# Géométrie Algébrique 2

Examen du vendredi 8 décembre 2023

*Tous les documents peuvent être utilisés, sans accès à internet.*
*On accordera une grande importance à la précision des références aux théorèmes utilisés.*
*On pourra utiliser librement le résultat d'un exercice dans les suivants.*

**Exercice 1.** Donnez *sans justification* des exemples pour les objets suivants :

1. un schéma quasi-compact, et un schéma non quasi-compact ;
2. un schéma réduit, et un schéma non réduit ;
3. un schéma à groupe de Picard nul, et un schéma à groupe de Picard non nul ;
4. un faisceau abélien sur la droite affine $\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$ qui est quasi-cohérent, et un qui ne l'est pas.

$\boxed{\text{2 pts}}$ 1. *La droite affine $\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$ est quasi-compacte mais une réunion disjointe infinie $\amalg_{i\in\mathbb{N}} \operatorname{Spec}(\mathbb{C})$ de points complexes ne l'est pas.*
2. *La droite affine $\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$ est réduite, mais le schéma $\operatorname{Spec}(\mathbb{C}[X]/(X^2))$ ne l'est pas.*
3. *Le groupe de Picard de la droite affine $\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$ est nul, mais celui de la droite projective $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ contient $\mathbb{Z}$ (via les faisceaux $\mathcal{O}(d)$).*
4. *Sur $X = \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$, le faisceau structural $\mathcal{O}_X$ est quasi-cohérent alors que le faisceau constant $\underline{\mathbb{Z}}$ ne l'est pas (ce n'est pas un faisceau de $\mathcal{O}_X$-modules, et même pas un faisceau de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels).*

**Exercice 2** Soit $X$ un schéma. On définit un préfaisceau en posant, pour tout ouvert $U \subset X$ :

$$\mathscr{N}(U) = \{f \in \mathcal{O}_X(U);\ f_x \text{ est nilpotente dans } \mathcal{O}_{X,x}, \text{ pour tout } x \in U\}.$$

1. Montrez que si $X$ est affine, alors $\mathscr{N}(X)$ est le nilradical de l'anneau $A = \mathcal{O}_X(X)$.
2. En général, montrez que $\mathscr{N}$ est un faisceau d'idéaux quasi-cohérent de $\mathcal{O}_X$.
3. On suppose que $X$ est noethérien et on note $X_{\text{red}} = V(\mathscr{N})$ appelé *sous-schéma réduit de* $X$.
   (a) Montrez qu'il existe un entier $k$ tel que $\mathscr{N}^k = 0$.
   (b) Montrez qu'il existe une suite finie $X_{\text{red}} = X_1 \hookrightarrow X_2 \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow X_k = X$ composée d'immersions fermées, chacune définie par un idéal quasi-cohérent de carré nul.

$\boxed{\text{2 pts}}$ 1. *On suppose que $X = \operatorname{Spec} A$. Par définition $\mathscr{N}(X)$ est l'ensemble des $f \in A$ telles que pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$, l'image de $f$ dans $A_\mathfrak{p}$ est nilpotente. Ceci signifie qu'il existe $s_\mathfrak{p} \in A\backslash\mathfrak{p}$ et un entier $n_\mathfrak{p}$ tels que $s_\mathfrak{p} f^{n_\mathfrak{p}} = 0$ dans $A$, donc l'image de $f$ dans le localisé $A[1/s_\mathfrak{p}]$ est nilpotente. Les ouverts principaux $U_\mathfrak{p} = D(s_\mathfrak{p})$ recouvrent $X$ puisque $\mathfrak{p} \in U_\mathfrak{p}$, et comme $X$ est quasi-compact on peut extraire un sous-recouvrement fini indicé par une famille finie de premiers $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_r$. On notera $U_i = U_{\mathfrak{p}_i}$, $s_i = s_{\mathfrak{p}_i}$, $n_i = n_{\mathfrak{p}_i}$. Comme $U_1, \dots, U_r$ recouvrent $X$, il existe une écriture $a_1s_1 + \cdots + a_rs_r = 1$. En posant $n = \max(n_1, \dots, n_r)$ on a $s_i f^n = 0$ pour tout $i$, donc $f^n = (a_1s_1 + \cdots + a_rs_r)f^n = 0$. Il s'ensuit que $\mathscr{N}(X)$ est inclus dans le nilradical de $A$ ; la réciproque est immédiate, donc on a égalité.*

