma S , se donner une racine n -ième de l'unité de $\Gamma(S, \mathcal{O}_S)$ est la même chose que se donner un A -morphisme $S \rightarrow \mu_{n,A}$.

Soient p, p' des nombres premiers. Décrivez $\mu_{p,A}$ lorsque $A = \mathbb{Q}$, puis $A = \mathbb{F}_{p'}$ pour $p' \neq p$, puis $A = \mathbb{F}_{p'}$ pour $p' = p$.

Corrigé. Se donner un élément $x \in \Gamma(S, \mathcal{O}_S)$ (une fonction) c'est la même chose que se donner un morphisme de A -algèbres $A[X] \rightarrow \Gamma(S, \mathcal{O}_S)$. Se donner x tel que $x^n = 1$ c'est se donner un morphisme de A -algèbres $A[X]/(X^n - 1) \rightarrow \Gamma(S, \mathcal{O}_S)$. On pose donc $\mu_{n,A} = \text{Spec}(A[X]/(X^n - 1))$. D'après la description des morphismes de X vers un schéma affine, ce schéma vérifie bien la propriété demandée.

D'après sa définition même, $\mu_{n,A}$ classe les racines n -ièmes de l'unité parmi les fonctions de A -schémas variables, on dit que c'est l'*espace de modules des racines n -ièmes de l'unité*.

Décrivons $\mu_{p,\mathbb{Q}}$. On sait que $X^p - 1 = (X - 1)\Phi_p(X)$ où $\Phi_p(X)$ est le polynôme cyclotomique qui est irréductible. Ceci donne un isomorphisme $\mathbb{Q}[X]/(X^p - 1) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}[X]/(X - 1) \times \mathbb{Q}[X]/(\Phi_p)$ et donc $\mu_{p,\mathbb{Q}} \xrightarrow{\sim} \text{Spec}(\mathbb{Q}) \amalg \text{Spec}(\mathbb{Q}(\zeta_p))$. C'est une somme disjointe d'un \mathbb{Q} -point (de degré 1 sur \mathbb{Q}) et d'un $\mathbb{Q}(\zeta_p)$ -point (de degré $p - 1$ sur \mathbb{Q}).

Les propriétés du polynôme cyclotomique Φ_p sur $\mathbb{F}_{p'}$ pour $p' \neq p$ sont les mêmes que sur \mathbb{Q} , donc la description de $\mu_{p,\mathbb{F}_{p'}}$ est essentiellement la même que ci-dessus.

Enfin μ_{p,\mathbb{F}_p} est très différent car $\mathbb{F}_p[X]/(X^p - 1) \xrightarrow{\sim} \mathbb{F}_p[X]/(X - 1)^p$ est une \mathbb{F}_p -algèbre locale non réduite. Donc μ_{p,\mathbb{F}_p} est topologiquement un point, avec un anneau de fonctions non réduit (et de degré toujours p sur la base).

Remarque. J'ai évoqué plus haut le fait que le foncteur de Yoneda $h: \text{Sch}/S \rightarrow \text{Fonct}((\text{Sch}/S)^\circ, \text{Ens})$ est pleinement fidèle. On dit qu'un foncteur $F: (\text{Sch}/S)^\circ \rightarrow \text{Ens}$ est *représentable* par un schéma X si $F \simeq h_X$. Le lemme de Yoneda implique qu'un tel X est alors unique (à isomorphisme unique près). Nous venons de montrer que le foncteur des racines n -ièmes de l'unité défini par

$$F(T) = \{\text{racines } n\text{-ièmes de l'unité de } \Gamma(T, \mathcal{O}_T)\}$$

est représentable par un schéma $\mu_{n,S}$.

Exercice 15 *Support d'un module.* Soit M un module de type fini sur un anneau A . On appelle *support* de M l'ensemble $\{p \in \text{Spec}(A), M_p \neq 0\}$. Soit $I = \{a \in A, aM = 0\}$ l'annulateur de M .

(1) Montrer que le support de M est $V(I) = \{p \in \text{Spec } A, I \subset p\}$.

(2) Supposons que $A = k[t]$ et M est un A -module de longueur finie. Alors M peut être vu comme un k -espace vectoriel \overline{M} de dimension finie muni d'un opérateur $\bar{t} \in \text{End}(\overline{M})$. Montrer que l'annulateur de M est l'idéal engendré par P , où P est le polynôme minimal de \bar{t} .

Corrigé. (1) Si $M_p = 0$ alors I n'est pas inclus dans p . En effet, si $m_1, \dots, m_r \in M$ engendrent M et $M_p = 0$ alors il existe $b_i \in A \setminus p$ tel que $b_i m_i = 0$. Donc pour $b = b_1 \dots b_r$ on voit que $b \in I$ et $b \notin p$.

Dans l'autre sens, si $M_p \neq 0$, alors $I \subset p$. En effet, si $m/1 \neq 0$ dans M_p , alors pour tout $b \in A \setminus p$ on a $bm \neq 0$, donc $b \notin I$ et $I \subset p$.

(2) Soit $A = k[t]$, soit M un k -espace vectoriel avec un endomorphisme \bar{t} . Pour $f \in A$ la condition que f est dans l'annulateur de A -module m devient $f(\bar{t}) = 0$. Donc, l'annulateur $I \subset A$ de M est (P) , où P est le polynôme minimal de \bar{t} .

Exercice 16 Anneaux locaux. On dit qu'un anneau est *local* s'il n'a qu'un idéal maximal. Montrez qu'un anneau est local si et seulement si l'ensemble des éléments non inversibles de A est un idéal. Soit A un anneau et p un idéal premier de A . Montrez que le localisé de A par rapport à la partie multiplicative $S = A \setminus p$, noté A_p , est un anneau local d'idéal maximal pA_p . Montrez que A_p/pA_p est isomorphe au corps de fractions de l'anneau intègre A/p .

Corrigé. Soit n l'ensemble des éléments non inversibles de A . Clairement, tout idéal de A distinct de A , en particulier tout idéal maximal m , est inclus dans n . Pour montrer que $m = n$ il suffit de montrer que $n \subset m$.

Si A est local, soit m son unique idéal maximal et montrons que $m = n$. Soit $x \in n$, alors x engendre un idéal de A distinct de A , donc inclus dans un idéal maximal d'après le lemme de Zorn, donc inclus dans m . Donc $n = m$, donc c'est un idéal.

Réciproquement, supposons que n est un idéal. Soit m un idéal maximal de A , montrons que $m = n$. Si $x \in n$, alors l'idéal engendré par x et m contient m et est distinct de A , donc est égal à m par maximalité, donc $n = m$. Donc A est un anneau local d'idéal maximal n .

Je ne donne pas de détails pour les réponses aux autres questions, qui sont assez faciles.

Exercice 17 Décrivez la topologie de $X = \text{Spec}(A)$ dans les cas suivants : $A = k$, $A = k[\epsilon]/(\epsilon^2)$, $A = \mathbb{C}[X]$, $A = \mathbb{C}[X, Y]$, A est un anneau de valuation discrète.

Corrigé. Si $A = k$ ou $A = k[\epsilon]/(\epsilon^2)$, alors X est un point et sa topologie est l'unique topologie sur le point. Si $A = \mathbb{C}[X]$, les fermés stricts de X sont les ensembles finis de points fermés (on rappelle qu'un point fermé correspond à un idéal maximal de A , c'est-à-dire par le Nullstellensatz, un idéal de la forme $(X - x_0)$ où $x_0 \in \mathbb{C}$).

Si $A = \mathbb{C}[X, Y]$, les fermés stricts de X sont les réunions finies de points fermés et de courbes irréductibles, définies par une équation irréductible $f(X, Y) \in \mathbb{C}[X, Y]$.

Si A est un anneau de valuation discrète, alors $\text{Spec}(A)$ est composé de deux points : son point générique, qui est un point ouvert correspondant à l'idéal $\{0\}$, et un point fermé correspondant à l'idéal maximal.

Exercice 18 Intersection complètes. Soit $Y \subset \mathbb{P}_k^n$ une sous-variété de dimension r . On dit que Y est une *intersection complète (stricte)* si $I(Y)$ peut être engendré par $n - r$ éléments. On dit que Y est une *intersection complète ensembliste* si Y est l'intersection (ensembliste) de $n - r$ hypersurfaces.

(1) Montrer qu'une intersection complète stricte est une intersection complète ensembliste.

(2) Montrer que la cubique gauche Y n'est pas une intersection complète stricte.

(3) Montrer que la cubique gauche Y est une intersection complète ensembliste. Précisément, trouver une hypersurface Y_2 de degré 2 et une hypersurface déterminantielle Y_3 de degré 3 telles que $Y = Y_2 \cap Y_3$ ensemblistement. Montrer que l'intersection $Y_2 \cap Y_3$ au sens des schémas est comprise entre Y et son premier voisinage infinitésimal dans \mathbb{P}_k^3 . (Soit X un schéma et $Y \subset X$ un sous-schéma fermé défini par un faisceau d'idéaux \mathcal{I} . Le n -ième voisinage infinitésimal de Y dans X est le sous-schéma fermé de X défini par le faisceau d'idéaux \mathcal{I}^{n+1} .)

Corrigé. (1) Si $I(Y)$ est engendré par $n - r$ éléments f_1, \dots, f_{n-r} alors ensemblistement c'est l'intersection des hypersurfaces $H_i = \{f_i = 0\}$.

(2) Soit $I = (ac - b^2, ad - bc, bd - c^2)$ l'idéal de Y . On note qu'il ne contient pas d'élément de degré 1 alors que la partie I_2 de degré 2 est de dimension 3. Si I a deux générateurs u, v alors il contient les composantes de degré 2 notées u_2, v_2 et celles-ci doivent être des générateurs de l'espace vectoriel I_2 . C'est impossible.

(3) Le plus délicat est de trouver Y_3 , et pour cela on suit l'indication en allant au plus simple. On produit une matrice $(3, 3)$ à part de la matrice $(3, 2)$ de l'exercice précédent, en ajoutant une ligne de la façon la plus naturelle :

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & d \\ c & d & a \end{pmatrix}.$$

En développant selon la dernière ligne pour faire apparaître les générateurs de I , ceci mène à l'hypersurface Y_3 d'équation $c(bd - c^2) - d(ad - bc) + a(ac - b^2) = 0$. On prend pour Y_2 l'hypersurface d'équation $ac = b^2$, de sorte que $Y_2 \cap Y_3$ est définie par $ac = b^2$ et $c(bd - c^2) = d(ad - bc)$. Il reste à montrer que $ad - bc$ et $bd - c^2$ s'annulent sur $Y_2 \cap Y_3$. Or, sur $Y_2 \cap Y_3$,

$$\begin{aligned} ad(ad - bc) &= c(abd - b^2c) = bc(ad - bc) \text{ donc } (ad - bc)^2 = 0, \\ c^2(bd - c^2) &= d(b^2d - bc^2) = bd(bd - c^2) \text{ donc } (bd - c^2)^2 = 0. \end{aligned}$$

Soit J l'idéal de $Y_2 \cap Y_3$, on a montré que $I^2 \subset J \subset I$.

Exercice 19 *Caractérisations des anneaux de valuation discrète.* Soit A intègre de corps des fractions K avec $A \neq K$. On dit que A est un *anneau de valuation discrète* s'il existe une application $v: K \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ d'image non réduite à $\{0, \infty\}$ telle que

- (i) $v^{-1}(\infty) = \{0\}$,
- (ii) pour tous x, y dans K on a $v(xy) = v(x) + v(y)$,
- (iii) pour tous x, y dans K on a $v(x + y) \geq \min(v(x), v(y))$,

et $A = \{x \in K, v(x) \geq 0\}$. Montrez que les conditions suivantes sont équivalentes :

- (1) A est un anneau de valuation discrète,
- (2) A est local et principal,
- (3) A est local, noethérien et son unique idéal maximal est principal,
- (4) il existe un élément $\pi \in A$ non nul et irréductible tel que tout $x \in A$ non nul peut s'écrire $x = u\pi^n$ avec $u \in A^\times$ et $n \in \mathbb{N}$.

(Indication : pour (3) \Rightarrow (4) montrer que l'idéal $I = \bigcap_{n \geq 1} (\pi^n)$ est nul à l'aide du lemme de Nakayama.)

Corrigé. (1) \Rightarrow (2) : si A est un AVD, les propriétés d'une valuation impliquent que l'ensemble des $x \in A$ tels que $v(x) > 0$ est un idéal m . Par ailleurs, soit $x \in A \setminus m$, c'est-à-dire $v(x) = 0$. Soit x^{-1} son inverse dans K , alors $v(x) + v(x^{-1}) = v(xx^{-1}) = v(1) \geq 0$ implique $v(x^{-1}) \geq 0$ donc $x^{-1} \in A$. Ainsi l'ensemble des éléments non inversibles de A est l'idéal m , donc A est local d'idéal maximal m . Soit π un élément de valuation égale à 1, il est facile de voir que m est principal engendré par π .

