Matthieu Romagny, 10 décembre 2020

Exercices de Géométrie Algébrique

Dans tous ces exercices, les anneaux considérés sont commutatifs et unitaires.

Exercice 1 Soient $P, Q, R \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ avec P irréductible et Q non multiple de P. On suppose que pour tout $x \in \mathbb{C}^n$ les conditions $P(x) = 0$ et $Q(x) \neq 0$ impliquent $R(x) = 0$. Montrer que P divise R.

Exercice 2 *Espaces topologiques irréductibles.* Montrez les faits suivants. Si X est un espace topologique non vide séparé et irréductible, alors X est un point. Dans un espace topologique irréductible, les ouverts non vides sont denses, et en particulier se coupent. Un ouvert non vide d'un espace topologique irréductible est lui aussi irréductible. Si X est un espace topologique et $Y \subset X$ est une partie irréductible alors $\overline{Y}$ est aussi irréductible.

Exercice 3 Soit A un anneau et $X = \operatorname{Spec}(A)$. Montrez que X est irréductible ssi $A_{\text{réd}}$ est intègre.

Exercice 4 Décrire les composantes irréductibles du fermé $Y \subset \mathbb{A}^3_k$ donné par $y^2 = xz$, $z^2 = y^3$.

Exercice 5 *Critère valuatif de propreté pour* $\mathbb{P}^n$. Soit $U \subset \mathbb{P}^1_k$ un ouvert non vide et $f : U \to \mathbb{P}^n_k$ un morphisme de variétés algébriques. Montrer qu'il se prolonge en un morphisme $\mathbb{P}^1_k \to \mathbb{P}^n_k$.

Exercice 6 On considère la courbe $X \subset \mathbb{A}^2_k$ donnée par $y^2 = x^2 + x^3$.
(1) Montrer que la fonction y/x n'est pas régulière sur X. Quel est le plus grand ouvert de X sur lequel elle est régulière ?
(2) Montrer que X est rationnelle.

Exercice 7 *La cubique gauche.* On note Y la *cubique gauche*, image du morphisme de Veronese $\nu_3 \colon \mathbb{P}^1_k \to \mathbb{P}^3_k$ donné par $\nu_3(x : y) = (x^3 : x^2y : xy^2 : y^3)$. Montrer que ν_3 induit un isomorphisme de $\mathbb{P}^1_k$ sur Y et écrire l'isomorphisme inverse. Montrer que Y est une *variété déterminantielle*, c'est-à-dire une variété définie par l'annulation des mineurs d'une certaine matrice.

Exercice 8 *Connexité et fonctions.* Soit X un schéma. Les conditions suivantes sont équivalentes :
(1) X est connexe,
(2) $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ ne possède pas d'idempotent non trivial ($e \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ tel que $e^2 = e$ et $e \neq 0, 1$),
(3) $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ n'est pas un anneau produit non trivial $A_1 \times A_2$.
(*Indication :* (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (1).)

Remarque. L'exercice montre en fait que si X a un nombre fini r de composantes connexes, alors $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ est un produit de r facteurs, et possède exactement 2^r idempotents.

Exercice 9 Soit $Y \subset \mathbb{A}^3_k$ le schéma donné par des équations $x^2 - yz = 0$ et $xz - x = 0$. Montrer que Y admet trois composantes irréductibles, trouver les idéaux premiers correspondants de $\mathcal{O}_Y(Y)$. Montrer que Y est connexe.

Exercice 10 Soit X un schéma et $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-module cohérent. L'objet de cet exercice est de montrer que la fonction $d \colon X \to \mathbb{N}$ définie par $d(x) = \dim_{k(x)}(\mathcal{F} \otimes k(x))$, est semi-continue supérieurement. (On rappelle que cela signifie que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble $\{x \in X \,;\, d(x) \geq n\}$ est fermé.) Comme l'assertion est locale sur X, on se ramène au cas $X = \operatorname{Spec}(A)$ et $\mathcal{F}$ est le module induit par un A-module fini M (un module M sur un anneau A est dit *de type fini* ou simplement *fini* s'il possède un ensemble fini de générateurs).

Soit $p \in \operatorname{Spec}(A)$ et $n = d(p)$. On va produire un ouvert $U = D(f) \subset \operatorname{Spec}(A)$ contenant p et tel que $d_{|U} \leq n$. On fixe un isomorphisme $\varphi\colon k(p)^n \to M_p \otimes_{A_p} k(p)$ et un élément $f \notin p$, quelconque pour l'instant. Soit A_p l'anneau local en p et $M_p = M \otimes_A A_p$. On considère le diagramme ci-contre, dans lequel $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont les morphismes canoniques.

$$\begin{tikzcd}
A[\frac{1}{f}]^n \arrow[r, dotted, "\chi"] \arrow[d, "\alpha"] & M[\frac{1}{f}] \arrow[d, "\gamma"] \\
(A_p)^n \arrow[r, dotted, "\psi"] \arrow[d, "\beta"] & M_p \arrow[d, "\delta"] \\
k(p)^n \arrow[r, "\varphi"] & M \otimes k(p)
\end{tikzcd}$$

(1) Utilisez le lemme de Nakayama rappelé ci-dessous pour relever φ en une surjection de A_p-modules $\psi\colon (A_p)^n \to M_p$.

(2) Choisissez f pour que ψ se relève à son tour en un morphisme surjectif $\chi\colon A[\frac{1}{f}]^n \to M[\frac{1}{f}]$. Concluez.

Rappel : Théorème (Lemme de Nakayama) *Soit A un anneau et $I \subset A$ un idéal. Soit M un A-module fini. Si $M = IM$, alors il existe $a \in A$ avec $a \equiv 1 \mod I$, tel que $aM = 0$.*

Un cas particulier très utile est le cas où A est un anneau local, et I est l'idéal maximal m de A. Dans ce cas le théorème dit que $M = mM$ implique $M = 0$.