$\boxed{\text{2 pts}}$ 2. *Par un théorème du cours, il suffit de montrer que pour tout ouvert affine $U = \operatorname{Spec} A$ de $X$ et tout $g \in A$, l'application $\mathscr{N}(U)_g \to \mathscr{N}(D(g))$ est bijective. D'après la question précédente, il s'agit de démontrer que l'application $\mathrm{Nil}(A)_g \to \mathrm{Nil}(A_g)$ est bijective. L'injectivité provient du fait que pour $f \in \mathrm{Nil}(A)$ et $d$ entier, si l'image de $f/g^d$ dans $A_g$ est nulle alors il existe $m$ entier tel que $g^m f = 0$ donc $f/g^d = 0$ dans $\mathrm{Nil}(A)_g$. La surjectivité provient du fait que si $f/g^d \in A_g$ est nilpotent, il existe $n, m$ tels que $g^m f^n = 0$. Dans ce cas $(fg)^{\max(m,n)} = 0$ donc $fg$ est nilpotent dans $A$, d'où découle que $f/g^d = (fg)/g^{d+1}$ est (l'image d')un élément du localisé $\mathrm{Nil}(A)_g$. Ceci conclut.*

$\boxed{\text{2 pts}}$ 3.(a) *Puisque $X$ est noethérien, il est recouvert par un nombre fini d'ouverts affines $U_1, \dots, U_r$ dont les anneaux de fonctions $A_i$ sont noethériens. Le nilradical $N_i$ de $A_i$ étant de type fini, il existe $k_i$ tel que $(N_i)^{k_i} = 0$ (la formule du binôme de Newton montre qu'il suffit de prendre $k_i$ égal au maximum des indices de nilpotence des éléments d'une partie génératrice finie de l'idéal $N_i$). D'après la question 1 on a alors $\mathscr{N}(U_i)^{k_i} = 0$ donc $(\mathscr{N}_{|U_i})^{k_i} = 0$, par quasi-cohérence. Posons $k = \max(k_1, \dots, k_r)$. Alors $\mathscr{N}^k$ est nul en restriction à chacun des $U_i$, donc c'est le faisceau nul.*

$\boxed{\text{2 pts}}$ 3.(b) *Le produit $\mathscr{I}\mathscr{J}$ de deux (faisceaux d')idéaux quasi-cohérents $\mathscr{I}, \mathscr{J}$ est quasi-cohérent car c'est l'image du morphisme de $\mathcal{O}_X$-modules $\mathscr{I} \otimes \mathscr{J} \to \mathcal{O}_X \otimes \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X$ (la seconde flèche est la multiplication). On a donc une suite d'idéaux quasi-cohérents $0 = \mathscr{N}^k \subset \mathscr{N}^{k-1} \subset \cdots \subset \mathscr{N}$. Les sous-schémas fermés $X_i = V(\mathscr{N}^i) = \mathrm{Spec}_X(\mathcal{O}_X/\mathscr{N}^i)$ forment une suite $X_{\mathrm{red}} = V(\mathscr{N}) = X_1 \hookrightarrow X_2 \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow X_k = X$. L'immersion fermée $X_i = \mathrm{Spec}_X(\mathcal{O}_X/\mathscr{N}^i) \hookrightarrow X_{i+1} = \mathrm{Spec}_X(\mathcal{O}_X/\mathscr{N}^{i+1})$ est définie par l'idéal quasi-cohérent $\mathscr{N}^i/\mathscr{N}^{i+1} \subset \mathcal{O}_X/\mathscr{N}^{i+1}$. Cet idéal est de carré nul car $(\mathscr{N}^i)^2 \subset \mathscr{N}^{i+1}$.*

**Exercice 3.** Soit $X$ un schéma noethérien. On pourra utiliser les résultats de l'exercice précédent sur le faisceau nilradical $\mathscr{N}$. On note $X_{\mathrm{red}} = V(\mathscr{N})$ le sous-schéma réduit.