(2) \Rightarrow (3) est clair.

(3) \Rightarrow (4) : on note π un générateur de l'idéal maximal m ; il est clair que π est irréductible. Soit $x \in A$ non nul, si on montre qu'il existe un n maximal tel que $x \in (\pi^n)$, alors $x = u\pi^n$ avec $u \notin (\pi)$, donc u est inversible, et on a gagné. Considérons donc l'idéal $I = \bigcap_{n \geq 1} (\pi^n)$. Il est clair que $\pi I \subset I$. Réciproquement si $x \in I$ alors pour tout $n \geq 1$ on a une écriture $x = \pi^n x_n$. Ainsi pour tout m on a $x_1 \in (\pi^m)$, puisque $x = \pi x_1 = \pi^{m+1} x_{m+1}$ et A est intègre. Donc $x_1 \in I$, puis $x \in \pi I$. Comme A est supposé noethérien, I est un A -module fini, donc on peut appliquer le lemme de Nakayama qui fournit un $a \in A$ avec $a = 1 + \pi b$ tel que $aI = 0$. Ainsi $a \notin m$, donc a est inversible, donc $I = 0$.

(4) \Rightarrow (1) : on définit v par $v(x) = n$ où $x = u\pi^n$.

Exercice 20 *Exemples d'anneaux de valuation discrète.* Soit A_1 le localisé de $k[X_1, \dots, X_n]$ en l'idéal premier engendré par un polynôme irréductible $f \in k[X_1, \dots, X_n]$ (anneau local d'une hypersurface irréductible de \mathbb{A}_k^n). Soit $A_2 = k[[x]]$ l'anneau de séries formelles (voisinage analytique d'un point lisse dans une courbe). Soit A_3 le localisé de \mathbb{Z} en l'idéal premier engendré par un nombre premier p .

Montrez que A_1, A_2, A_3 sont des anneaux de valuation discrète.

Corrigé. L'idéal maximal de A_1, A_2, A_3 est engendré par f, x, p , respectivement.

Exercice 21 Anneaux réguliers de dimension 1. On dit qu'un anneau intègre A , de corps des fractions K , est *intégralement clos* (ou *normal*) si tout élément de K , entier sur A , est dans A . On dit qu'un anneau local noethérien A , d'idéal maximal m et de corps résiduel $k = A/m$, est *régulier* si $\dim(A) = \dim_k(m/m^2)$.

Soit A intègre de corps des fractions K avec $A \neq K$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (1) A est un anneau de valuation discrète,
- (2) A est local, noethérien, de dimension 1 et régulier,
- (3) A est local, noethérien, de dimension 1 et intégralement clos.

Corrigé. (1) \Rightarrow (2) : A est local et principal donc de dimension 1. De plus si $x \in K$ est entier sur A , on peut écrire $x = y/\pi^n$ avec $y \notin (\pi)$. En écrivant une équation de dépendance intégrale $x^m + a_1x^{m-1} + \dots + a_m = 0$, on voit que si $n \geq 1$ on peut multiplier par π^{nm} et on obtient $y^m \in (\pi)$. C'est une contradiction donc $x \in A$. Ceci montre que A est intégralement clos.

(2) \Rightarrow (3) :

Exercice 22 Singularités de courbes. On suppose que k n'est pas de caractéristique 2. Dessinez l'allure des courbes planes qui suivent : (a) $x^2 = x^4 + y^4$ (b) $xy = x^6 + y^6$ (c) $x^3 = y^2 + x^4 + y^4$ (d) $x^2y + xy^2 = x^4 + y^4$.

Corrigé. Voir Hartshorne page 36. La courbe (a) est un *point double avec tangente commune* (*tacnode* en anglais), la courbe (b) est un *point double* (*double point* ou *node*; on dit parfois aussi *noeud* en français), la courbe (c) est un *point de rebroussement* (*cusp*) et la courbe (d) est un *point triple* (*triple point*). Le passage de la terminologie anglaise à la terminologie française pose parfois de petits problèmes. Voir par exemple

<http://mapage.noos.fr/r.ferreol/langage/dicofgb/dicofgb.htm>.

Exercice 23 Éclatement dans le cas des courbes. Soit $X = \text{Spec}(A)$ une k -variété affine et Y une sous-variété d'idéal $I = (f_1, \dots, f_n)$. On considère le morphisme défini sur l'ouvert $U = X \setminus Y$:

$$\begin{aligned} f: X &\dashrightarrow \mathbb{P}_k^{n-1} \\ x &\mapsto (f_1(x) : \dots : f_n(x)) \end{aligned}$$

et son graphe $\Gamma_f \subset X \times \mathbb{P}_k^{n-1}$. On appelle *éclatement de Y dans X* l'adhérence schématique de Γ_f dans $X \times \mathbb{P}_k^{n-1}$ et on le note \tilde{X} . Il vient avec un morphisme $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$.

(1) Donnez des équations dans $\mathbb{A}_k^n \times \mathbb{P}_k^{n-1}$ pour l'éclatement de l'origine dans \mathbb{A}_k^n .

(2) Calculez les éclatements des courbes suivantes en l'origine, en donnant deux cartes affines :

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \ y^2 = x^2 + x^3 & \text{(b)} \ y^2 = x^3 & \text{(c)} \ y^2 = x^5 \\ \text{(d)} \ x^2y + xy^2 = x^4 + y^4 & \text{(e)} \ x^2 = x^4 + y^4 & \text{(f)} \ y^3 = x^5 \end{array}$$

Combien d'éclatements sont nécessaires pour désingulariser chaque courbe ?

Corrigé. (1) Le graphe Γ_f est l'ensemble des paires $(x, f(x))$ ou encore $(x, u) = ((x_1, \dots, x_n), (u_1 : \dots : u_n))$ tels que $(x_1 : \dots : x_n) = (u_1 : \dots : u_n)$. Pour tous i, j , l'équation suivante est vérifiée : $x_i u_j - x_j u_i$. Il est facile de vérifier que l'idéal engendré par ces équations définit l'adhérence schématique donc l'éclatement \tilde{X} . On obtient des cartes affines sur les ouverts $u_i \neq 0$ définies par $x_j = \frac{u_j}{u_i} x_i$.

(2) Dans chaque cas on éclate le sous-schéma défini par l'idéal (x, y) donc \tilde{X} est un sous-schéma de $X \times \mathbb{P}^1$. L'éclatement est défini par $(u : v) = (x : y)$. On recouvre \mathbb{P}_k^1 par les ouverts $U = \{u \neq 0\}$ et $V = \{v \neq 0\}$ et on note $s = v/u$ et $t = u/v$ les coordonnées respectives. Passons aux exemples.

(a) Dans la carte affine $X \times U$, on a $u \neq 0$ donc $x \neq 0$. Les équations de \tilde{X} sont $y^2 = x^2 + x^3$ et $y = sx$. On en tire $s^2 x^2 = x^2 + x^3$. Comme $x \neq 0$ les équations sont finalement $s^2 = 1 + x$ et $y = sx = s(s^2 - 1)$. Dans cette carte, l'éclatement est isomorphe à la droite affine \mathbb{A}_k^1 de coordonnée s .

Dans la carte affine $X \times V$, on a $v \neq 0$ donc $y \neq 0$. Les équations de \tilde{X} sont $y^2 = x^2 + x^3$ et $x = ty$. On en tire $y^2 = t^2 y^2 (1 + ty)$ donc finalement $1 = t^2 (1 + ty)$ et $x = ty$.

On voit que \tilde{X} est lisse, car il l'est dans les deux cartes affines.

(b) Comme ici aussi c'est la puissance de y qui est la plus petite, c'est la carte affine située dans $X \times U$ qui est plus intéressante. Je ne donne que celle-là. On a donc $y^2 = x^3$ et $y = sx$. On trouve les équations $s^2 = x$ et $y = sx = s^3$. Dans cette carte, $\tilde{X} \simeq \mathbb{A}_k^1$ en coordonnée s . Il est lisse.

(c) La carte la plus intéressante est dans $X \times U$. On a $y^2 = x^5$ et $y = sx$. On trouve les équations $s^2 = x^3$ et $y = sx$. On se retrouve avec un cusp « plus petit », comme celui de (b). Il faut éclater une nouvelle fois pour désingulariser X .

(d) Dans la carte $X \times U$, on a $x^2y + xy^2 = x^4 + y^4$ et $y = sx$ ce qui donne $s + s^2 = x(1 + s^4)$.

Exercice 24 *Branches en un point.* Soit $g(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$ un polynôme homogène de degré 3. On note \mathcal{O} l'anneau local de l'origine dans le sous-schéma X de $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$ défini par l'équation $xy = g(x, y)$. On souhaite montrer que si g est générique, l'anneau \mathcal{O} a un spectre irréductible mais pas son complété $\hat{\mathcal{O}}$.

(1) Donner une condition suffisante sur g pour que \mathcal{O} soit intègre. Dans la suite on suppose que cette condition est vérifiée.

(2) Construire un morphisme $\frac{\mathbb{C}[x, y]}{xy - g(x, y)} \rightarrow \frac{\mathbb{C}[x, u]}{u - xg(1, u)} \times \frac{\mathbb{C}[v, y]}{v - yg(v, 1)}$. (*Penser à un éclatement.*)

(3) En déduire un isomorphisme $\hat{\mathcal{O}} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[[u]] \times \mathbb{C}[[v]]$.

Corrigé.

Exercice 25 *Intersections et unions de sous-schémas fermés.* On note $|X|$ l'espace topologique d'un schéma X .

(1) Soient $X \rightarrow S, Y \rightarrow S$ des morphismes de schémas ; en toute généralité, il existe un *produit fibré* $X \times_S Y$. En particulier si Y, Z sont deux sous-schémas fermés de X on définit l'intersection $Y \cap Z = Y \times_X Z$. Donnez son faisceau d'idéaux dans X . Montrez que $|Y \cap Z| = |Y| \cap |Z|$.

(2) Duale, soient $Z \rightarrow X, Z \rightarrow Y$ des morphismes ; l'existence de la *somme amalgamée* $X \amalg_Z Y$ est beaucoup plus problématique. Dans le cas de sous-schémas fermés $Y, Z \subset X$ les choses se passent bien et on montre (ce n'est pas facile) que la réunion définie par $Y \cup Z = Y \amalg_{Y \cap Z} Z$, est un sous-schéma fermé de X . Donnez son faisceau d'idéaux dans X . Montrez que $|Y \cup Z| = |Y| \cup |Z|$.

(3) La définition de $Y \cup Z$ comme dans (2) n'est pas du tout la seule utile. Pour des diviseurs de Cartier $Y, Z \subset X$, définis localement par des équations f, g , on définit la *somme* $Y + Z$ comme le sous-schéma fermé de X d'équation locale $h = fg$. Montrez que c'est encore un diviseur de Cartier de X . Montrez que si Y, Z sont des diviseurs de Cartier effectifs, alors $|Y + Z| = |Y \cup Z| = |Y| \cup |Z|$.

(4) Soit $X \rightarrow S$ un morphisme de schémas. Un *diviseur de Cartier effectif relatif de X/S* est un diviseur de Cartier effectif $Y \subset X$ tel que Y est plat sur S . Montrez que si Y, Z sont des diviseurs de Cartier effectifs relatifs de X/S alors $Y + Z$ l'est aussi.

Corrigé. (1) On raisonne par condition nécessaire. Si $W = Y \times_X Z$ est un sous-schéma fermé de X qui est un produit fibré dans la catégorie des schémas, alors en particulier c'est un produit fibré dans la sous-catégorie des schémas qui sont affines sur X (car W est affine sur X). Ceci nous ramène au cas affine $X = \text{Spec}(A)$, Y, Z définis par des idéaux I, J , et $W = \text{Spec}(B)$ tel que B est une somme amalgamée de A/I et A/J au-dessus de A dans la catégorie des anneaux. On sait que cette somme est $B = A/I \otimes_A A/J \simeq A/(I + J)$. Finalement dans le cas global $\mathcal{I}_{Y \cap Z} = \mathcal{I}_Y + \mathcal{I}_Z$. Le fait que $|Y \cap Z| = |Y| \cap |Z|$ est laissé en exercice (se ramener au cas affine).

(2) On raisonne idem, et on cherche l'anneau B produit fibré de A/I et A/J au-dessus de $A/(I + J)$. On a un morphisme $A \rightarrow (A/I) \times_{A/(I+J)} (A/J)$ donné par $a \mapsto (a + I, a + J)$. Il est clair que le noyau est $I \cap J$. Par ailleurs ce morphisme est surjectif car si $a + I$ et $b + J$ on même classe modulo $I + J$ alors il existe i, j tels que $a = b + i + j$ et donc $a - i = b + j =: c$ et donc ce nombre c est un antécédent pour $(a + I, b + J)$. En résumé l'anneau $(A/I) \times_{A/(I+J)} (A/J)$ est isomorphe à $A/(I \cap J)$. Globalement on a $\mathcal{I}_{Y \cup Z} = \mathcal{I}_Y \cap \mathcal{I}_Z$. Le fait que $|Y \cup Z| = |Y| \cup |Z|$ est laissé en exercice (se ramener au cas affine).