Exercice 11 *Foncteur de points d'un schéma affine.* Soit X un schéma et A un anneau. Montrez qu'un morphisme de schémas $X \to \operatorname{Spec}(A)$ est la même chose qu'un morphisme d'anneaux $A \to \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$. Utilisez ceci pour donner une interprétation des fonctions (globales) sur X en termes de morphismes de X vers un certain schéma affine.

Remarque. Voici l'explication du titre (« *Foncteur de points* »). À tout S-schéma X on peut associer son foncteur de points h_X de la façon suivante. Si T est un S-schéma, on pose $h_X(T) = \operatorname{Hom}_S(T, X)$, l'ensemble des morphismes de schémas de T dans X, qu'on appelle l'ensemble des *points de X à valeurs dans T*. La terminologie vient du fait que si T est le spectre d'un corps k, un morphisme $T \to X$ est donné par un point $x \in X$ et un morphisme de corps $k(x) \hookrightarrow k$, cf Hartshorne ex. 2.7 page 80. On appelle h_X le foncteur de points de X. Le *lemme de Yoneda* montre que h_X caractérise X, précisément, le foncteur

$$h\colon \operatorname{Sch}/S \to \operatorname{Fonct}((\operatorname{Sch}/S)^\circ, \operatorname{Ens})$$

est pleinement fidèle (ce qui veut dire grosso modo que c'est un plongement de catégories). L'exercice que nous venons de faire décrit le foncteur de points d'un schéma affine : $h_{\operatorname{Spec}(A)}(T) = \operatorname{Hom}_{\operatorname{Ann}}(A, \Gamma(T, \mathcal{O}_T))$. Pour le lemme de Yoneda, voir par exemple Eisenbud-Harris.

Exercice 12 *Image schématique.* Soit $f : Z \to X$ un morphisme de schémas. Montrer qu'il existe un sous-schéma fermé $Y \subset X$ tel que f se factorise en $Z \to Y \to X$ et que pour tout diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
Y' \arrow[r, hook] & X \\
Z \arrow[u] \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

où Y' est un sous-schéma fermé de X, il existe un morphisme $Y \to Y'$ sur X (il est automatiquement unique). Le sous-schéma fermé Y s'appelle l'*image schématique* de f. Si Z est réduit, alors Y est l'adhérence de l'image de f avec sa structure de schéma réduit.

Remarque. Il y a plusieurs notions d'*images* pour un morphisme de schémas, chacune avec ses avantages et ses inconvénients. Sur l'image au sens ensembliste, il n'y a pas en général de structure de schéma naturelle. Le meilleur résultat disponible est le théorème de Chevalley : *l'image ensembliste d'un morphisme de type fini de schémas nœthériens est constructible* (une partie constructible d'un espace topologique est une partie qui est réunion finie de parties localement fermées). Pour plus de détails sur les différentes notions d'images, voir Eisenbud-Harris paragraphe V.1.

Exercice 13 *Fonctions sur $\mathbb{P}^n$.* Montrez que les fonctions globales sur l'espace projectif $\mathbb{P}^n_k$ sont les constantes.

Remarque. C'est un fait général que les schémas projectifs (plus généralement, propres) ont « peu » de fonctions, à savoir que l'espace des fonctions est de dimension finie, par opposition aux schémas affines qui en ont beaucoup. Plus généralement, le *théorème de finitude* de Serre-Grothendieck dit que pour tout schéma propre X et tout $\mathcal{O}_X$-module cohérent $\mathcal{F}$, les groupes de cohomologie $\mathrm{H}^i(X,\mathcal{F})$ sont de dimension finie.

Exercice 14 *Schéma des racines n-ièmes de l'unité.* Soit A un anneau et $n \geq 1$ un entier. Montrez qu'il existe un schéma affine, noté $\mu_{n,A}$ et appelé schéma des racines n-ièmes de l'unité, tel que pour tout A-schéma S, se donner une racine n-ième de l'unité de $\Gamma(S,\mathcal{O}_S)$ est la même chose que se donner un A-morphisme $S \to \mu_{n,A}$.

Soient p, p' des nombres premiers. Décrivez $\mu_{p,A}$ lorsque $A = \mathbb{Q}$, puis $A = \mathbb{F}_{p'}$ pour $p' \neq p$, puis $A = \mathbb{F}_{p'}$ pour $p' = p$.

Remarque. J'ai évoqué plus haut le fait que le foncteur de Yoneda $h\colon \mathrm{Sch}/S \to \mathrm{Fonct}((\mathrm{Sch}/S)^\circ, \mathrm{Ens})$ est pleinement fidèle. On dit qu'un foncteur $F\colon (\mathrm{Sch}/S)^\circ \to \mathrm{Ens}$ est *représentable* par un schéma X si $F \simeq h_X$. Le lemme de Yoneda implique qu'un tel X est alors unique (à isomorphisme unique près). Nous venons de montrer que le foncteur des racines n-ièmes de l'unité défini par

$$F(T) = \{\text{racines } n\text{-ièmes de l'unité de } \Gamma(T,\mathcal{O}_T)\}$$

est représentable par un schéma $\mu_{n,S}$.

Exercice 15 *Support d'un module.* Soit M un module de type fini sur un anneau A. On appelle *support de* M l'ensemble $\{p \in \mathrm{Spec}(A),\ M_p \neq 0\}$. Soit $I = \{a \in A,\ aM = 0\}$ l'annulateur de M.
(1) Montrer que le support de M est $V(I) = \{p \in \mathrm{Spec}\,A,\ I \subset p\}$.
(2) Supposons que $A = k[t]$ et M est un A-module de longueur finie. Alors M peut être vu comme un k-espace vectoriel $\overline{M}$ de dimension finie muni d'un opérateur $\bar{t} \in \mathrm{End}(\overline{M})$. Montrer que l'annulateur de M est l'idéal engendré par P, où P est le polynôme minimal de $\bar{t}$.