1. On se propose de montrer que $X$ est affine lorsque $X_{\mathrm{red}}$ l'est, en utilisant le théorème suivant dû à Serre : *$X$ est affine si et seulement si $\mathrm{H}^1(X, \mathscr{F}) = 0$ pour tout faisceau quasi-cohérent $\mathscr{F}$.*
   (a) Montrez que pour tout $j \geqslant 0$, le faisceau quotient $\mathscr{G}_j = \mathscr{N}^j\mathscr{F}/\mathscr{N}^{j+1}\mathscr{F}$ est un faisceau de $\mathcal{O}_X/\mathscr{N}$-modules, donc égal à $i_*i^*(\mathscr{G}_j)$ où $i : X_{\mathrm{red}} \to X$ est l'immersion fermée.
   (b) En utilisant les suites exactes $0 \to \mathscr{N}^{j+1}\mathscr{F} \to \mathscr{N}^j\mathscr{F} \to \mathscr{N}^j\mathscr{F}/\mathscr{N}^{j+1}\mathscr{F} \to 0$, démontrez que si $X_{\mathrm{red}}$ est affine, alors $X$ aussi.
2. On se propose de montrer que $\mathrm{Pic}(X) = \mathrm{Pic}(X_{\mathrm{red}})$ lorsque $X$ est affine, en utilisant la description $\mathrm{Pic}(X) = \mathrm{H}^1(X, \mathcal{O}_X^\times)$, où $\mathcal{O}_X^\times$ désigne le faisceau multiplicatif des fonctions inversibles. (*Il se trouve que le $\mathrm{H}^1$ au sens des foncteurs dérivés et le $\mathrm{H}^1$ au sens de Čech sont isomorphes.*)
   (a) Soient $\mathscr{I} \subset \mathcal{O}_X$ un faisceau quasi-cohérent d'idéaux tel que $\mathscr{I}^2 = 0$ et $Y$ le sous-schéma fermé d'idéal $\mathscr{I}$. Montrez qu'on a une suite exacte de faisceaux sur $X$ :
   $$0 \longrightarrow \mathscr{I} \xrightarrow{u} \mathcal{O}_X^\times \longrightarrow \mathcal{O}_Y^\times \longrightarrow 0$$
   où $u(x) = 1+x$ et on a identifié $\mathcal{O}_Y^\times$ avec son image directe par l'immersion fermée $Y \hookrightarrow X$.
   (b) On suppose que $X$ est affine et noethérien. En prenant la suite exacte longue de cohomologie et en utilisant l'exercice 2, démontrez que $\mathrm{Pic}(X) = \mathrm{Pic}(X_{\mathrm{red}})$.

$\boxed{\text{2 pts}}$ 1.(a) *Comme $\mathscr{N} \cdot \mathscr{N}^j\mathscr{F} \subset \mathscr{N}^{j+1}\mathscr{F}$, le faisceau de $\mathcal{O}_X$-modules $\mathscr{G}_j = \mathscr{N}^j\mathscr{F}/\mathscr{N}^{j+1}\mathscr{F}$ est annulé par l'idéal $\mathscr{N}$. Il s'ensuit qu'il hérite d'une structure de $\mathcal{O}_X/\mathscr{N}$-module : le morphisme de faisceaux d'anneaux $\mathcal{O}_X \to \mathscr{E}nd(\mathscr{G}_j)$ qui définit la structure de module se factorise par l'anneau* *quotient $\mathcal{O}_X/\mathcal{N}$. Utilisons les formules qui décrivent les images directes et inverses de faisceaux quasi-cohérents dans le cas affine pour montrer que la flèche d'adjonction $\mathcal{G}_j \to i_*i^*(\mathcal{G}_j)$ est un isomorphisme. Sur un ouvert affine $U = \mathrm{Spec}(A)$ de $X$, on a $\mathcal{N}_{|U} = \widetilde{N}$ avec $N = \mathrm{Nil}(A)$ et $\mathcal{G}_{j|U} = \widetilde{M}$ où $M$ est un $A$-module tel que $NM = 0$. En restriction à $U$, l'adjonction n'est autre que $M \to (M \otimes_A A/N)_A$ qui est un isomorphisme, comme souhaité.*

$\boxed{\text{2 pts}}$ 1.(b) *Dans l'exercice 2 on a montré qu'il existe un entier $k$ tel que $\mathcal{N}^k = 0$. Regardons la suite exacte longue de cohomologie associée à la suite exacte courte de l'énoncé ; sa partie de degré 1 s'écrit $\mathrm{H}^1(X, \mathcal{N}^{j+1}\mathcal{F}) \to \mathrm{H}^1(X, \mathcal{N}^j\mathcal{F}) \to \mathrm{H}^1(X, \mathcal{G}_j)$. D'après la question précédente $\mathrm{H}^1(X, \mathcal{G}_j) = \mathrm{H}^1(X, i_*i^*\mathcal{G}_j) = \mathrm{H}^1(X_{\mathrm{red}}, i^*\mathcal{G}_j)$. Comme $X_{\mathrm{red}}$ est supposé affine, ce groupe $\mathrm{H}^1$ d'un faisceau quasi-cohérent est nul, donc la flèche $\mathrm{H}^1(X, \mathcal{N}^{j+1}\mathcal{F}) \to \mathrm{H}^1(X, \mathcal{N}^j\mathcal{F})$ est surjective. En composant ces surjections de $j = 0$ à $k-1$ on trouve une surjection $\mathrm{H}^1(X, \mathcal{N}^k\mathcal{F}) \to \mathrm{H}^1(X, \mathcal{F})$. Comme $\mathcal{N}^k = 0$, ceci montre que $\mathrm{H}^1(X, \mathcal{F}) = 0$, donc d'après le théorème de Serre $X$ est affine.*