(3) Il suffit de dire que si les équations locales f et g sont non diviseurs de zéros alors fg est aussi non diviseur de zéro. Pour montrer que $|Y + Z| = |Y \cup Z|$ c'est aussi local. On se place donc sur un ouvert affine de X et on est ramené au cas affine $X = \text{Spec}(A)$, Y défini par l'idéal $I = (f)$, Z défini par l'idéal $J = (g)$. Alors $Y \cup Z$ tel que défini dans (2) a pour idéal $I \cap J$ et $Y + Z$ a pour idéal IJ . Or on a $(I \cap J)^2 \subset IJ \subset I \cap J$

donc $Y + Z$ est compris entre $Y \cup Z$ et son premier voisinage infinitésimal. En particulier ils ont même espace topologique sous-jacent.

(4) Il faut vérifier la platitude en un point x et donc ici encore tout est local. Notons s l'image de x dans S , et $R = \mathcal{O}_{S,s}$, $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{X,x}$ les anneaux locaux. On considère des équations locales pour Y et Z et leurs germes f et g dans \mathcal{O} . L'hypothèse sur Y et Z est que \mathcal{O}/f et \mathcal{O}/g sont plats sur R . Or on a une suite exacte de \mathcal{O} -modules :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}/f \xrightarrow{\times g} \mathcal{O}/fg \rightarrow \mathcal{O}/g \rightarrow 0.$$

Comme les termes extrêmes sont plats sur R , il s'ensuit que \mathcal{O}/fg est aussi plat sur R . Donc $Y + Z$ est un diviseur de Cartier effectif relatif de X/S .

Exercice 26 Soit X un schéma noethérien et \mathcal{F} un faisceau cohérent.

(1) On pose $d(x) = \dim_{k(x)} \mathcal{F} \otimes k(x)$ et $d(\mathcal{F}) = \sup \{d(x), x \in X\}$. Montrer que $d(\mathcal{F})$ est fini.

(2) Montrez que X est affine si et seulement si $X_{\text{réd}}$ est affine en utilisant le théorème de Serre sur la cohomologie des schémas affines (Hartshorne, chap. II, théorème 3.7) et en faisant une récurrence sur $d(\mathcal{F})$.

Corrigé. (1) Par semi-continuité de la dimension des fibres des faisceaux cohérents, pour tout $x \in X$ l'ensemble $U_x = \{y \in X, d(y) \leq d(x)\}$ est un ouvert. Comme X est noethérien donc quasi-compact, il est recouvert par un nombre fini U_{x_1}, \dots, U_{x_n} de ces ouverts. Il s'ensuit que $d(\mathcal{F}) \leq \sup \{d(x_i), 1 \leq i \leq n\} < \infty$.

(2) Si X est affine, alors $X_{\text{réd}}$ est affine. Réciproquement supposons $X_{\text{réd}}$ affine. Par le théorème de Serre, il suffit de montrer que pour tout faisceau cohérent \mathcal{F} sur X on a $H^1(X, \mathcal{F}) = 0$. (Il suffit même de considérer des faisceaux d'idéaux, mais cela ne sert à rien dans ce qui suit.) On fait une récurrence sur $d(\mathcal{F})$. Si $d(\mathcal{F}) = 0$ alors par semi-continuité (ou Nakayama) $\mathcal{F} = 0$ donc $H^1(X, \mathcal{F}) = 0$. Si $d(\mathcal{F}) > 0$ alors on considère la suite exacte $0 \rightarrow \mathcal{N}\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}/\mathcal{N}\mathcal{F} \rightarrow 0$ et on prend la suite exacte longue de cohomologie associée. Le morceau concernant les H^1 est :

$$\dots \rightarrow H^1(X, \mathcal{N}\mathcal{F}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{F}/\mathcal{N}\mathcal{F}) \rightarrow \dots$$

Comme $d(\mathcal{F}) > 0$, le lemme de Nakayama montre que $d(\mathcal{N}\mathcal{F}) < d(\mathcal{F})$. (En effet : en un point x tel que $d(\mathcal{F}) = d(x)$, si l'inclusion $\mathcal{N}_x \mathcal{F}_x \subset \mathcal{F}_x$ était une égalité, par Nakayama il existerait un germe de section $a \in \mathcal{O}_{X,x}$ congru à 1 modulo \mathcal{N}_x tel que $a\mathcal{F}_x = 0$. Or $a \equiv 1 \pmod{\mathcal{N}_x}$ implique a inversible donc $\mathcal{F}_x = 0$, impossible vu le choix de x .) Donc, par l'hypothèse de récurrence $H^1(X, \mathcal{N}\mathcal{F}) = 0$. De plus $\mathcal{F}/\mathcal{N}\mathcal{F} = i_* i^* \mathcal{F}$ et donc $H^1(X, \mathcal{F}/\mathcal{N}\mathcal{F}) = H^1(X_{\text{réd}}, i^* \mathcal{F}) = 0$ puisque $i^* \mathcal{F}$ est cohérent sur $X_{\text{réd}}$ affine. On obtient $H^1(X, \mathcal{F}) = 0$.

Remarque. Si on suppose seulement que l'espace topologique sous-jacent à X est noethérien, cette preuve s'adapte. Cela étend alors un peu le résultat de EGA I, 5.1.10 car on n'a pas besoin de supposer que le faisceau des éléments nilpotents \mathcal{N} est lui-même nilpotent. Voici les modifications nécessaires : sous cette hypothèse plus faible, le théorème de Serre demande de vérifier que $H^1(X, \mathcal{F}) = 0$ pour tout faisceau *quasi-cohérent* \mathcal{F} sur X (voir EGA II, 5.2.1). Or l'utilisation du lemme de Nakayama, d'une part dans (1) pour avoir $d(\mathcal{F}) < \infty$ et d'autre part dans (2) pour avoir $d(\mathcal{N}\mathcal{F}) < d(\mathcal{F})$, nécessite au moins d'avoir des faisceaux quasi-cohérents et de type fini (un \mathcal{O}_X -module \mathcal{F} est de *type fini* si pour tout $x \in X$ il existe un voisinage $U \subset X$ tel que $\mathcal{F}|_U$ soit engendré par une famille finie de sections de \mathcal{F} sur U . Tout faisceau cohérent est quasi-cohérent et de type fini mais l'inverse n'est pas vrai.). Pour un tel faisceau, la preuve qui précède montre donc que $H^1(X, \mathcal{F}) = 0$. Or on peut montrer que sur un schéma dont l'espace topologique sous-jacent est noethérien, tout faisceau quasi-cohérent \mathcal{F} est limite inductive filtrante de ses sous-faisceaux quasi-cohérents de type fini \mathcal{F}_α , cf EGA I, 9.4.9. Comme de plus la cohomologie commute aux limites inductives filtrantes de faisceaux (Hartshorne chap. III, proposition 2.9), on a $H^1(X, \mathcal{F}) = H^1(X, \varinjlim \mathcal{F}_\alpha) = \varinjlim H^1(X, \mathcal{F}_\alpha) = 0$, cqfd.

Exercice 27 *Un théorème de Chevalley.* Nous admettons le théorème de connexion de Zariski, rappelé ci-dessous. Utilisez-le pour démontrer le théorème suivant dû à Chevalley. Soit Y un schéma localement noethérien. Soit $f: X \rightarrow Y$ un morphisme. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

- (1) f est fini,
- (2) f est propre et affine,
- (3) f est propre et quasi-fini.

(Indication : montrez que (1) \iff (2) et (1) \iff (3).)

Théorème de connexion de Zariski et factorisation de Stein (CZFS) Soit Y un schéma localement noethérien. Soit $f: X \rightarrow Y$ un morphisme propre. Alors $\mathcal{A} := f_*\mathcal{O}_X$ est un faisceau de \mathcal{O}_Y -algèbres cohérent. Soit $Y' = \text{Spec}(\mathcal{A})$ et $g: Y' \rightarrow Y$, $f': X \rightarrow Y'$ les morphismes canoniques tels que $f = g \circ f'$. Alors g est fini, f' est propre, $f'_*\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_{Y'}$, et les fibres de f' sont connexes et non vides.

Corrigé. Le fait qu'un morphisme fini est fermé est une traduction du théorème de Cohen-Seidenberg en algèbre commutative. Si f est fini il est donc universellement fermé car pour toute extension de base $Y' \rightarrow Y$, le morphisme $f': X \times_Y Y' \rightarrow Y'$ est fini. Ainsi il est clair que (1) implique (2) et (3).

(2) \Rightarrow (1) : comme f est affine, on a $X = \text{Spec}(\mathcal{A})$ où $\mathcal{A} = f_*\mathcal{O}_X$. En d'autres termes, dans la factorisation de Stein de f , on a $Y' = X$. Le théorème CZFT dit donc en particulier que X est fini sur Y .

(3) \Rightarrow (1) : on considère la factorisation de Stein de f . Comme f est quasi-fini, alors f' l'est aussi, et comme les fibres de f' sont connexes, ce sont des points, donc f' est bijectif (car les fibres de f' sont aussi non vides). Comme f' est fermé c'est donc un homéomorphisme. Par ailleurs le théorème dit aussi que $f'_*\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_{Y'}$ c'est-à-dire que le morphisme $(f')^\sharp: \mathcal{O}_{Y'} \rightarrow f'_*\mathcal{O}_X$ est un isomorphisme. Il s'ensuit que f est un isomorphisme.

Exercice 28 *Sous-espaces linéaires et projections.* Soit E un k -espace vectoriel de dimension $n+1$ et $\pi: E \setminus \{0\} \rightarrow P(E)$ le morphisme canonique. Si $F \subset E$ est un sous-espace vectoriel, on dit que $P(F) \subset P(E)$ est un sous-espace linéaire. Si F et F' sont supplémentaires dans E , on dit que $P(F)$ et $P(F')$ sont supplémentaires dans $P(E)$. Dans ce cas, on appelle projection sur F' depuis F le morphisme $P(E) \setminus P(F) \rightarrow P(F')$ induit par la projection sur F' parallèlement à F dans E .

(1) Soit $X \subset P(E)$ une sous-variété fermée. Soit $p \notin X$ et $P(F)$ un hyperplan ne contenant pas p . Montrez que la restriction à X de la projection de centre p sur $P(F)$ induit un morphisme $\pi: X \rightarrow P(F)$ qui est fini.

(2) Démontrez la version projective du théorème de normalisation de Noether : pour toute k -variété projective X , il existe un morphisme fini surjectif $X \rightarrow \mathbb{P}_k^r$.

Corrigé. (1) Notons $\pi_p: P(E) \setminus \{p\} \rightarrow P(F)$ la projection et $\pi: X \rightarrow P(F)$ sa restriction. D'après le théorème de Chevalley, il suffit de montrer que π est quasi-fini, c'est-à-dire en fait ici, à fibres finies. Soit $y \in P(F)$, alors $\pi_p^{-1}(y)$ est la droite (py) privée du point p . La fibre $\pi^{-1}(y)$ étant un fermé de $(py) \setminus \{p\}$, elle est soit finie, soit égale à $(py) \setminus \{p\}$. Donc si elle n'est pas finie on a $(py) \setminus \{p\} \subset X$ et comme X est fermée dans $P(E)$ on obtient $(py) \subset X$. Ceci est contradictoire avec l'hypothèse $p \notin X$.

(2) La variété X se plonge dans un espace projectif $P(E)$. Si $X = P(E)$ il n'y a rien à dire. Sinon, d'après la question (1), il existe une projection depuis un point $p_1 \notin X$ qui se restreint en un morphisme fini $\pi_1: X \rightarrow P(F_1)$. Notons $X_1 = \pi_1(X)$. Si $X_1 = P(F_1)$, c'est fini. Sinon, il existe une projection depuis un point $p_2 \in P(F_1) \setminus X_1$ qui se restreint en un morphisme fini $\pi_2: X_1 \rightarrow P(F_1)$. On pose $X_2 = \pi_2(X_1)$; on itère ainsi le procédé. Comme les morphismes π_i sont finis, on a $\dim(X_1) = \dots = \dim(X_i)$. Comme de plus $\dim(P(F_i)) = n - i$, il vient un moment où $\dim(X_i) = \dim(P(F_i))$ et donc $X_i = P(F_i)$. Le morphisme fini surjectif recherché est le composé $X \rightarrow X_1 \rightarrow \dots \rightarrow X_i = P(F_i)$.

Exercice 29 *Morphismes affines.* Pour tout S -schéma X de morphisme structural $f: X \rightarrow S$, on note $\mathcal{A}(X)$ la \mathcal{O}_S -algèbre $f_*\mathcal{O}_X$ (i.e. c'est un faisceau d'anneaux qui est aussi un \mathcal{O}_S -module quasi-cohérent).