Exercice 16 *Anneaux locaux.* On dit qu'un anneau est *local* s'il n'a qu'un idéal maximal. Montrez qu'un anneau est local si et seulement si l'ensemble des éléments non inversibles de A est un idéal. Soit A un anneau et p un idéal premier de A. Montrez que le localisé de A par rapport à la partie multiplicative $S = A \setminus p$, noté A_p, est un anneau local d'idéal maximal pA_p. Montrez que A_p/pA_p est isomorphe au corps de fractions de l'anneau intègre A/p.

Exercice 17 Décrivez la topologie de $X = \mathrm{Spec}(A)$ dans les cas suivants : $A = k$, $A = k[\epsilon]/(\epsilon^2)$, $A = \mathbb{C}[X]$, $A = \mathbb{C}[X,Y]$, A est un anneau de valuation discrète.

Exercice 18 *Intersection complètes.* Soit $Y \subset \mathbb{P}^n_k$ une sous-variété de dimension r. On dit que Y est une *intersection complète (stricte)* si $I(Y)$ peut être engendré par $n-r$ éléments. On dit que Y est une *intersection complète ensembliste* si Y est l'intersection (ensembliste) de $n-r$ hypersurfaces.
(1) Montrer qu'une intersection complète stricte est une intersection complète ensembliste.
(2) Montrer que la cubique gauche Y n'est pas une intersection complète stricte.
(3) Montrer que la cubique gauche Y est une intersection complète ensembliste. Précisément, trouver une hypersurface Y_2 de degré 2 et une hypersurface déterminantielle Y_3 de degré 3 telles que $Y = Y_2 \cap Y_3$ ensemblistement. Montrer que l'intersection $Y_2 \cap Y_3$ au sens des schémas est comprise entre Y et son premier voisinage infinitésimal dans $\mathbb{P}^3_k$. (Soit X un schéma et $Y \subset X$ un sous-schéma fermé défini par un faisceau d'idéaux $\mathcal{I}$. Le *n-ième voisinage infinitésimal de Y dans X* est le sous-schéma fermé de X défini par le faisceau d'idéaux $\mathcal{I}^{n+1}$.)

Exercice 19 *Caractérisations des anneaux de valuation discrète.* Soit A intègre de corps des fractions K avec $A \neq K$. On dit que A est un *anneau de valuation discrète* s'il existe une application $v\colon K \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ d'image non réduite à $\{0,\infty\}$ telle que

(i) $v^{-1}(\infty) = \{0\}$,
(ii) pour tous x, y dans K on a $v(xy) = v(x) + v(y)$,

(iii) pour tous x, y dans K on a $v(x+y) \geq \min(v(x), v(y))$,
et $A = \{x \in K,\, v(x) \geq 0\}$. Montrez que les conditions suivantes sont équivalentes :
(1) A est un anneau de valuation discrète,
(2) A est local et principal,
(3) A est local, nœthérien et son unique idéal maximal est principal,
(4) il existe un élément $\pi \in A$ non nul et irréductible tel que tout $x \in A$ non nul peut sécrire $x = u\pi^n$ avec $u \in A^\times$ et $n \in \mathbb{N}$.
(*Indication : pour (3) $\Rightarrow$ (4) montrer que l'idéal $I = \cap_{n\geq 1}(\pi^n)$ est nul à l'aide du lemme de Nakayama.*)

Exercice 20 *Exemples d'anneaux de valuation discrète.* Soit A_1 le localisé de $k[X_1, \ldots, X_n]$ en l'idéal premier engendré par un polynôme irréductible $f \in k[X_1, \ldots, X_n]$ (anneau local d'une hypersurface irréductible de $\mathbb{A}^n_k$). Soit $A_2 = k[[x]]$ l'anneau de séries formelles (voisinage analytique d'un point lisse dans une courbe). Soit A_3 le localisé de $\mathbb{Z}$ en l'idéal premier engendré par un nombre premier p.

Montrez que A_1, A_2, A_3 sont des anneaux de valuation discrète.

Exercice 21 *Anneaux réguliers de dimension* 1. On dit qu'un anneau intègre A, de corps des fractions K, est *intégralement clos* (ou *normal*) si tout élément de K, entier sur A, est dans A. On dit qu'un anneau local nœthérien A, d'idéal maximal m et de corps résiduel $k = A/m$, est *régulier* si $\dim(A) = \dim_k(m/m^2)$.

Soit A intègre de corps des fractions K avec $A \neq K$. Les conditions suivantes sont équivalentes :
(1) A est un anneau de valuation discrète,
(2) A est local, noethérien, de dimension 1 et régulier,
(3) A est local, noethérien, de dimension 1 et intégralement clos.

Exercice 22 *Singularités de courbes.* On suppose que k n'est pas de caractéristique 2. Dessinez l'allure des courbes planes qui suivent : (a) $x^2 = x^4 + y^4$ (b) $xy = x^6 + y^6$ (c) $x^3 = y^2 + x^4 + y^4$ (d) $x^2y + xy^2 = x^4 + y^4$.

Exercice 23 *Éclatement dans le cas des courbes.* Soit $X = \mathrm{Spec}(A)$ une k-variété affine et Y une sous-variété d'idéal $I = (f_1, \ldots, f_n)$. On considère le morphisme défini sur l'ouvert $U = X \setminus Y$:

$$\begin{array}{rcl} f\colon X & \dashrightarrow & \mathbb{P}^{n-1}_k \\ x & \mapsto & (f_1(x) : \ldots : f_n(x)) \end{array}$$

et son graphe $\Gamma_f \subset X \times \mathbb{P}^{n-1}_k$. On appelle *éclatement de Y dans X* l'adhérence schématique de Γ_f dans $X \times \mathbb{P}^{n-1}_k$ et on le note $\widetilde{X}$. Il vient avec un morphisme $\pi\colon \widetilde{X} \to X$.
(1) Donnez des équations dans $\mathbb{A}^n_k \times \mathbb{P}^{n-1}_k$ pour l'éclatement de l'origine dans $\mathbb{A}^n_k$.
(2) Calculez les éclatements des courbes suivantes en l'origine, en donnant deux cartes affines :

(a) $y^2 = x^2 + x^3$	(b) $y^2 = x^3$	(c) $y^2 = x^5$
(d) $x^2y + xy^2 = x^4 + y^4$	(e) $x^2 = x^4 + y^4$	(f) $y^3 = x^5$

Combien d'éclatements sont nécessaires pour désingulariser chaque courbe ?