$\boxed{\text{2 pts}}$ 2.(a) *Montrons d'abord que la suite est bien définie, ce qui consiste à examiner le morphisme $u$. Donnons-nous deux sections locales $x, y$ de $\mathcal{I}$ sur un ouvert $U$. L'application $u$ est bien définie, car $(1+x)(1-x) = 1 - x^2 = 1$ donc $1 + x$ est une section inversible de $\mathcal{O}_X$. C'est un morphisme de faisceaux abéliens, car $\mathcal{I}^2 = 0$ entraîne $xy = 0$ donc $u(x)u(y) = (1+x)(1+y) = 1+x+y = u(x+y)$. Montrons ensuite que la suite est exacte. Il suffit de montrer que pour chaque point $x \in X$, la suite sur les germes $0 \to \mathcal{I}_x \to \mathcal{O}_{X,x}^\times \to \mathcal{O}_{Yx}^\times \to 0$ est exacte. Notons $I = \mathcal{I}_x$ et $A = \mathcal{O}_{X,x}$.*

- *l'injectivité de $I \to A^\times$ est claire.*
- *La surjectivité de $A^\times \to (A/I)^\times$ provient du fait que si $\overline{u} \in (A/I)^\times$ est inversible, n'importe quel relevé $u \in A$ est inversible : en effet, si $\overline{v} = \overline{u}^{-1} \in (A/I)^\times$ et $v \in A$ est un relevé, alors $\overline{u}\,\overline{v} = 1$ entraîne que $uv = 1 + i$ pour un $i \in I$, donc $uv(1-i) = 1$ et $u$ est inversible.*
- *l'exactitude au milieu en découle car nous venons de montrer que le noyau de $A^\times \to B^\times$ est $1 + I$.*

$\boxed{\text{2 pts}}$ 2.(b) *On a montré dans l'exercice 2 qu'il existe une suite finie $X_{\mathrm{red}} \to X_2 \to \cdots \to X_k = X$ composée d'immersions fermées, chacune définie par un idéal quasi-cohérent de carré nul. Pour montrer que $\mathrm{Pic}(X) = \mathrm{Pic}(X_{\mathrm{red}})$, il suffit de montrer que $\mathrm{Pic}(X_i) = \mathrm{Pic}(X_{i+1})$ pour chaque $i$. On est ainsi ramené à considérer le cas d'une immersion fermée $Y \hookrightarrow X$ comme dans la question précédente, avec $X$ affine. La suite exacte longue en cohomologie associée à la suite exacte courte de la question précédente fournit $\mathrm{H}^1(X, \mathcal{I}) \to \mathrm{H}^1(X, \mathcal{O}_X^\times) \to \mathrm{H}^1(X, \mathcal{O}_Y^\times) \to \mathrm{H}^2(X, \mathcal{I})$. Comme $X$ est affine et $\mathcal{I}$ quasi-cohérent, on a $\mathrm{H}^1(X, \mathcal{I}) = \mathrm{H}^2(X, \mathcal{I}) = 0$. Comme $\mathcal{O}_Y^\times$ est supporté sur le sous-schéma fermé $Y$, on a $\mathrm{H}^1(X, \mathcal{O}_Y^\times) = \mathrm{H}^1(Y, \mathcal{O}_Y^\times)$. Finalement $\mathrm{H}^1(X, \mathcal{O}_X^\times) \to \mathrm{H}^1(Y, \mathcal{O}_Y^\times)$ est un isomorphisme, ce qui est le résultat demandé compte tenu de la description cohomologique de $\mathrm{Pic}(X)$.*

**Exercice 4.** Soit $X$ un schéma propre sur un corps $k$, de dimension $m = \dim(X)$. Pour tout faisceau cohérent $\mathcal{F}$ sur $X$, les $k$-espaces vectoriels $\mathrm{H}^i(X, \mathcal{F})$ sont de dimension finie d'après le théorème de finitude, et nuls pour $i > m$. On appelle *caractéristique d'Euler-Poincaré de $\mathcal{F}$* l'entier :

$$\chi(\mathcal{F}) = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \dim \mathrm{H}^i(X, \mathcal{F}).$$