(1) On dit que $f: X \rightarrow S$ est un morphisme *affine*, ou que X est un schéma affine au-dessus de S , s'il existe un recouvrement ouvert affine $\{S_i\}$ de S tel que $f^{-1}(S_i)$ est affine pour tout i . Montrez qu'alors, pour tout ouvert $U \subset S$, le morphisme induit $f^{-1}(U) \rightarrow U$ est affine. (Indication : Se ramener au cas X affine, puis utiliser les ouverts distingués.)

(2) Soit \mathcal{B} une \mathcal{O}_S -algèbre quasi-cohérente. Montrez qu'il existe un schéma X affine au-dessus de S tel que $\mathcal{A}(X) = \mathcal{B}$, unique à un S -isomorphisme unique près.

(3) Soit X un schéma affine au-dessus de S . Soit Y un S -schéma. Montrez que se donner un S -morphisme $Y \rightarrow X$ est la même chose que se donner un morphisme de \mathcal{O}_S -algèbres $\mathcal{A}(X) \rightarrow \mathcal{A}(Y)$.

Corrigé. Cet exercice est une variation de Hartshorne, chapitre II, ex. 5.17.

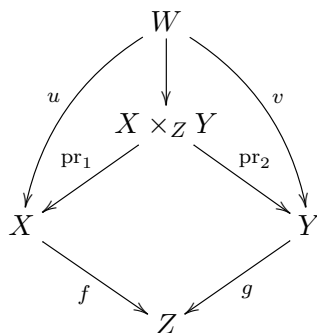
(1) Soit $\{S_i\}$ un recouvrement ouvert affine tel que les $f^{-1}(S_i)$ sont affines. Il suffit de montrer qu'il existe un recouvrement ouvert $U_{i,j}$ de $U \cap S_i$ tel que $f^{-1}(U_{i,j})$ est affine et ceci nous ramène donc au cas où $S = S_i$ et X sont affines. Notons $S = \text{Spec}(A)$, $X = \text{Spec}(B)$ et $\varphi: A \rightarrow B$ le morphisme d'anneaux correspondant. On peut prendre un recouvrement par des ouverts distingués $D(f) = \text{Spec}(A_f)$, dans ce cas il est facile de vérifier que $f^{-1}(D(f)) = D(\varphi(f))$ qui est affine.

(2) On va construire X par recollement; pour la procédure de recollement, voir Hartshorne, chapitre II, ex. 2.12. Pour tout ouvert $U \subset S$, soit X_U le schéma $\text{Spec}(\Gamma(U, \mathcal{B}))$ et $f_U: X_U \rightarrow U$ le morphisme induit par $\Gamma(U, \mathcal{O}_U) \rightarrow \Gamma(U, \mathcal{B})$. On a un isomorphisme canonique $\mathcal{A}(X_U) \simeq \mathcal{B}|_U$. Si V est un autre ouvert affine de S , notons $X_{U,V} = f_U^{-1}(U \cap V)$. Donc $X_{U,V}$ et $X_{V,U}$ sont affines sur $U \cap V$ et $\mathcal{A}(X_{U,V})$ et $\mathcal{A}(X_{V,U})$ sont canoniquement isomorphes à $\mathcal{B}|_{U \cap V}$. De plus ces isomorphismes sont compatibles sur les intersections triples (précisément notons $\theta_{U,V}: X_{U,V} \rightarrow X_{U,V}$ l'isomorphisme; si on a trois ouverts U, V, W alors le fait que $\theta_{U,V}$ soit canonique implique que les restrictions aux ouverts ad hoc, notées par la même lettre θ pour simplifier, vérifient $\theta_{U,V} \circ \theta_{V,W} = \theta_{U,W}$). Il s'ensuit que le système $\{X_U, \theta_{U,V}\}$ se recolle, de manière unique à un S -isomorphisme unique près, en un S -schéma X qui, par construction même, est affine au-dessus de S et tel que $\mathcal{A}(X) = \mathcal{B}$.

(3) C'est la version globale de l'énoncé qui dit qu'un morphisme de schémas $X \rightarrow \text{Spec}(A)$ est la même chose qu'un morphisme d'anneaux $A \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$. Partant de cela, la démonstration est facile et je ne donne pas plus de détails.

Exercice 30 *Produit fibré dans le cas affine.* Soient $X \rightarrow Z$ et $Y \rightarrow Z$ deux morphismes de schémas. Supposant que X, Y, Z sont des schémas affines, montrez qu'il existe un produit fibré $X \times_Z Y$ dans la catégorie des schémas.

Corrigé. Notons $f: X = \text{Spec}(A) \rightarrow Z = \text{Spec}(C)$ et $g: Y = \text{Spec}(B) \rightarrow Z = \text{Spec}(C)$. Rappelons la définition d'un produit fibré par sa propriété universelle : c'est un schéma noté $X \times_Z Y$ muni de deux morphismes $\text{pr}_1: X \times_Z Y \rightarrow X$ et $\text{pr}_2: X \times_Z Y \rightarrow Y$ tels que pour tout schéma W et tous morphismes $u: W \rightarrow X$ et $v: W \rightarrow Y$ tels que $f \circ u = g \circ v$, il existe un unique morphisme $W \rightarrow X \times_Z Y$ tel que le diagramme suivant soit commutatif :



Dans le cas où X, Y, Z sont affines, la description de $X \times_Z Y$ est immédiate car la donnée de u et v est équivalente à la donnée de deux morphismes d'anneaux $\varphi: A \rightarrow \Gamma(W, \mathcal{O}_W)$ et $\psi: B \rightarrow \Gamma(W, \mathcal{O}_W)$ tels que $u \circ f^\# = v \circ g^\#$. (On note $f^\#: C \rightarrow A$ et $g^\#: C \rightarrow B$.) On a donc un diagramme de somme amalgamée dans la catégorie des anneaux, et on sait que la somme amalgamée existe : c'est le produit tensoriel. Précisément il existe un unique morphisme $t: A \otimes_C B \rightarrow \Gamma(W, \mathcal{O}_W)$ qui rend commutatif le diagramme d'anneaux évident. On pose donc $X \times_Z Y = \text{Spec}(A \otimes_C B)$, la donnée de t fournit un morphisme de schémas $W \rightarrow X \times_Z Y$ et la vérification de la propriété universelle est évidente car c'est plus ou moins ce que nous venons de faire.

Exercice 31 *Points d'un schéma comme morphismes $\text{Spec}(K) \rightarrow X$.* Soit X un schéma. On note $\mathcal{O}_{X,x}$ l'anneau local d'un point $x \in X$, m_x l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{X,x}$, et $k(x) = \mathcal{O}_{X,x}/m_x$ son corps résiduel. Montrez qu'un morphisme $\text{Spec}(K) \rightarrow X$, où K est un corps, est la même chose qu'un couple (x, i) formé d'un point x de l'espace topologique X , et d'une injection de corps $i: k(x) \rightarrow K$.

Corrigé. Soit un morphisme $f: \text{Spec}(K) \rightarrow X$. Alors comme $\text{Spec}(K)$ a pour espace sous-jacent un point $\{z\}$, l'image est un point $x \in X$. Par ailleurs on a l'extension d'anneaux locaux $\mathcal{O}_{X,x} \rightarrow \mathcal{O}_{\text{Spec}(K),z} = K$

(obtenue en passant aux anneaux locaux à partir de $f^\sharp : \mathcal{O}_X \rightarrow f_*\mathcal{O}_{\text{Spec}(K)}$). Dire que c'est un morphisme d'anneaux locaux veut dire que l'idéal maximal m_x s'envoie dans l'idéal maximal de K , c'est-à-dire 0. Donc ce morphisme passe au quotient en $k(x) \rightarrow K$.

Réciproquement, soit donnés $x \in X$ et $i : k(x) \rightarrow K$. On définit $f : \text{Spec}(K) \rightarrow X$ ensemblistement par $f(z) = x$. Il faut ensuite définir $f^\sharp : \mathcal{O}_X \rightarrow f_*\mathcal{O}_{\text{Spec}(K)}$. Un tel morphisme de faisceaux est donné par des morphismes $\mathcal{O}_X(U) \rightarrow \mathcal{O}_{\text{Spec}(K)}(f^{-1}(U))$ pour tous les ouverts U ; ce qui veut dire le morphisme nul $\mathcal{O}_X(U) \rightarrow \{0\}$ si $x \notin U$, et un morphisme $\mathcal{O}_X(U) \rightarrow K$ si $x \in U$. Si $x \in U$, on définit $\mathcal{O}_X(U) \rightarrow K$ par :

$$\mathcal{O}_X(U) \xrightarrow{\text{germe}} \mathcal{O}_{X,x} \rightarrow k(x) \xrightarrow{i} K .$$

On vérifie que ces constructions sont inverses l'une de l'autre...

Exercice 32 *Points fermés.* Soit X un schéma et $x \in X$ un point. Pour tout ouvert affine $\text{Spec}(A)$ contenant x , on note $p_x \subset A$ l'idéal premier correspondant à x (on distingue toujours dans la notation le point x , objet géométrique, et l'idéal $p_x \subset A$, objet algébrique).

- (1) Supposons que $X = \text{Spec}(A)$. Montrez que l'adhérence de $\{x\}$ est égale à $V(p_x)$.
- (2) Soient $U = \text{Spec}(A)$ et $V = \text{Spec}(B)$ deux voisinages ouverts affines de x . Montrez qu'il existe un voisinage ouvert affine de x qui est un ouvert distingué dans U et dans V . (*Commencez par choisir $f \in A$ tel que $x \in \text{Spec}(A_f) \subset \text{Spec}(B)$, puis $g \in B$ tel que $x \in \text{Spec}(B_g) \subset \text{Spec}(A_f)$.*)
- (3) Montrez que les conditions suivantes sont équivalentes : (i) x est fermé dans X , (ii) pour tout voisinage ouvert affine $U = \text{Spec}(A)$ de x , $p_x \subset A$ est un idéal maximal, (iii) il existe un voisinage ouvert affine $U = \text{Spec}(A)$ de x tel que $p_x \subset A$ est un idéal maximal. (*Montrez que (i) \iff (ii) avec (1) puis que (ii) \iff (iii) avec (2).*)

Corrigé. (1) Il suffit de montrer que si un fermé $V(I)$ contient p , alors il contient $V(p)$. Or cela signifie juste que $p \supset I$ et $q \supset p$ (q premier) implique $q \supset I$, c'est donc évident.

(2) Comme les ouverts distingués d'un schéma affine forment une base de la topologie, il est en effet possible de choisir f et g comme indiqué. On a donc des morphismes d'anneau $r : B \rightarrow A_f$ et $s : A_f \rightarrow B_g$. On voudrait que ces morphismes induisent des isomorphismes inverses l'un de l'autre entre A_f et B_g . Si on veut que r se factorise par B_g , il faut que $r(g)$ soit inversible. Pour cela il faudra localiser encore une fois. Notons $a/f^n = r(g)$, alors r induit un morphisme $r' : B_g \rightarrow A_{af}$. Par ailleurs, $s \circ r : B \rightarrow B_g$ est le morphisme canonique donc $g/1 = sr(g) = s(a)/s(f)^n$. Ainsi $s(af) = gs(f)^{n+1}$ est inversible dans B_g , donc s induit un morphisme $s' : A_{af} \rightarrow B_g$ qui est un inverse pour r' . Donc le voisinage $\text{Spec}(A_{af}) = \text{Spec}(B_g)$ répond à la question.

(3) On note pour commencer que pour une partie Z d'un espace topologique X , le calcul de l'adhérence \overline{Z} est local, c'est-à-dire que pour tout ouvert U , l'intersection de \overline{Z} avec U est égale à l'adhérence de $Z \cap U$ dans U . En effet, notons $\mathcal{F}(X)$ l'ensemble des fermés de X , on a :

$$\overline{Z} \cap U = \bigcap_{\substack{F \in \mathcal{F}(X) \\ F \supset Z}} F \cap U = \bigcap_{\substack{F \in \mathcal{F}(X) \\ F \supset Z}} \overline{F \cap U} \cap U = \bigcap_{\substack{G \in \mathcal{F}(X) \\ G \cap U \supset Z \cap U}} G \cap U = \bigcap_{\substack{H \in \mathcal{F}(U) \\ H \supset Z \cap U}} H = \text{adhérence de } Z \cap U \text{ dans } U ,$$

avec les changements d'indice $G = \overline{F \cap U}$ puis $H = G \cap U$. Donc $\{x\}$ est fermé dans X ssi pour tout ouvert affine U contenant x , $\{x\}$ est fermé dans U . Cette dernière condition s'exprime en disant que l'idéal premier qui représente x dans U est maximal, d'après la question (1). On a donc (i) \iff (ii).