Exercice 24 *Branches en un point.* Soit $g(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$ un polynôme homogène de degré 3. On note $\mathcal{O}$ l'anneau local de l'origine dans le sous-schéma X de $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ défini par l'équation $xy = g(x, y)$. On souhaite montrer que si g est générique, l'anneau $\mathcal{O}$ a un spectre irréductible mais pas son complété $\widehat{\mathcal{O}}$.
(1) Donner une condition suffisante sur g pour que $\mathcal{O}$ soit intègre. Dans la suite on suppose que cette condition est vérifiée.
(2) Construire un morphisme $\frac{\mathbb{C}[x,y]}{xy-g(x,y)} \to \frac{\mathbb{C}[x,u]}{u-xg(1,u)} \times \frac{\mathbb{C}[v,y]}{v-yg(v,1)}$. (*Penser à un éclatement.*)
(3) En déduire un isomorphisme $\widehat{\mathcal{O}} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[[u]] \times \mathbb{C}[[v]]$.

Exercice 25 *Intersections et unions de sous-schémas fermés.* On note $|X|$ l'espace topologique d'un schéma X.
(1) Soient $X \to S$, $Y \to S$ des morphismes de schémas ; en toute généralité, il existe un *produit fibré* $X \times_S Y$. En particulier si Y, Z sont deux sous-schémas fermés de X on définit l'intersection $Y \cap Z = Y \times_X Z$. Donnez son faisceau d'idéaux dans X. Montrez que $|Y \cap Z| = |Y| \cap |Z|$.

(2) Dualement, soient $Z \to X$, $Z \to Y$ des morphismes ; l'existence de la *somme amalgamée* $X \amalg_Z Y$ est beaucoup plus problématique. Dans le cas de sous-schémas fermés $Y, Z \subset X$ les choses se passent bien et on montre (ce n'est pas facile) que la réunion définie par $Y \cup Z = Y \amalg_{Y \cap Z} Z$, est un sous-schéma fermé de X. Donnez son faisceau d'idéaux dans X. Montrez que $|Y \cup Z| = |Y| \cup |Z|$.
(3) La définition de $Y \cup Z$ comme dans (2) n'est pas du tout la seule utile. Pour des diviseurs de Cartier $Y, Z \subset X$, définis localement par des équations f, g, on définit la *somme* $Y + Z$ comme le sous-schéma fermé de X d'équation locale $h = fg$. Montrez que c'est encore un diviseur de Cartier de X. Montrez que si Y, Z sont des diviseurs de Cartier effectifs, alors $|Y + Z| = |Y \cup Z| = |Y| \cup |Z|$.
(4) Soit $X \to S$ un morphisme de schémas. Un *diviseur de Cartier effectif relatif de* X/S est un diviseur de Cartier effectif $Y \subset X$ tel que Y est plat sur S. Montrez que si Y, Z sont des diviseurs de Cartier effectifs relatifs de X/S alors $Y + Z$ l'est aussi.

Exercice 26 Soit X un schéma nœthérien et $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent.
(1) On pose $d(x) = \dim_{k(x)} \mathcal{F} \otimes k(x)$ et $d(\mathcal{F}) = \sup \{d(x), x \in X\}$. Montrer que $d(\mathcal{F})$ est fini.
(2) Montrez que X est affine si et seulement si $X_{\text{réd}}$ est affine en utilisant le théorème de Serre sur la cohomologie des schémas affines (Hartshorne, chap. II, théorème 3.7) et en faisant une récurrence sur $d(\mathcal{F})$.

Remarque. Si on suppose seulement que l'espace topologique sous-jacent à X est nœthérien, cette preuve s'adapte. Cela étend alors un peu le résultat de EGA I, 5.1.10 car on n'a pas besoin de supposer que le faisceau des éléments nilpotents $\mathcal{N}$ est lui-même nilpotent. Voici les modifications nécessaires : sous cette hypothèse plus faible, le théorème de Serre demande de vérifier que $\mathrm{H}^1(X, \mathcal{F}) = 0$ pour tout faisceau *quasi-cohérent* $\mathcal{F}$ sur X (voir EGA II, 5.2.1). Or l'utilisation du lemme de Nakayama, d'une part dans (1) pour avoir $d(\mathcal{F}) < \infty$ et d'autre part dans (2) pour avoir $d(\mathcal{N}\mathcal{F}) < d(\mathcal{F})$, nécessite au moins d'avoir des faisceaux quasi-cohérents et de type fini (un $\mathcal{O}_X$-module $\mathcal{F}$ est de *type fini* si pour tout $x \in X$ il existe un voisinage $U \subset X$ tel que $\mathcal{F}|U$ soit engendré par une famille finie de sections de $\mathcal{F}$ sur U. Tout faisceau cohérent est quasi-cohérent et de type fini mais l'inverse n'est pas vrai.). Pour un tel faisceau, la preuve qui précède montre donc que $\mathrm{H}^1(X, \mathcal{F}) = 0$. Or on peut montrer que sur un schéma dont l'espace topologique sous-jacent est nœthérien, tout faisceau quasi-cohérent $\mathcal{F}$ est limite inductive filtrante de ses sous-faisceaux quasi-cohérents de type fini $\mathcal{F}_\alpha$, cf EGA I, 9.4.9. Comme de plus la cohomologie commute aux limites inductives filtrantes de faisceaux (Hartshorne chap. III, proposition 2.9), on a $\mathrm{H}^1(X, \mathcal{F}) = \mathrm{H}^1(X, \varinjlim \mathcal{F}_\alpha) = \varinjlim \mathrm{H}^1(X, \mathcal{F}_\alpha) = 0$, cqfd.