1. Démontrez que pour toute suite exacte de faisceaux cohérents $0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$, on a

$$\chi(\mathcal{F}) = \chi(\mathcal{F}') + \chi(\mathcal{F}'').$$

Si $X$ est une sous-variété fermée de l'espace projectif $P = \mathbb{P}^r_k$, on note $\mathcal{O}_X(1)$ l'image inverse de $\mathcal{O}_P(1)$ sur $X$ et on pose $\mathscr{F}(n) = \mathscr{F} \otimes \mathcal{O}_X(1)$. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on note $F(n) = \chi(\mathscr{F}(n))$.

2. Lorsque $X = H$ est une hypersurface de $\mathbb{P}^r$ définie par une équation $f$ de degré $d$, et $\mathscr{F} = \mathcal{O}_H$, démontrez que $F$ est un polynôme en $n$ de terme dominant $\frac{d}{(r-1)!}n^{r-1}$.

$\boxed{\text{2 pts}}$ 1. *C'est un fait classique que dans une suite exacte finie $0 \to E_1 \to \cdots \to E_n \to 0$ de $k$-espaces vectoriels de dimension finie, la somme alternée des dimensions est nulle (c'est facile pour $n \leqslant 3$, et le cas général se démontre par récurrence à l'aide des suites exactes plus courtes $0 \to E_1 \to E_2 \to E_2/E_1 \to 0$ et $0 \to E_2/E_2 \to E_3 \to \cdots \to E_n \to 0$). Le résultat en découle, en prenant la somme alternée des dimensions dans la suite exacte longue de cohomologie $0 \to \mathrm{H}^0(\mathscr{F}') \to \mathrm{H}^0(\mathscr{F}) \to \mathrm{H}^0(\mathscr{F}'') \to \cdots \to \mathrm{H}^m(\mathscr{F}') \to \mathrm{H}^m(\mathscr{F}) \to \mathrm{H}^m(\mathscr{F}'') \to 0$.*

$\boxed{\text{3 pts}}$ 2. *On a une suite exacte courte de faisceaux $0 \to \mathcal{O}_P(-d) \to \mathcal{O}_P \to \mathcal{O}_H \to 0$ où la flèche $\mathcal{O}_P(-d) \to \mathcal{O}_P$ est la multiplication par $f$, et $\mathcal{O}_H$ est identifié avec son image directe par l'immersion fermée $H \hookrightarrow P$. En tensorisant par $\mathcal{O}_P(n)$ on obtient $0 \to \mathcal{O}_P(n-d) \to \mathcal{O}_P(n) \to \mathcal{O}_H(n) \to 0$. Dans la suite on notera $\chi_P$ et $\chi_H$ les caractéristique d'Euler-Poincaré sur $P$ et sur $H$. Le résultat de la question 1 fournit $F(n) = \chi_H(\mathcal{O}_H(n)) = \chi_P(\mathcal{O}_P(n)) - \chi_P(\mathcal{O}_P(n-d))$. On utilise alors le théorème de calcul de la cohomologie des faisceaux inversibles $\mathcal{O}(n)$ sur l'espace projectif, qui fournit $h^0(\mathcal{O}(n))$ et $h^r(\mathcal{O}(n))$, où l'on note $h^i$ les dimensions des groupes de cohomologie $\mathrm{H}^i$. On voit, en considérant séparément les cas $n \leqslant -r-1$, $-r \leqslant n \leqslant -1$ et $n \geqslant 0$ que pour toute valeur de $n$ on a $\chi_P(\mathcal{O}_P(n)) = h^0(\mathcal{O}(n)) + (-1)^r h^r(\mathcal{O}(n)) = h^0(\mathcal{O}(n)) + (-1)^r h^0(\mathcal{O}(-n-r-1)) = \frac{1}{r!}(n+r)(n+r-1)\dots(n+1)$. Par différence, on trouve $r!F(n) = (n+r)\dots(n+1) - (n-d+r)\dots(n-d+1)$. Dans ce polynôme en $n$, les coefficients de $n^r$ s'annulent et le coefficient de $n^{r-1}$ est égal à $\frac{r(r+1)}{2} - (\frac{r(r+1)}{2} - rd) = rd$. Ceci démontre que $F$ est un polynôme en $n$ de terme dominant $\frac{d}{(r-1)!}n^{r-1}$.*