Soit $U = \text{Spec}(A)$ et $V = \text{Spec}(B)$ des voisinages ouverts affines de x et $p_x \subset A$ resp. $q_x \subset B$ les idéaux premiers correspondant à x . D'après la question (2) il existe des localisés A_f et B_g qui sont isomorphes. Or il est facile de voir que pour l'inclusion $\text{Spec}(A_f) \subset \text{Spec}(A)$, un idéal premier est maximal dans A_f si et seulement s'il est maximal dans A . Donc p_x est maximal dans A ssi il est maximal dans le localisé $A_f \simeq B_g$, ssi q_x est maximal dans B . Ceci prouve que (ii) \iff (iii).

Exercice 33 *Fermés irréductibles et leurs points génériques.* On dit qu'un point x d'un espace topologique X est un *point générique* ssi l'adhérence de $\{x\}$ est X .

- (1) Soit X un schéma. Montrez que tout fermé irréductible $F \subset X$ a un et un seul point générique η_F . (Commencez par le cas $F = X = \text{Spec}(A)$. Dans le cas général, soient η_1 et η_2 deux points génériques de F . Soit U_1 un ouvert affine de X contenant η_1 , montrez que $U_1 \cap F$ contient η_2 puis que $\eta_1 = \eta_2$.)
- (2) Déduez-en que l'application $x \mapsto \overline{\{x\}}$ induit une bijection entre X et l'ensemble des fermés irréductibles de X , d'inverse l'application $F \mapsto \eta_F$.

Corrigé. (1) Si $F = X = \text{Spec}(A)$, d'après l'exercice précédent, l'adhérence de $\{p\}$ dans X est $V(p)$, donc p est un point générique si et seulement s'il est inclus dans tous les idéaux premiers de A , i.e. c'est l'unique premier minimal de A . Donc p est le nilradical de A , qui est bien premier car $F = X$ est irréductible. Dans le cas général, soient η_1, η_2 deux points génériques de F et $U_1 = \text{Spec}(A)$ ouvert affine de X contenant η_1 . Comme l'adhérence de η_2 est F tout entier, elle contient η_1 . Donc tout ouvert de F contenant η_1 contient η_2 . C'est le cas en particulier de $U_1 \cap F$, qui est un schéma affine (car c'est un fermé de U_1 affine) irréductible (car c'est un ouvert de F_1 qui est irréductible). D'après le cas particulier traité au début, il n'y a qu'un point générique dans $U_1 \cap F$ donc $\eta_1 = \eta_2$.

(2) L'application est bien définie car comme un point est irréductible, son adhérence l'est aussi. Le fait que ce soit une bijection est clair d'après (1).

Exercice 34 *Intersections ; fibres des morphismes.*

(1) Soient X un schéma et Y, Z deux sous-schémas fermés de X . On définit l'intersection $Y \cap Z$ comme étant égale au produit fibré $Y \times_X Z$. Dans le cas où X est affine, donnez l'idéal de $Y \cap Z$ en fonction de ceux de Y et Z . Donnez un exemple de deux sous-schémas fermés réduits qui ont une intersection non réduite.

(2) Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de schémas. Soit $y \in Y$, vu comme un morphisme $\text{Spec}(k(y)) \rightarrow Y$. On définit la fibre de f en y , notée $f^{-1}(y)$, comme étant égale au produit fibré $X \times_Y \text{Spec}(k(y))$. Dans le cas où X et Y sont affines, dites quel est le schéma $f^{-1}(y)$. Donnez un exemple de morphisme entre deux schémas réduits ayant une fibre non réduite.

Corrigé. (1) Si $X = \text{Spec}(A)$, $Y = V(I)$, $Z = V(J)$, alors $Y \cap Z = V(I + J)$. (Détail : si $W = Y \times_X Z$ est un sous-schéma fermé de X qui est un produit fibré dans la catégorie des schémas, alors en particulier c'est un produit fibré dans la sous-catégorie des schémas affines. Alors $W = \text{Spec}(B)$ tel que B est une somme amalgamée de A/I et A/J au-dessus de A dans la catégorie des anneaux. On sait que cette somme est $B = A/I \otimes_A A/J \simeq A/(I + J)$.) Un exemple d'intersection non réduite de sous-schémas fermés réduits : dans $X = \mathbb{A}_k^2$, on prend pour Y la parabole $y = x^2$ et pour Z la droite $y = 0$. L'intersection est le sous-schéma fermé $x^2 = 0$.

(2) Si $X = \text{Spec}(A)$ et $Y = \text{Spec}(B)$ alors y correspond à un idéal premier $q \subset B$ et $k(y) = B_q/qB_q$. Alors $f^{-1}(y) = \text{Spec}(A \otimes_B k(y))$. Par exemple, considérons la parabole $X = \{y = x^2\}$ et la droite $Y = \{x = 0\}$, dans le plan affine. On va regarder la fibre en $0 \in Y$ de la projection $f : X \rightarrow Y$ définie par $f(x, y) = y$. En termes de schémas, $X = \text{Spec}(k[x, y]/(y - x^2))$, $Y = \text{Spec}(k[y])$, et f est induit par le morphisme d'anneaux $k[y] \rightarrow k[x, y]/(y - x^2)$, $y \mapsto y$. Le point $0 \in Y$ correspond à $\text{Spec}(k) \rightarrow Y$ induit par le morphisme d'anneaux $k[y] \rightarrow k$, $y \mapsto 0$, c'est-à-dire, c'est le quotient par l'idéal $I = (y)$. Notons $A = k[x, y]/(y - x^2)$. On a $A \otimes_{k[y]} k = A/yA = k[x]/x^2$ et donc la fibre $f^{-1}(0) = \text{Spec}(k[x]/x^2)$ est non réduite.

Exercice 35 *Morphismes finis.* On dit qu'un morphisme de schémas $f : Y \rightarrow X$ est fini s'il existe un recouvrement de X par des ouverts affines $U_i = \text{Spec}(A_i)$ tels que $V_i = f^{-1}(U_i)$ est affine égal à $\text{Spec}(B_i)$, et B_i est un A_i -module fini. Montrez qu'un morphisme fini est fermé. (Indication : utiliser le théorème de Cohen-Seidenberg rappelé ci-dessous.)

Rappel : Théorème de Cohen-Seidenberg Soit $A \subset B$ une extension d'anneaux tel que B est entier sur A , c'est-à-dire, tout élément de B satisfait une équation polynomiale unitaire à coefficients dans A . (C'est le cas par exemple si B est un A -module fini.) Alors pour tout idéal premier $p \subset A$, il existe un idéal premier $q \subset B$ tel que $q \cap A = p$.

Corrigé. Soit $F \subset Y$ fermé, il faut vérifier que $f(F)$ est fermé. Comme $X_{\text{réd}} \hookrightarrow X$ est un homéomorphisme on peut supposer X, Y et F réduits. Or $f(F)$ est fermé si et seulement si $f(F) \cap U_i = f(F \cap V_i)$ est fermé

dans U_i , pour tout i . Ceci nous ramène au cas où X et Y sont affines, $X = \text{Spec}(A)$ et $Y = \text{Spec}(B)$, donc $F = \text{Spec}(B/J)$. On peut remplacer X par l'adhérence schématique de f , ce qui nous ramène au cas où f est (schématiquement) dominant, c'est-à-dire $A \rightarrow B$ est injectif. Alors d'après le théorème de Cohen-Seidenberg, $f(F) = \{q \cap A, q \supset J\} = V(J \cap A)$.

Exercice 36 *Homéomorphisme n'est pas isomorphisme.* Soit $X \subset \mathbb{A}_k^2$ la courbe d'équation $y^2 = x^3$ et $f : \mathbb{A}_k^1 \rightarrow X$ le morphisme défini par $f(t) = (t^2, t^3)$. Montrez que f est un homéomorphisme mais n'est pas un isomorphisme.

Corrigé. Le résultat est vrai aussi bien si l'on considère les variétés au sens classique, avec seulement des points fermés, ou au sens des schémas. Montrons d'abord que f est une bijection. Soit $U = \mathbb{A}_k^1 \setminus \{0\}$, on sait que $f|_U : U \rightarrow f(U)$ est un isomorphisme. Il reste à regarder la fibre de f en $p = (0, 0) \in X$. Si on considère les variétés au sens classique, la fibre est l'ensemble $\{0\} \in \mathbb{A}_k^1$. Si on considère les variétés comme des schémas, notons $A = k[x, y]/(y^2 - x^3)$, le morphisme d'anneaux correspondant à f est $A \rightarrow k[t]$, $x \mapsto t^2$, $y \mapsto t^3$. Le corps résiduel de p est $A/(x, y) = k$. Donc la fibre a pour anneau de fonctions $k[t] \otimes_A k = k[t]/(x, y)k[t] = k[t]/(t^2, t^3)k[t] = k[t]/t^2$. Dans tous les cas, l'espace sous-jacent à la fibre est un point. Donc f est bijective. De plus f est continue, et pour voir que sa réciproque est continue il suffit de voir que f est fermé, ce qui découle du fait que f est fini (en effet l'image de $A \rightarrow k[t]$ est $k[t^2, t^3]$ donc $k[t]$ est engendré comme A -module par 1 et t). Donc f est un homéomorphisme.

Pour voir que f n'est pas un isomorphisme on peut donner plusieurs arguments. D'abord on peut dire que si f était un isomorphisme, les restrictions sur les fibres seraient des isomorphismes, or on a calculé que la fibre en $p = (0, 0)$ est $\text{Spec}(k[t]/t^2)$. Un autre argument est de dire que \mathbb{A}_k^1 est lisse alors que X est singulier en p . Un troisième argument est que si f était un isomorphisme alors le morphisme d'anneaux de fonctions $A \rightarrow k[t]$ serait un isomorphisme, or il n'est pas surjectif (t n'est pas dans l'image).

Exercice 37 *Dimension d'un diviseur de Cartier.* Soit A un anneau noethérien et $f \in A$ un élément non inversible et non diviseur de 0. Dans cet exercice on démontre que $\dim(A/f) \leq \dim(A) - 1$, où la dimension est définie comme étant le sup des longueurs de chaînes d'idéaux premiers de A .

(N.B. on peut montrer que si de plus A est local, ou intègre, alors $\dim(A/f) = \dim(A) - 1$. C'est une conséquence du théorème de l'idéal principal de Krull (*Hauptidealsatz*), voir par exemple D. EISENBUD, Commutative algebra with a view toward algebraic geometry, Springer, chapitre 10.)

(1) Soit $p \subset R$ un idéal premier d'un anneau noethérien. Montrez que la dimension du localisé R_p est égale au sup des longueurs de chaînes d'idéaux premiers qui se terminent en p , c'est-à-dire $p_0 \subsetneq p_1 \subsetneq \dots \subsetneq p_r = p$. (Ce nombre est appelé la *hauteur* de p et noté $\text{ht}(p)$.)

(2) Soit $m = \dim(A/f)$, soit $\bar{p}_0 \subsetneq \bar{p}_1 \subsetneq \dots \subsetneq \bar{p}_m$ une chaîne de premiers de longueur maximale dans A/f , et $p_0 \subsetneq p_1 \subsetneq \dots \subsetneq p_m$ les relevés dans A . Démontrez que p_0 n'est pas un premier minimal, en utilisant la question (1) et le théorème de structure des anneaux noethériens de dimension 0 : *un anneau noethérien de dimension 0 est produit direct d'un nombre fini d'anneaux locaux dont l'idéal maximal est nilpotent*. Concluez.

Corrigé. (1) C'est une propriété générale des localisés : soit $S \subset R$ une partie multiplicative, on a une bijection $\{q \in \text{Spec}(R), q \cap S = \emptyset\} \rightarrow \text{Spec}(S^{-1}R)$ donnée par $q \mapsto S^{-1}q$ et son inverse est $q' \mapsto q' \cap R$. Cette bijection préserve les inclusions et donc envoie une chaîne d'idéaux premiers sur une chaîne d'idéaux premiers. Si $S = R \setminus p$ pour un premier p , alors les premiers q tels que $q \cap S = \emptyset$ sont les premiers inclus dans p , d'où le résultat annoncé.

(2) Si p_0 est un premier minimal, d'après la question (1), le localisé A_{p_0} est de dimension 0. Or le théorème de structure des anneaux noethériens de dimension 0 (ou anneaux *artinien*s) implique facilement que dans un tel anneau, tout élément est soit diviseur de zéro, soit inversible. On a $f \in p_0$, donc son image dans A_{p_0} est dans l'idéal maximal $p_0 A_{p_0}$ et donc non inversible. L'image de f n'est pas non plus diviseur de zéro car $fa/s = 0$, avec $a \in A$ et $s \notin p_0$, signifie qu'il existe $t \notin p_0$ tel que $tfa = 0$ dans A , donc $ta = 0$ car f ne divise pas zéro, donc $a/s = 0$ dans A_{p_0} . Ainsi p_0 n'est pas un premier minimal, donc il contient un idéal premier p' , ce qui fournit une chaîne $p' \subsetneq p_0 \subsetneq p_1 \subsetneq \dots \subsetneq p_m$. Donc $m + 1 \leq \dim(A)$, c'est le résultat annoncé.