Exercice 27 *Un théorème de Chevalley.* Nous admettons le théorème de connexion de Zariski, rappelé ci-dessous. Utilisez-le pour démontrer le théorème suivant dû à Chevalley. Soit Y un schéma localement nœthérien. Soit $f \colon X \to Y$ un morphisme. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :
(1) f est fini,
(2) f est propre et affine,
(3) f est propre et quasi-fini.
(*Indication :* montrez que (1) $\iff$ (2) et (1) $\iff$ (3).)

Théorème de connexion de Zariski et factorisation de Stein (CZFS) *Soit Y un schéma localement nœthérien. Soit $f \colon X \to Y$ un morphisme propre. Alors $\mathcal{A} := f_*\mathcal{O}_X$ est un faisceau de $\mathcal{O}_Y$-algèbres cohérent. Soit $Y' = \mathrm{Spec}(\mathcal{A})$ et $g \colon Y' \to Y$, $f' \colon X \to Y'$ les morphismes canoniques tels que $f = g \circ f'$. Alors g est fini, f' est propre, $f'_*\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_{Y'}$, et les fibres de f' sont connexes et non vides.*

Exercice 28 *Sous-espaces linéaires et projections.* Soit E un k-espace vectoriel de dimension $n+1$ et $\pi \colon E \setminus \{0\} \to P(E)$ le morphisme canonique. Si $F \subset E$ est un sous-espace vectoriel, on dit que $P(F) \subset P(E)$ est un sous-espace linéaire. Si F et F' sont supplémentaires dans E, on dit que $P(F)$ et $P(F')$ sont supplémentaires dans $P(E)$. Dans ce cas, on appelle projection sur F' depuis F le morphisme $P(E) \setminus P(F) \to P(F')$ induit par la projection sur F' parallèlement à F dans E.
(1) Soit $X \subset P(E)$ une sous-variété fermée. Soit $p \notin X$ et $P(F)$ un hyperplan ne contenant pas p. Montrez que la restriction à X de la projection de centre p sur $P(F)$ induit un morphisme $\pi \colon X \to P(F)$ qui est fini.
(2) Démontrez la version projective du théorème de normalisation de Nœther : pour toute k-variété projective X, il existe un morphisme fini surjectif $X \to \mathbb{P}^r_k$.

Exercice 29 *Morphismes affines.* Pout tout S-schéma X de morphisme structural $f\colon X\to S$, on note $\mathcal{A}(X)$ la $\mathcal{O}_S$-algèbre $f_*\mathcal{O}_X$ (i.e. c'est un faisceau d'anneaux qui est aussi un $\mathcal{O}_S$-module quasi-cohérent).
(1) On dit que $f\colon X\to S$ est un morphisme *affine*, ou que X est un schéma affine au-dessus de S, s'il existe un recouvrement ouvert affine $\{S_i\}$ de S tel que $f^{-1}(S_i)$ est affine pour tout i. Montrez qu'alors, pour tout ouvert $U\subset S$, le morphisme induit $f^{-1}(U)\to U$ est affine. (*Indication : Se ramener au cas X affine, puis utiliser les ouverts distingués.*)
(2) Soit $\mathcal{B}$ une $\mathcal{O}_S$-algèbre quasi-cohérente. Montrez qu'il existe un schéma X affine au-dessus de S tel que $\mathcal{A}(X)=\mathcal{B}$, unique à un S-isomorphisme unique près.
(3) Soit X un schéma affine au-dessus de S. Soit Y un S-schéma. Montrez que se donner un S-morphisme $Y\to X$ est la même chose que se donner un morphisme de $\mathcal{O}_S$-algèbres $\mathcal{A}(X)\to\mathcal{A}(Y)$.

Exercice 30 *Produit fibré dans le cas affine.* Soient $X\to Z$ et $Y\to Z$ deux morphismes de schémas. Supposant que X,Y,Z sont des schémas affines, montrez qu'il existe un produit fibré $X\times_Z Y$ dans la catégorie des schémas.

Exercice 31 *Points d'un schéma comme morphismes* $\mathrm{Spec}(K)\to X$. Soit X un schéma. On note $\mathcal{O}_{X,x}$ l'anneau local d'un point $x\in X$, m_x l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{X,x}$, et $k(x)=\mathcal{O}_{X,x}/m_x$ son corps résiduel. Montrez qu'un morphisme $\mathrm{Spec}(K)\to X$, où K est un corps, est la même chose qu'un couple (x,i) formé d'un point x de l'espace topologique X, et d'une injection de corps $i:k(x)\to K$.

Exercice 32 *Points fermés.* Soit X un schéma et $x\in X$ un point. Pour tout ouvert affine $\mathrm{Spec}(A)$ contenant x, on note $p_x\subset A$ l'idéal premier correspondant à x (on distingue toujours dans la notation le point x, objet géométrique, et l'idéal $p_x\subset A$, objet algébrique).
(1) Supposons que $X=\mathrm{Spec}(A)$. Montrez que l'adhérence de $\{x\}$ est égale à $V(p_x)$.
(2) Soient $U=\mathrm{Spec}(A)$ et $V=\mathrm{Spec}(B)$ deux voisinages ouverts affines de x. Montrez qu'il existe un voisinage ouvert affine de x qui est un ouvert distingué dans U et dans V. (*Commencez par choisir $f\in A$ tel que $x\in\mathrm{Spec}(A_f)\subset\mathrm{Spec}(B)$, puis $g\in B$ tel que $x\in\mathrm{Spec}(B_g)\subset\mathrm{Spec}(A_f)$.*)
(3) Montrez que les conditions suivantes sont équivalentes : (i) x est fermé dans X, (ii) pour tout voisinage ouvert affine $U=\mathrm{Spec}(A)$ de x, $p_x\subset A$ est un idéal maximal, (iii) il existe un voisinage ouvert affine $U=\mathrm{Spec}(A)$ de x tel que $p_x\subset A$ est un idéal maximal. (*Montrez que (i) $\iff$ (ii) avec (1) puis que (ii) $\iff$ (iii) avec (2).*)

Exercice 33 *Fermés irréductibles et leurs points génériques.* On dit qu'un point x d'un espace topologique X est un *point générique* ssi l'adhérence de $\{x\}$ est X.
(1) Soit X un schéma. Montrez que tout fermé irréductible $F\subset X$ a un et un seul point générique η_F. (*Commencez par le cas $F=X=\mathrm{Spec}(A)$. Dans le cas général, soient η_1 et η_2 deux points génériques de F. Soit U_1 un ouvert affine de X contenant η_1, montrez que $U_1\cap F$ contient η_2 puis que $\eta_1=\eta_2$.*)
(2) Déduisez-en que l'application $x\mapsto\overline{\{x\}}$ induit une bijection entre X et l'ensemble des fermés irréductibles de X, d'inverse l'application $F\mapsto\eta_F$.