Remarque. Le résultat véritablement intéressant est celui mentionné ci-dessus : si A est un anneau local noethérien et $f \in A$ n'est ni inversible ni diviseur de 0, alors $\dim(A/f) = \dim(A) - 1$. Le sous-schéma correspondant $V(f) \subset \text{Spec}(A)$ est ce qu'on appelle un *diviseur de Cartier*.

Exercice 38 Calculez la dimension des sous-schémas suivants de $\mathbb{A}_k^4 = \text{Spec}(k[r, s, t, u])$:

- (1) X défini par les équations $rt = s^2$ et $ru = st$,
- (2) Y défini par les équations $rt = s^2$, $ru = st$, et $su = t^2$.

Corrigé. (1) Il est facile de voir que $rt - s^2$ est irréductible dans $k[r, s, t, u]$ (qui est factoriel) donc il définit un idéal premier. Posons $A = k[r, s, t, u]/(rt - s^2)$. D'après l'exercice précédent on a $\dim(A) = 4 - 1 = 3$. Comme $ru - st$ est non nul dans A , il est non diviseur de 0 donc en appliquant encore l'exercice précédent on trouve que la dimension de $k[r, s, t, u]/(rt - s^2, ru - st)$ est 2.

(2) On ne peut pas continuer selon le même procédé, car on s'aperçoit que $su - t^2$ est diviseur de 0 dans $k[r, s, t, u]/(rt - s^2, ru - st)$. En fait il est même nilpotent, de carré nul (vérifiez-le), comme on l'a vu dans l'exercice sur la cubique gauche : les équations sont celles de la cubique gauche (en version non projective). Or c'est un fait général (et plus ou moins évident) que $\dim(A) = \dim(A_{\text{réd}})$. Donc la dimension de $k[r, s, t, u]/(rt - s^2, ru - st, su - t^2)$ est la même que $k[r, s, t, u]/(rt - s^2, ru - st)$ c'est-à-dire 2.

Exercice 39 *L'anneau local d'un point.* Étant donnés deux points x, y d'un espace topologique X , on dit que x est une *générisation* de y , ou que y est une *spécialisation* de x , si $y \in \overline{\{x\}}$.

(1) Soit X un schéma et $x \in X$ un point. On définit le *schéma local* de X en x par $X_x = \text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$. Rappelez la définition de $\mathcal{O}_{X,x}$ et montrez que l'ensemble sous-jacent à X_x s'identifie à l'ensemble des générisations de x .

(2) Soit k un corps, X un k -schéma de type fini, $x \in X$ un point. Montrez que si x est isolé alors $\mathcal{O}_{X,x}$ est de type fini sur k . Réciproquement, montrez que si $\mathcal{O}_{X,x}$ est de type fini alors $X_x = \text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$ est un point. Concluez à l'aide de (1) que x est isolé dans X .

(3) Montrez que le résultat de (2) est faux si on ne suppose pas que k est un corps.

Remarque. Lors du TD j'ai confondu deux notions qui sont en fait différentes :

- la notion de *point isolé* d'un espace topologique X , i.e. un point qui est *ouvert* dans X ,
- la notion de point égal à sa composante connexe, i.e. un point qui est *ouvert et fermé* dans X .

Si un point est égal à sa composante connexe alors il est isolé, mais la réciproque n'est pas vraie, comme le montre le contre-exemple donné dans la question (3) ci-dessous. Pour ce qui concerne la question (2) de l'exercice, on a en fait l'énoncé fort : dans un schéma de type fini X sur un corps k , l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$ est de type fini sur k si et seulement si x est égal à sa composante connexe. Le corrigé ci-dessous le montre.

Corrigé. (1) Par définition $\mathcal{O}_{X,x}$ est la limite inductive du système inductif d'anneaux $(\mathcal{O}_X(U), \text{res}_{V,U} : \mathcal{O}_X(V) \rightarrow \mathcal{O}_X(U))$. En termes plus concrets, un élément de $\mathcal{O}_{X,x}$ est une classe d'équivalence de couples (U, s) avec $s \in \mathcal{O}_X(U)$, pour la relation : $(U, s) \sim (V, t)$ ssi il existe $W \subset U \cap V$ tel que $s|_W = t|_W$ (je note $s|_W$ au lieu de $\text{res}_{U,W}(s)$). *Ce qu'il est important de savoir c'est que pour tout ouvert affine $U = \text{Spec}(A)$ contenant x , on a une identification naturelle $\mathcal{O}_{X,x} \simeq A_p$ (avec $p \subset A$ l'idéal premier correspondant à x). On sait que le spectre de A_p s'identifie à l'ensemble des premiers $q \subset A$ contenus dans p . Ceci n'est autre que l'ensemble des q tels que $p \in V(q) = \overline{\{q\}}$ (voir l'exercice sur les points fermés), c'est-à-dire l'ensemble des générisations de x .*

(2) Si x est isolé alors $\{x\}$ est ouvert dans X ; donc il contient un ouvert affine non vide $U = \text{Spec}(A)$, avec A de type fini, et donc $\{x\} = U = \text{Spec}(A)$ est affine. Par ailleurs $\{x\}$ ne contient qu'un point fermé donc le calcul de l'anneau local donne $A = \mathcal{O}_{X,x}$, qui est donc de type fini.

Réciproquement, si $\mathcal{O}_{X,x}$ est de type fini alors X_x est un k -schéma de type fini donc l'ensemble de ses points fermés est dense. Or X_x n'a qu'un point fermé : x , donc l'adhérence de l'ensemble de ses points fermés est $\{x\}$. Comme l'ensemble sous-jacent à X_x est l'ensemble des générisations de x , en particulier les points génériques des composantes irréductibles de X contenant x sont tous égaux à x . Or la réunion des composantes irréductibles contenant x est égale à la composante connexe de x , donc x est égal à sa propre composante connexe dans X (et en particulier x est isolé dans X).

(3) Nous allons donc donner deux contre-exemples, les deux avec le même anneau de base. Remplaçons le corps k par un anneau de valuation discrète R . Notons K le corps des fractions et π une uniformisante. Soit $X = \text{Spec}(R)$ qui est de type fini sur R (!!). Ce schéma a deux points, un point fermé et un point ouvert (le point générique). Si on prend pour x le point fermé, on a $\mathcal{O}_{X,x} = R$ qui est de type fini, mais x n'est pas ouvert (i.e. n'est pas isolé). Si on prend pour x le point générique, on $\mathcal{O}_{X,x} = K = R[1/\pi]$ est de type fini sur R (engendré par $1/\pi$). Ce point est isolé dans X , mais x n'est pas une composante connexe de X .

Exercice 40 *Schéma réduit.* Soit X un schéma.

(1) Montrez que les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) pour tout ouvert affine $U = \text{Spec}(A)$ de X , A est un anneau réduit,
- (ii) il existe un recouvrement ouvert affine $U_i = \text{Spec}(A_i)$ de X , tel que A_i est réduit pour tout i ,
- (iii) tous les anneaux locaux de X sont réduits.

(2) Énoncez la propriété universelle du schéma réduit $X_{\text{réd}}$ et démontrez-la.

Corrigé. (1) Je ne donne pas de détails ; l'idée est que le nilradical est inclus dans tous les idéaux premiers, donc lorsqu'on localise A en un idéal premier, il y a "autant" de nilpotents dans A que dans A_p (il n'y en a pas dans le noyau de $A \rightarrow A_p$).

(2) On a une immersion fermée canonique $i : X_{\text{réd}} \hookrightarrow X$. La propriété universelle de $X_{\text{réd}}$ est : pour tout schéma réduit Y et tout morphisme $f : Y \rightarrow X$, il existe un unique morphisme $f' : Y \rightarrow X_{\text{réd}}$ tel que $f = i \circ f'$. Démontrons-la.

Soit un schéma réduit Y et un morphisme $f : Y \rightarrow X$. Pour tous ouverts affines $U = \text{Spec}(A) \subset X$ et $V = \text{Spec}(B) \subset f^{-1}(U)$, le morphisme $f|_V : V \rightarrow U$ est donné par un morphisme d'anneaux $A \rightarrow B$. Comme B est réduit, l'image du nilradical de A est nulle donc $A \rightarrow B$ se factorise de manière unique en un morphisme d'anneaux $A_{\text{réd}} \rightarrow B$. Ceci induit un morphisme $V \rightarrow U_{\text{réd}}$. Par unicité, les différents morphismes ainsi construits sur des $V \subset f^{-1}(U)$ variables se recollent en un morphisme $f^{-1}(U) \rightarrow U_{\text{réd}}$. Par unicité encore, ces morphismes se recollent en un morphisme $f' : Y \rightarrow X_{\text{réd}}$, unique.

Exercice 41 *Exemple d'utilisation du point générique.* Soit k un anneau. Donnez une structure de schéma naturelle à l'ensemble des matrices de taille (n, n) sur k . Démontrez que la matrice correspondant au point générique de ce schéma est semi-simple. Déduisez-en une démonstration du théorème de Cayley-Hamilton.

Corrigé. Une matrice de taille (n, n) , c'est la donnée de n^2 coefficients dans k , c'est-à-dire un point à coordonnées dans k de l'espace affine $\mathbb{A}_k^{n^2}$. On peut même dire plus, ce qui va préciser le sens du mot "naturellement". Notons $k[T_{i,j}, 1 \leq i, j \leq n]$ ou plus simplement $k[T_{i,j}]$ l'anneau de polynômes en n^2 variables, alors on a des bijections :

$$\begin{aligned} \{ \text{Matrices de taille } (n, n) \text{ à coefs. dans } k \} &\simeq \text{Hom}_{k\text{-Alg}}(k[T_{i,j}], k) \\ &\simeq \text{Hom}_{k\text{-Sch}}(\text{Spec}(k), \text{Spec}(k[T_{i,j}])) \\ &\simeq \text{Hom}_{k\text{-Sch}}(\text{Spec}(k), \mathbb{A}_k^{n^2}). \end{aligned}$$

Ceci est même vrai après toute extension R/k , c'est-à-dire que

$$\{ \text{Matrices de taille } (n, n) \text{ à coefs. dans } R \} \simeq \text{Hom}_{R\text{-Sch}}(\text{Spec}(R), \mathbb{A}_R^{n^2}),$$

et les bijections obtenues sont fonctorielles en R . Ainsi les matrices de taille (n, n) à coefficients dans R sont naturellement (fonctoriellement) en bijection avec les R -points de $\mathbb{A}_k^{n^2}$.

Le point générique est le point correspondant à l'idéal $0 \in k[T_{i,j}]$. Son anneau local est le corps de fractions $k(T_{i,j})$, c'est un corps et donc il est égal à son corps résiduel. La matrice correspondant au point générique est celle donnée par le morphisme $\text{Spec}(k(T_{i,j})) \rightarrow \mathbb{A}_k^{n^2}$. Ce morphisme est décrit par l'inclusion d'anneaux $k[T_{i,j}] \rightarrow k(T_{i,j})$, autrement dit l'image de $T_{i,j}$ est $T_{i,j}$ lui-même, donc la composante (i, j) de la matrice générique est $T_{i,j}$. Pour voir que cette matrice est semi-simple (c'est-à-dire, diagonalisable dans une clôture

algébrique de $k(T_{i,j})$) il suffit de montrer que son polynôme caractéristique P est séparable, c'est-à-dire que son discriminant est non nul. Or si on spécialise $T_{i,j} := 0$ si $i \neq j$, on trouve

$$\text{disc}(P)|_{i \neq j \Rightarrow T_{i,j}=0} = \prod_{i,j} (T_{i,i} - T_{j,j}) \neq 0,$$

donc a fortiori $\text{disc}(P) \neq 0$. Donc cette matrice est bien semi-simple.

Déduisons-en une démonstration du théorème de Cayley-Hamilton. Notons P_A le polynôme de Cayley-Hamilton d'une matrice A . Il est clair que $P_A(A) = 0$ si A est diagonale, et aussi si A est diagonalisable (multiplier à droite par P et à gauche par P^{-1}). C'est donc vrai aussi pour la matrice générique, car elle est diagonalisable dans un surcorps de $k(T_{i,j})$, or pour vérifier que $P_A(A) = 0$ on peut le vérifier dans un surcorps. Pour conclure, on dit que le lieu des matrices A telles que $P_A(A) = 0$ est un fermé de $\mathbb{A}_k^{n^2}$, et comme il contient le point générique, c'est $\mathbb{A}_k^{n^2}$ tout entier.

Exercice 42 Soit A un anneau et S, T des parties multiplicatives. On suppose que les morphismes canoniques $A \rightarrow S^{-1}(A)$ et $A \rightarrow T^{-1}A$ se complètent en un triangle commutatif avec $f : S^{-1}A \rightarrow T^{-1}A$. Que peut-on dire de S et T ? Et si f est un isomorphisme?

Corrigé. ...

Exercice 43 Montrez que tout schéma affine est quasi-compact, c'est-à-dire que de tout recouvrement ouvert on peut extraire un sous-recouvrement fini.

Corrigé. Soit \mathcal{U} un recouvrement ouvert de $\text{Spec}(A)$, on peut le raffiner en un recouvrement ne contenant que des ouverts distingués $D(f_i)$, $i \in I$. Considérons l'idéal M de A engendré par les f_i , $i \in I$. Si $M \neq A$ il est inclus dans un idéal maximal m , or par hypothèse m est dans l'un des $D(f_i)$, c'est-à-dire $f_i \notin m$, contradiction. Donc $M = A$. En particulier $1 \in M$ donc il existe une écriture $1 = a_1 f_1 + \dots + a_n f_n$. On vérifie que $D(f_1), \dots, D(f_n)$ recouvrent $\text{Spec}(A)$.

Rappel : Soit X une variété sur un corps k . Un \mathcal{O}_X -module localement libre de rang 1 est aussi appelé \mathcal{O}_X -module inversible, ou fibré en droites. Si \mathcal{L} est un fibré en droites, le fibré $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}, \mathcal{O}_X)$ est encore un fibré en droites noté \mathcal{L}^* ou \mathcal{L}^{-1} et appelé l'inverse de \mathcal{L} . Le groupe de Picard de X est l'ensemble des classes d'isomorphisme de fibrés en droites sur X , muni du produit induit par le produit tensoriel.

Exercice 44 Groupe de Picard de l'espace affine. Soit k un corps et soit \mathcal{L} un fibré en droites sur \mathbb{A}_k^n .

- (1) Justifier que \mathcal{L} possède une section non nulle σ .
- (2) Soit $\text{ev}_\sigma : \mathcal{L}^* \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{A}_k^n}$, $u \mapsto u(\sigma)$ le morphisme d'évaluation, \mathcal{I} le faisceau image, $I = \Gamma(\mathbb{A}_k^n, \mathcal{I})$. En écrivant la propriété de faisceau pour un recouvrement bien choisi de \mathbb{A}_k^n , montrez que I est principal.
- (3) Soit P un générateur de I , montrez que σ/P est une section partout non nulle de \mathcal{L} (ce qui veut dire non nulle dans chaque corps résiduel $k(x)$).
- (4) En utilisant le lemme de Nakayama rappelé ci-dessous, déduisez-en que $\text{Pic}(\mathbb{A}_k^n) = 0$.

Rappel : Théorème (Lemme de Nakayama) Soit A un anneau et $I \subset A$ un idéal. Soit M un A -module fini. Si $M = IM$, alors il existe $a \in A$ avec $a \equiv 1 \pmod{I}$, tel que $aM = 0$. En particulier, si A est local d'idéal maximal m , alors $M = mM$ implique $M = 0$.

Corrigé. On notera $X = \mathbb{A}_k^n$ et $A = k[x_1, \dots, x_n]$.

- (1) Comme \mathbb{A}_k^n est affine, \mathcal{L} est de la forme \tilde{M} pour un certain A -module M . Clairement $M \neq 0$, donc il existe $m \neq 0$ dans M , qui donne une section non nulle σ de \mathcal{L} .
- (2) Il existe un recouvrement de \mathbb{A}_k^n par n ouverts $U_i = D(f_i)$ tels que $\mathcal{L}|_{U_i}$ est engendré par une section t_i , donc $\mathcal{L}^*|_{U_i}$ est engendré par une section : la forme δ_i telle que $\delta_i(t_i) = 1$. Donc $\mathcal{I}|_{U_i}$ est engendré par $\text{ev}_\sigma(\delta_i)$. La propriété de faisceau pour \mathcal{I} pour ce recouvrement peut s'écrire :

$$\mathcal{I}(X) \rightarrow \prod_i \mathcal{I}(U_i) \rightrightarrows \prod_{i,j} \mathcal{I}(U_i \cap U_j)$$

et $\mathcal{I}(X) = I$, $\mathcal{I}(U_i) = IA[1/f_i]$. Comme tous les $IA[1/f_i]$ sont inclus dans le corps de fractions de A , on obtient finalement :

$$I = IA[1/f_1] \cap \cdots \cap IA[1/f_n].$$

On utilise maintenant le fait que A est factoriel et que donc une intersection d'idéaux principaux est un idéal principal. Plus précisément on choisit un générateur g_i de $IA[1/f_i]$ qui soit dans A , non divisible par f_i . On note g le ppcm des g_i . Alors

$$I = IA[1/f_1] \cap \cdots \cap IA[1/f_n] = (IA[1/f_1] \cap A) \cap \cdots \cap (IA[1/f_n] \cap A) = g_1A \cap \cdots \cap g_nA = gA.$$

(3) Par définition de l'image d'un morphisme de faisceaux, le morphisme $\text{ev}_\sigma : \mathcal{L}^* \rightarrow \mathcal{O}_X$ se factorise par $P\mathcal{O}_X$ (1). Donc il existe un morphisme $t : \mathcal{L}^* \rightarrow \mathcal{O}_X$, tel que $\text{ev}_\sigma = Pt$. Par bidualité $((\mathcal{L}^*)^* \simeq \mathcal{L})$, ce morphisme définit une section τ de \mathcal{L} telle que $t = \text{ev}_\tau$. Il est clair que $P\tau = \sigma$. De plus, en tout point $x \in X$, l'image de $(\text{ev}_\sigma) \otimes \mathcal{O}_{X,x}$ est $P_x\mathcal{O}_{X,x}$, donc l'image de $(\text{ev}_\tau) \otimes \mathcal{O}_{X,x}$ est $\mathcal{O}_{X,x}$, donc l'image de $(\text{ev}_\tau) \otimes k(x)$ est $k(x)$. En particulier $\tau \otimes k(x) \neq 0$.

(4) On définit un morphisme $a : \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{L}$ par $1 \mapsto \tau$. Comme $\tau \otimes k(x)$ est surjectif pour tout $x \in X$, par Nakayama $a \otimes \mathcal{O}_{X,x}$ est surjectif donc un isomorphisme (morphisme surjectif entre deux modules libres de même rang), donc a est un isomorphisme.

Remarque. La même preuve que ci-dessus montre en fait que pour tout schéma affine $X = \text{Spec}(A)$ avec A factoriel, le groupe de Picard de X est trivial.

Exercice 45 *Groupe de Picard de l'espace projectif.* Soit k un corps et soit \mathcal{L} un fibré en droites sur $\mathbb{P}_k^n = \text{Proj}(k[x_0, \dots, x_n])$.

(1) En utilisant l'exercice précédent, montrez que \mathcal{L} est trivial sur les ouverts standard U_i de \mathbb{P}_k^n .

(2) Montrez que les fonctions inversibles sur $U_i \cap U_j$ sont de la forme $\alpha_{ij}(x_i/x_j)^{l_{ij}}$ avec $\alpha_{ij} \in k^*$ et $l_{ij} \in \mathbb{Z}$.

(3) À partir de trivialisations de \mathcal{L} sur U_i , utilisez la condition de cocycle pour montrer que la puissance l_{ij} dans le changement de carte est indépendante de (i, j) . Admettant que $H^1(\mathbb{P}_k^n, k^*) = 0$, où k^\times est le faisceau constant sur \mathbb{P}_k^n , montrer qu'on peut changer les trivialisations initiales pour se ramener à $\alpha_{ij} = 1$.

(4) En déduire que $\mathcal{L} \simeq \mathcal{O}(l)$ pour un $l \in \mathbb{Z}$ puis que $\text{Pic}(\mathbb{P}_k^n) \simeq \mathbb{Z}$.

Corrigé. (1) $U_i \simeq \mathbb{A}_k^n$ donc il existe un isomorphisme $c_i : \mathcal{L}|_{U_i} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{U_i}$.

(2) L'anneau de fonctions de $U_i \cap U_j$ est $k[x_0, \dots, x_n, \frac{1}{x_i}, \frac{1}{x_j}]_{(0)}$, anneau des éléments de degré 0 dans $k[x_0, \dots, x_n, \frac{1}{x_i}, \frac{1}{x_j}]$. Ses unités sont donc les fractions rationnelles de degré 0 dont le numérateur et le dénominateur ont pour seuls facteurs x_i et x_j . D'où le résultat.

(3) Posons $U_{ij} = U_i \cap U_j$ et $U_{ijk} = U_i \cap U_j \cap U_k$. On reprend les trivialisations $c_i : \mathcal{L}|_{U_i} \rightarrow \mathcal{O}_{U_i}$ et on note les changements de cartes

$$\varphi_{ij} = (c_j|_{U_{ij}}) \circ (c_i|_{U_{ij}})^{-1} : \mathcal{O}_{U_i|U_{ij}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{U_j|U_{ij}}.$$

On note qu'un tel isomorphisme est simplement donné par une section inversible de $\mathcal{O}_{U_{ij}}$, donc d'après la question (2) on a $\varphi_{ij} = \alpha_{ij}(x_i/x_j)^{l_{ij}}$. La condition de cocycle est la compatibilité $\varphi_{ik} = \varphi_{jk}\varphi_{ij}$ sur les intersections triples U_{ijk} , ce qui donne

$$\alpha_{ik}(x_i/x_k)^{l_{ik}} = \alpha_{jk}(x_j/x_k)^{l_{jk}}\alpha_{ij}(x_i/x_j)^{l_{ij}} = \alpha_{jk}\alpha_{ij}(x_j/x_k)^{l_{jk}}(x_i/x_j)^{l_{ij}}.$$

L'égalité des degrés en x_i impose $l_{ik} = l_{ij}$ donc l_{ij} est indépendant de j . L'égalité des degrés en x_k impose $l_{ik} = l_{jk}$ donc l_{ij} est indépendant de i . Finalement $l_{ij} = l$ indépendant de i et j . Enfin, comme $H^1(\mathbb{P}_k^n, k^*) = 0$, il existe des constantes $\beta_i \in k^*$ telles que $\alpha_{ij} = \beta_i/\beta_j$. Alors on voit que si on pose $c'_i = c_i/\beta_i$ on a des changements de cartes $\varphi'_{ij} = \alpha_{ij}^{-1}\varphi_{ij} = (x_i/x_j)^{l_{ij}}$. (4) Les trivialisations

1. Attention : je rappelle que pour un morphisme de faisceaux $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$, le préfaisceau \mathcal{H} défini par $\mathcal{H}(U) = \text{im}(f(U))$ n'est pas un faisceau en général. Le faisceau image de f est le faisceau associé : $\text{im}(f) := \mathcal{H}^+$. On a une factorisation de f par \mathcal{H}^+ mais il n'est pas vrai en général que $\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{H}^+(U)$ est surjectif. En revanche l'inclusion $\mathcal{H} \otimes \mathcal{O}_{X,x} \simeq \mathcal{H}^+ \otimes \mathcal{O}_{X,x}$ pour tout $x \in X$, donc $\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_{X,x} \rightarrow \mathcal{H}^+ \otimes \mathcal{O}_{X,x}$ est surjectif pour tout $x \in X$.

Exercice 46 *Éclatement d'un sous-schéma fermé* $Y \subset X$. Soit k un corps et X un k -schéma de type fini, supposé réduit pour simplifier. Soit $Y \subset X$ un sous-schéma fermé. L'éclatement de Y dans X est un morphisme $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ défini comme suit. On choisit des sections f_1, \dots, f_n du faisceau d'idéaux de Y sur un ouvert dense $U \subset X$, définissant un morphisme

$$f : U \setminus U \cap Y \rightarrow \mathbb{P}_k^{n-1} \\ x \mapsto (f_1(x) : \dots : f_n(x)).$$

Le graphe de f est le morphisme $\Gamma_f : U \setminus U \cap Y \rightarrow U \setminus U \cap Y \times \mathbb{P}_k^{n-1} \subset X \times \mathbb{P}_k^{n-1}$ et on note \tilde{X} l'image schématique de Γ_f dans $X \times \mathbb{P}_k^{n-1}$. Le morphisme $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ est la projection sur le premier facteur. On admet que l'éclatement est indépendant du choix de U et de f_1, \dots, f_n .

- (1) Justifiez que $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ est un isomorphisme au-dessus de $X \setminus Y$.
- (2) Calculez l'éclatement de l'origine dans \mathbb{A}_k^n , en regardant \mathbb{A}_k^n comme une variété au sens classique ou au sens des schémas, selon votre préférence. Donnez des équations globales pour l'éclatement dans $\mathbb{A}_k^n \times \mathbb{P}_k^{n-1}$. Calculez la fibre au-dessus de l'origine (on suppose que la caractéristique de k n'est pas 2).
- (3) Calculez l'éclatement de la courbe affine C d'équation $y^2 = x^2(x+1)$ en l'origine, en donnant deux cartes affines. Calculez la fibre au-dessus de l'origine.
- (4) On considère la complétée projective $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}_k^2$ de la courbe précédente. Donnez un plongement projectif de l'éclatement de \mathcal{C} en l'origine, avec des équations homogènes explicites, sans chercher à prouver qu'elles engendrent bien l'idéal homogène de \mathcal{C} .