Exercice 34 *Intersections ; fibres des morphismes.*
(1) Soient X un schéma et Y,Z deux sous-schémas fermés de X. On définit l'*intersection* $Y\cap Z$ comme étant égale au produit fibré $Y\times_X Z$. Dans le cas où X est affine, donnez l'idéal de $Y\cap Z$ en fonction de ceux de Y et Z. Donnez un exemple de deux sous-schémas fermés réduits qui ont une intersection non réduite.
(2) Soit $f:X\to Y$ un morphisme de schémas. Soit $y\in Y$, vu comme un morphisme $\mathrm{Spec}(k(y))\to Y$. On définit la *fibre de f en y*, notée $f^{-1}(y)$, comme étant égale au produit fibré $X\times_Y\mathrm{Spec}(k(y))$. Dans le cas où X et Y sont affines, dites quel est le schéma $f^{-1}(y)$. Donnez un exemple de morphisme entre deux schémas réduits ayant une fibre non réduite.

Exercice 35 *Morphismes finis.* On dit qu'un morphisme de schémas $f:Y\to X$ est *fini* s'il existe un recouvrement de X par des ouverts affines $U_i=\mathrm{Spec}(A_i)$ tels que $V_i=f^{-1}(U_i)$ est affine égal à $\mathrm{Spec}(B_i)$, et B_i est un A_i-module fini. Montrez qu'un morphisme fini est fermé. (*Indication : utiliser le théorème de Cohen-Seidenberg rappelé ci-dessous.*)

Rappel : Théorème de Cohen-Seidenberg Soit $A \subset B$ une extension d'anneaux tel que B est entier sur A, c'est-à-dire, tout élément de B satisfait une équation polynomiale unitaire à coefficients dans A. (C'est le cas par exemple si B est un A-module fini.) Alors pour tout idéal premier $p \subset A$, il existe un idéal premier $q \subset B$ tel que $q \cap A = p$.

Exercice 36 *Homéomorphisme n'est pas isomorphisme.* Soit $X \subset \mathbb{A}^2_k$ la courbe d'équation $y^2 = x^3$ et $f : \mathbb{A}^1_k \to X$ le morphisme défini par $f(t) = (t^2, t^3)$. Montrez que f est un homéomorphisme mais n'est pas un isomorphisme.

Exercice 37 *Dimension d'un diviseur de Cartier.* Soit A un anneau nœthérien et $f \in A$ un élément non inversible et non diviseur de 0. Dans cet exercice on démontre que $\dim(A/f) \leq \dim(A) - 1$, où la dimension est définie comme étant le sup des longueurs de chaînes d'idéaux premiers de A.
(N.B. on peut montrer que si de plus A est local, ou intègre, alors $\dim(A/f) = \dim(A) - 1$. C'est une conséquence du théorème de l'idéal principal de Krull (*Hauptidealsatz*), voir par exemple D. Eisenbud, Commutative algebra with a view toward algebraic geometry, Springer, chapitre 10.)
(1) Soit $p \subset R$ un idéal premier d'un anneau nœthérien. Montrez que la dimension du localisé R_p est égale au sup des longueurs de chaînes d'idéaux premiers qui se terminent en p, c'est-à-dire $p_0 \subsetneq p_1 \subsetneq \cdots \subsetneq p_r = p$. (Ce nombre est appelé la *hauteur* de p et noté $\mathrm{ht}(p)$.)
(2) Soit $m = \dim(A/f)$, soit $\overline{p}_0 \subsetneq \overline{p}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \overline{p}_m$ une chaîne de premiers de longueur maximale dans A/f, et $p_0 \subsetneq p_1 \subsetneq \cdots \subsetneq p_m$ les relevés dans A. Démontrez que p_0 n'est pas un premier minimal, en utilisant la question (1) et le théorème de structure des anneaux nœthériens de dimension 0 : *un anneau nœthérien de dimension* 0 *est produit direct d'un nombre fini d'anneaux locaux dont l'idéal maximal est nilpotent.* Concluez.

Remarque. Le résultat véritablement intéressant est celui mentionné ci-dessus : *si A est un anneau local nœthérien et $f \in A$ n'est ni inversible ni diviseur de* 0*, alors* $\dim(A/f) = \dim(A) - 1$. Le sous-schéma correspondant $V(f) \subset \mathrm{Spec}(A)$ est ce qu'on appelle un *diviseur de Cartier.*

Exercice 38 Calculez la dimension des sous-schémas suivants de $\mathbb{A}^4_k = \mathrm{Spec}(k[r,s,t,u])$:
(1) X défini par les équations $rt = s^2$ et $ru = st$,
(2) Y défini par les équations $rt = s^2$, $ru = st$, et $su = t^2$.

Exercice 39 *L'anneau local d'un point.* Étant donnés deux points x, y d'un espace topologique X, on dit que x est une *générisation* de y, ou que y est une *spécialisation* de x, si $y \in \overline{\{x\}}$.
(1) Soit X un schéma et $x \in X$ un point. On définit le *schéma local* de X en x par $X_x = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$. Rappelez la définition de $\mathcal{O}_{X,x}$ et montrez que l'ensemble sous-jacent à X_x s'identifie à l'ensemble des générisations de x.
(2) Soit k un corps, X un k-schéma de type fini, $x \in X$ un point. Montrez que si x est isolé alors $\mathcal{O}_{X,x}$ est de type fini sur k. Réciproquement, montrez que si $\mathcal{O}_{X,x}$ est de type fini alors $X_x = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$ est un point. Concluez à l'aide de (1) que x est isolé dans X.
(3) Montrez que le résultat de (2) est faux si on ne suppose pas que k est un corps.