Corrigé. (1) Il suffit de démontrer que π est un isomorphisme au-dessus d'un voisinage de tout point $x \in X \setminus Y$. Comme π ne dépend pas du choix de U et de f_1, \dots, f_n on peut choisir pour U un voisinage de x disjoint de Y . L'application Γ_f est bien définie partout sur U et réalise une immersion fermée $U \hookrightarrow U \times \mathbb{P}_k^{n-1}$, l'image étant définie en coordonnées $(x, p) \in U \times \mathbb{P}_k^{n-1}$ par $f(x) = p$. Donc l'image schématique est isomorphe à U et Γ_f est un isomorphisme au-dessus de U .

(2) L'origine de \mathbb{A}_k^n est définie par l'idéal maximal (x_1, \dots, x_n) . Il y a plusieurs façons de « calculer » l'éclatement.

Donnons d'abord des équations pour l'éclatement dans chaque ouvert standard de \mathbb{P}_k^n . Plus précisément, notons $(u_1 : \dots : u_n)$ des coordonnées homogènes dans \mathbb{P}_k^{n-1} , $U_i = \{u_i \neq 0\}$ l'ouvert standard. On peut choisir un ouvert judicieux de \mathbb{A}_k^n : prenons $V_i = \{x_i \neq 0\}$. On voit que le morphisme $\Gamma : V_i \rightarrow \mathbb{A}_k^n \times U_i$ se factorise par $V_i \times U_i$, et il est donné par $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_n, \frac{u_1}{x_i} = \frac{x_1}{x_i}, \dots, \frac{u_n}{x_i} = \frac{x_n}{x_i})$. Sur les anneaux de fonctions cela donne :

$$k \left[x_1, \dots, x_n, \frac{u_1}{u_i}, \dots, \frac{u_n}{u_i} \right] \rightarrow k \left[x_1, \dots, x_n, \frac{1}{x_i} \right] \\ \begin{array}{l} x_k \mapsto x_k \\ \frac{u_k}{u_i} \mapsto \frac{x_k}{x_i} \end{array}.$$

Le noyau est engendré par les $x_k - (u_k/u_i)x_i$, ce qui donne des équations pour l'éclatement dans $\mathbb{A}_k^n \times U_i$.

Pour donner des équations globales dans $\mathbb{A}_k^n \times \mathbb{P}_k^{n-1}$, il faut donner des équations en $x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_n$ qui soient homogènes en u_1, \dots, u_n . Il est clair d'après ce qui précède que les équations sont $x_k u_i = x_i u_k$, pour tous i, k .

Pour la fibre au-dessus de l'origine, tous les x_k sont nuls et les équations sont toutes satisfaites ; donc $\pi^{-1}(\{0\}) = \{0\} \times \mathbb{P}_k^{n-1}$.

(2) Soit $f = y^2 - x^2(x+1)$ et $A = k[x, y]/(f)$. On éclate le point O d'idéal (x, y) , l'ouvert $C \setminus \{O\}$ est affine d'anneau $A[1/x]$. L'éclatement est un sous-schéma de $C \times \mathbb{P}_k^1$ que l'on recouvre à l'aide des deux cartes standard de \mathbb{P}_k^1 . Soient $(u : v)$ des coordonnées homogènes de \mathbb{P}_k^1 . Dans la carte $\{u \neq 0\}$ on prend la coordonnée affine $s = v/u$. Le morphisme d'anneaux correspondant au graphe Γ est le morphisme $k[x, y, s]/(f) \rightarrow k[x, y, 1/x]/(f)$ qui envoie s sur y/x . Le calcul du noyau présente une subtilité car il est clair que $y - xs$ est dans le noyau, mais à cause de la localisation en x , tous les éléments de $k[x, y, s]/(f, y - xs)$ annulés par une puissance de x sont dans le noyau. Ainsi en faisant $y = xs$ dans f on obtient $x^2(s^2 - (x+1))$ et donc $s^2 - (x+1)$ est dans le noyau. (Ce qui se vérifie immédiatement.) Finalement, dans cette carte l'éclatement s'exprime en coordonnées (x, s) par l'équation $s^2 = (x+1)$.

Dans la carte $\{v \neq 0\}$ on prend la coordonnée affine $t = u/v$ et on trouve après calcul l'équation $1 = t^2(ty + 1)$ en coordonnées (y, t) .

La fibre au-dessus de l'origine est incluse dans les deux cartes de l'éclatement, il s'agit de deux points de coordonnées $s = \pm 1$ dans la première carte et $t = \pm 1$ dans la deuxième carte.

(4) La complétée projective \mathcal{C} a pour équation $y^2z - x^2(x+z)$ que l'on note encore f . (Attention : maintenant x, y, z sont des coordonnées *homogènes*.) L'éclatement est dans $\mathcal{C} \times \mathbb{P}_k^1 \subset \mathbb{P}_k^2 \times \mathbb{P}_k^1$ qu'il faut mettre dans un espace projectif. On utilise le plongement de Segre : $\mathbb{P}_k^2 \times \mathbb{P}_k^1 \rightarrow \mathbb{P}_k^5$ qui envoie $((x : y : z), (u : v))$ sur $(xu : xv : yu : yv : zu : zv)$. Si on note $(a : b : c : d : e : f)$ des coordonnées dans \mathbb{P}_k^5 , les équations de ce plongement sont $ad = bc, af = be, cf = de$ (on en aura besoin pour donner des équations de l'éclatement). Le morphisme graphe qui sert à définir l'éclatement envoie $(x : y : z)$ sur $((x : y : z), (u = x, v = y))$ dans $\mathcal{C} \times \mathbb{P}_k^1$. On obtient en particulier l'équation $b = c$ dans \mathbb{P}_k^5 donc on se retrouvera en fait dans l'hyperplan $\{c = b\} \simeq \mathbb{P}_k^4$. La relation $f = 0$ donne deux relations supplémentaires :

$$\text{si } u \neq 0 : c^2e = a^2(a + e), \text{ et si } v \neq 0 : d^2f = b^2(b^2 + f).$$

On obtient finalement les cinq équations en coordonnées homogènes $(a : b : d : e : f)$:

$$ad = b^2 \quad , \quad af = be \quad , \quad bf = de \quad , \quad b^2e = a^2(a + e) \quad , \quad d^2f = b^2(b^2 + f) \quad .$$

Exercice 47 *Calcul explicite local de l'éclatement.* Soit $X = \text{Spec}(A)$ et $Y = V(f_1, \dots, f_n)$ un sous-schéma fermé. Soit $\tilde{X} \subset X \times \mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^{n-1}$ l'éclatement de X le long de Y . Soit U_i l'ouvert standard de $\mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^{n-1}$. Montrez que l'idéal définissant sur \tilde{X} dans l'ouvert affine $X \times U_i$ est

$$\bigcup_{n \geq 0} (I : (f_i)^n),$$

où $I \subset A \otimes \mathbb{Z}[u_1/u_i, \dots, u_n/u_i]$ est l'idéal engendré par les éléments $f_i u_k / u_i - f_k$.

Corrigé. Considérons l'ouvert principal $D(f_i) \subset X$, alors le morphisme graphe est $D(f_i) \rightarrow X \times U_i$ donné par

$$A \otimes \mathbb{Z} \left[\frac{u_1}{u_i}, \dots, \frac{u_n}{u_i} \right] \rightarrow A \left[\frac{1}{f_i} \right]$$

$$\frac{u_k}{u_i} \mapsto \frac{f_k}{f_i} .$$

On vérifie que le noyau est engendré par les $f_i \frac{u_k}{u_i} - f_k$ puis en tuant la f_i -torsion.

Exercice 48 La définition d'un éclatement n'utilise pas le fait que l'anneau de base k est un corps. Prenons pour anneau de base un anneau de valuation discrète R , d'uniformisante π , de corps des fractions K et de corps résiduel $k = R/(\pi)$. Soit $X = \mathbb{P}_R^1$ la droite projective sur R , et \mathbb{P}_K^1 resp. \mathbb{P}_k^1 la fibre ouverte resp. fermée de la projection $p : \mathbb{P}_R^1 \rightarrow \text{Spec}(R)$.

(1) Calculez l'éclatement $\tilde{X} \rightarrow X$ en un point de la fibre fermée, comme sous-schéma fermé de \mathbb{P}_R^3 . Montrez que \tilde{X} est une conique plane.

(2) Montrez que la fibre fermée de $\tilde{X} \rightarrow \text{Spec}(R)$ n'est pas lisse.

Corrigé. (1) Soit $(u : v)$ des coordonnées dans $X = \mathbb{P}_R^1$. On utilisera le plongement de Segre $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^3$ donné par $((u : v), (x : y)) \mapsto (a : b : c : d) = (ux : uy : vx : vy)$. L'équation de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ dans \mathbb{P}^3 est $ad = bc$. On peut supposer que le point qu'on éclate est défini dans la carte $v \neq 0$ par l'idéal $(u/v, \pi)$ donc le morphisme graphe qui définit l'éclatement est $X \rightarrow X \times \mathbb{P}^1, (u : v) \mapsto ((u : v), (x : y) = (u : \pi v))$. On voit que l'équation $\pi vx = uy$ donne $\pi c = b$ dans \mathbb{P}^3 . Finalement les équations pour \tilde{X} dans \mathbb{P}^3 sont $ad = bc$ et $\pi c = b$. On a bien la conique plane $ad = \pi c^2$.

(2) La fibre fermée a pour équation $ad = 0$, c'est une réunion de deux \mathbb{P}^1 se coupant en un point. Elle est singulière.

Exercice 49 Soit $N+1 = \dim_k H^0(\mathbb{P}_k^n, \mathcal{O}(d)) = \binom{n+d}{d}$ et soient M_0, \dots, M_N les monômes de degré d en $n+1$ variables x_0, \dots, x_n . Soit $\nu_d : \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^N$ le plongement de Veronese d -uple, qui envoie le point $a = (a_0, \dots, a_n)$ sur $(M_0(a), \dots, M_N(a))$. Les deux questions suivantes sont indépendantes.

(1) Calculez le degré de $\nu_d(\mathbb{P}^n)$ dans \mathbb{P}^N .

(2) Soit $H \subset \mathbb{P}^n$ une hypersurface donnée par une équation homogène $f(x_0, \dots, x_n) = 0$ de degré d . Montrer que $\mathbb{P}_k^n \setminus H$ est un schéma affine.

Corrigé. (1) Posons $X = \nu_d(\mathbb{P}^n)$, on va calculer le polynôme de Hilbert P_X . Il s'agit de trouver la dimension de l'espace des polynômes homogènes restreints à X de degré m sur \mathbb{P}^N . Or un polynôme de degré m sur \mathbb{P}^N se restreint en un polynôme de degré dm sur \mathbb{P}^n , donc

$$h_X(m) = \binom{n+dm}{dm} = \frac{1}{n!} (dm+n)(dm+n-1) \dots (dm+1) = \frac{1}{n!} (dm)^n + \dots$$

(La fonction de Hilbert est ici un polynôme donc $P_X = h_X$.) Le degré est d^n .

(2) Il est clair que H est la préimage par ν_d d'un (unique) hyperplan \mathcal{H} de \mathbb{P}^N . Le complémentaire de H dans \mathbb{P}^n est la préimage par ν_d du complémentaire de \mathcal{H} dans \mathbb{P}^N qui est un ouvert affine. Comme ν_d est une immersion fermée (donc un morphisme affine), cette préimage est un fermé d'un ouvert affine donc affine.

Autres idées d'exercices :

calcul de $H^*(X, \mathbb{Z})$ pour la réunion de trois droites.

exemples : grassmannienne, courbes elliptiques (mq la loi d'une variété abélienne est commutative), schémas en groupes.

groupe de picard de \mathbb{A}^n et de \mathbb{P}^n .

Diviseurs de Weil et de Cartier, exemples et contre-exemples.

variétés lisses, localement factorielles, normales, exemples et contre-exemples.

Références

D. EISENBUD, J. HARRIS, *The geometry of schemes*, Graduate Texts in Mathematics No 197. Springer-Verlag, 2000.

J. HARRIS, *Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Mathematics No 52, Springer-Verlag, 1977.

R. HARTSHORNE, *Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Mathematics No 52, Springer-Verlag, 1977.

H. MATSUMURA, *Commutative Ring Theory*, Second edition, Cambridge Studies in Advanced Mathematics No 8, Cambridge University Press, 1989.

D. MUMFORD, *The red book of varieties and schemes*, Second, expanded edition, Lecture Notes in Mathematics No 1358, Springer-Verlag, 1999.

C. PESKINE, *An algebraic introduction to complex projective geometry. 1. Commutative algebra*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics No 47, Cambridge University Press, 1996.