Remarque. Lors du TD j'ai confondu deux notions qui sont en fait différentes :
- la notion de *point isolé* d'un espace topologique X, i.e. un point qui est *ouvert* dans X,
- la notion de point égal à sa composante connexe, i.e. un point qui est *ouvert et fermé* dans X.

Si un point est égal à sa composante connexe alors il est isolé, mais la réciproque n'est pas vraie, comme le montre le contre-exemple donné dans la question (3) ci-dessous. Pour ce qui concerne la question (2) de l'exercice, on a en fait l'énoncé fort : dans un schéma de type fini X sur un corps k, l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$ est de type fini sur k si et seulement si x est égal à sa composante connexe. Le corrigé ci-dessous le montre.

Exercice 40 *Schéma réduit.* Soit X un schéma.
(1) Montrez ques les conditions suivantes sont équivalentes :
(i) pour tout ouvert affine $U = \mathrm{Spec}(A)$ de X, A est un anneau réduit,
(ii) il existe un recouvrement ouvert affine $U_i = \mathrm{Spec}(A_i)$ de X, tel que A_i est réduit pour tout i,

(iii) tous les anneaux locaux de X sont réduits.
(2) Énoncez la propriété universelle du schéma réduit $X_{\text{réd}}$ et démontrez-la.

Exercice 41 *Exemple d'utilisation du point générique.* Soit k un anneau. Donnez une structure de schéma naturelle à l'ensemble des matrices de taille (n,n) sur k. Démontrez que la matrice correspondant au point générique de ce schéma est semi-simple. Déduisez-en une démonstration du théorème de Cayley-Hamilton.

Exercice 42 Soit A un anneau et S,T des parties multiplicatives. On suppose que les morphismes canoniques $A \to S^{-1}(A)$ et $A \to T^{-1}A$ se complètent en un triangle commutatif avec $f : S^{-1}A \to T^{-1}A$. Que peut-on dire de S et T ? Et si f est un isomorphisme ?

Exercice 43 Montrez que tout schéma affine est quasi-compact, c'est-à-dire que de tout recouvrement ouvert on peut extraire un sous-recouvrement fini.

Rappel : Soit X une variété sur un corps k. Un $\mathcal{O}_X$-module localement libre de rang 1 est aussi appelé $\mathcal{O}_X$-module inversible, ou fibré en droites. Si $\mathcal{L}$ est un fibré en droites, le fibré $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L},\mathcal{O}_X)$ est encore un fibré en droites noté $\mathcal{L}^*$ ou $\mathcal{L}^{-1}$ et appelé l'inverse de $\mathcal{L}$. Le groupe de Picard de X est l'ensemble des classes d'isomorphisme de fibrés en droites sur X, muni du produit induit par le produit tensoriel.

Exercice 44 *Groupe de Picard de l'espace affine.* Soit k un corps et soit $\mathcal{L}$ un fibré en droites sur $\mathbb{A}^n_k$.
(1) Justifier que $\mathcal{L}$ possède une section non nulle σ.
(2) Soit $\mathrm{ev}_\sigma : \mathcal{L}^* \to \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_k}$, $u \mapsto u(\sigma)$ le morphisme d'évaluation, $\mathcal{I}$ le faisceau image, $I = \Gamma(\mathbb{A}^n_k, \mathcal{I})$. En écrivant la propriété de faisceau pour un recouvrement bien choisi de $\mathbb{A}^n_k$, montrez que I est principal.
(3) Soit P un générateur de I, montrez que σ/P est une section partout non nulle de $\mathcal{L}$ (ce qui veut dire non nulle dans chaque corps résiduel $k(x)$).
(4) En utilisant le lemme de Nakayama rappelé ci-dessous, déduisez-en que $\mathrm{Pic}(\mathbb{A}^n_k) = 0$.

Rappel : Théorème (Lemme de Nakayama) *Soit A un anneau et $I \subset A$ un idéal. Soit M un A-module fini. Si $M = IM$, alors il existe $a \in A$ avec $a \equiv 1 \mod I$, tel que $aM = 0$. En particulier, si A est local d'idéal maximal m, alors $M = mM$ implique $M = 0$.*

Remarque. La même preuve que ci-dessus montre en fait que pour tout schéma affine $X = \mathrm{Spec}(A)$ avec A factoriel, le groupe de Picard de X est trivial.

Exercice 45 *Groupe de Picard de l'espace projectif.* Soit k un corps et soit $\mathcal{L}$ un fibré en droites sur $\mathbb{P}^n_k = \mathrm{Proj}(k[x_0,\dots,x_n])$.
(1) En utilisant l'exercice précédent, montrez que $\mathcal{L}$ est trivial sur les ouverts standard U_i de $\mathbb{P}^n_k$.
(2) Montrez que les fonctions inversibles sur $U_i \cap U_j$ sont de la forme $\alpha_{ij}(x_i/x_j)^{l_{ij}}$ avec $\alpha_{ij} \in k^*$ et $l_{ij} \in \mathbb{Z}$.
(3) À partir de trivialisations de $\mathcal{L}$ sur U_i, utilisez la condition de cocycle pour montrer que la puissance l_{ij} dans le changement de carte est indépendante de (i,j). Admettant que $\mathrm{H}^1(\mathbb{P}^n_k, k^*) = 0$, où $k^\times$ est le faisceau constant sur $\mathbb{P}^n_k$, montrer qu'on peut changer les trivialisations initiales pour se ramener à $\alpha_{ij} = 1$.
(4) En déduire que $\mathcal{L} \simeq \mathcal{O}(l)$ pour un $l \in \mathbb{Z}$ puis que $\mathrm{Pic}(\mathbb{P}^n_k) \simeq \mathbb{Z}$.

Exercice 46 *Éclatement d'un sous-schéma fermé $Y \subset X$.* Soit k un corps et X un k-schéma de type fini, supposé réduit pour simplifier. Soit $Y \subset X$ un sous-schéma fermé. L'éclatement de Y dans X est un morphisme $\pi : \widetilde{X} \to X$ défini comme suit. On choisit des sections $f_1,\dots,f_n$ du faisceau d'idéaux de Y sur un ouvert dense $U \subset X$, définissant un morphisme

$$\begin{array}{rcl} f : U \setminus U \cap Y & \to & \mathbb{P}^{n-1}_k \\ x & \mapsto & (f_1(x) : \dots : f_n(x)) \, . \end{array}$$

Le graphe de f est le morphisme $\Gamma_f : U \setminus U \cap Y \to U \setminus U \cap Y \times \mathbb{P}^{n-1}_k \subset X \times \mathbb{P}^{n-1}_k$ et on note $\widetilde{X}$ l'image schématique de Γ_f dans $X \times \mathbb{P}^{n-1}_k$. Le morphisme $\pi : \widetilde{X} \to X$ est la projection sur le premier facteur. On admet que l'éclatement est indépendant du choix de U et de $f_1,\dots,f_n$.

(1) Justifiez que $\pi : \widetilde{X} \to X$ est un isomorphisme au-dessus de $X \setminus Y$.
(2) Calculez l'éclatement de l'origine dans $\mathbb{A}^n_k$, en regardant $\mathbb{A}^n_k$ comme une variété au sens classique ou au sens des schémas, selon votre préférence. Donnez des équations globales pour l'éclatement dans $\mathbb{A}^n_k \times \mathbb{P}^{n-1}_k$. Calculez la fibre au-dessus de l'origine (on suppose que la caractéristique de k n'est pas 2).
(3) Calculez l'éclatement de la courbe affine C d'équation $y^2 = x^2(x+1)$ en l'origine, en donnant deux cartes affines. Calculez la fibre au-dessus de l'origine.
(4) On considère la complétée projective $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^2_k$ de la courbe précédente. Donnez un plongement projectif de l'éclatement de $\mathcal{C}$ en l'origine, avec des équations homogènes explicites, sans chercher à prouver qu'elles engendrent bien l'idéal homogène de $\mathcal{C}$.

Exercice 47 *Calcul explicite local de l'éclatement.* Soit $X = \mathrm{Spec}(A)$ et $Y = V(f_1, \dots, f_n)$ un sous-schéma fermé. Soit $\widetilde{X} \subset X \times \mathbb{P}^{n-1}_{\mathbb{Z}}$ l'éclatement de X le long de Y. Soit U_i l'ouvert standard de $\mathbb{P}^{n-1}_{\mathbb{Z}}$. Montrez que l'idéal définissant sur $\widetilde{X}$ dans l'ouvert affine $X \times U_i$ est

$$\bigcup_{n \geq 0} (I : (f_i)^n) ,$$

où $I \subset A \otimes \mathbb{Z}[u_1/u_i, \dots, u_n/u_i]$ est l'idéal engendré par les éléments $f_i u_k/u_i - f_k$.

Exercice 48 La définition d'un éclatement n'utilise pas le fait que l'anneau de base k est un corps. Prenons pour anneau de base un anneau de valuation discrète R, d'uniformisante π, de corps des fractions K et de corps résiduel $k = R/(\pi)$. Soit $X = \mathbb{P}^1_R$ la droite projective sur R, et $\mathbb{P}^1_K$ resp. $\mathbb{P}^1_k$ la fibre ouverte resp. fermée de la projection $p : \mathbb{P}^1_R \to \mathrm{Spec}(R)$.
(1) Calculez l'éclatement $\widetilde{X} \to X$ en un point de la fibre fermée, comme sous-schéma fermé de $\mathbb{P}^3_R$. Montrez que $\widetilde{X}$ est une conique plane.
(2) Montrez que la fibre fermée de $\widetilde{X} \to \mathrm{Spec}(R)$ n'est pas lisse.

Exercice 49 Soit $N+1 = \dim_k \mathrm{H}^0(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{O}(d)) = \binom{n+d}{d}$ et soient $M_0, \dots, M_N$ les monômes de degré d en $n+1$ variables $x_0, \dots, x_n$. Soit $\nu_d : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^N$ le plongement de Veronese d-uple, qui envoie le point $a = (a_0, \dots, a_n)$ sur $(M_0(a), \dots, M_n(a))$. Les deux questions suivantes sont indépendantes.
(1) Calculez le degré de $\nu_d(\mathbb{P}^n)$ dans $\mathbb{P}^N$.
(2) Soit $H \subset \mathbb{P}^n$ une hypersurface donnée par une équation homogène $f(x_0, \dots, x_n) = 0$ de degré d. Montrer que $\mathbb{P}^n_k \setminus H$ est un schéma affine.

Autres idees d'exercices :
calcul de $H^*(X, \mathbb{Z})$ pour la réunion de trois droites.
exemples : grassmannienne, courbes elliptiques (mq la loi d'une variete abelienne est commutative), schémas en groupes.
groupe de picard de $\mathbb{A}^n$ et de $\mathbb{P}^n$.
Diviseurs de Weil et de Cartier, exemples et contre-exemples.
varietes lisses, localement factorielles, normales, exemples et contre-exemples.

Références

D. Eisenbud, J. Harris, *The geometry of schemes*, Graduate Texts in Mathematics No 197. Springer-Verlag, 2000.

J. Harris, *Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Mathematics No 52, Springer-Verlag, 1977.

R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Mathematics No 52, Springer-Verlag, 1977.

H. Matsumura, *Commutative Ring Theory*, Second edition, Cambridge Studies in Advanced Mathematics No 8, Cambridge University Press, 1989.

D. Mumford, *The red book of varieties and schemes*, Second, expanded edition, Lecture Notes in Mathematics No 1358, Springer-Verlag, 1999.

C. Peskine, *An algebraic introduction to complex projective geometry. 1. Commutative algebra*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics No 47, Cambridge University Press, 1996.