Géométrie Algébrique 2

Examen du vendredi 8 décembre 2023

Tous les documents peuvent être utilisés, sans accès à internet.
On accordera une grande importance à la précision des références aux théorèmes utilisés.
On pourra utiliser librement le résultat d'un exercice dans les suivants.

Exercice 1. Donnez *sans justification* des exemples pour les objets suivants :

1. un schéma quasi-compact, et un schéma non quasi-compact ;
2. un schéma réduit, et un schéma non réduit ;
3. un schéma à groupe de Picard nul, et un schéma à groupe de Picard non nul ;
4. un faisceau abélien sur la droite affine $\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$ qui est quasi-cohérent, et un qui ne l'est pas.

Exercice 2 Soit X un schéma. On définit un préfaisceau en posant, pour tout ouvert $U \subset X$:

$$\mathscr{N}(U) = \{f \in \mathcal{O}_X(U);\ f_x \text{ est nilpotente dans } \mathcal{O}_{X,x}, \text{ pour tout } x \in U\}.$$

1. Montrez que si X est affine, alors $\mathscr{N}(X)$ est le nilradical de l'anneau $A = \mathcal{O}_X(X)$.
2. En général, montrez que $\mathscr{N}$ est un faisceau d'idéaux quasi-cohérent de $\mathcal{O}_X$.
3. On suppose que X est noethérien et on note $X_{\mathrm{red}} = V(\mathscr{N})$ appelé *sous-schéma réduit de* X.
   (a) Montrez qu'il existe un entier k tel que $\mathscr{N}^k = 0$.
   (b) Montrez qu'il existe une suite finie $X_{\mathrm{red}} = X_1 \hookrightarrow X_2 \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow X_k = X$ composée d'immersions fermées, chacune définie par un idéal quasi-cohérent de carré nul.

Exercice 3. Soit X un schéma noethérien. On pourra utiliser les résultats de l'exercice précédent sur le faisceau nilradical $\mathscr{N}$. On note $X_{\mathrm{red}} = V(\mathscr{N})$ le sous-schéma réduit.

1. On se propose de montrer que X est affine lorsque X_{red} l'est, en utilisant le théorème suivant dû à Serre : X *est affine si et seulement si* $\mathrm{H}^1(X, \mathscr{F}) = 0$ *pour tout faisceau quasi-cohérent* $\mathscr{F}$.
   (a) Montrez que pour tout $j \geqslant 0$, le faisceau quotient $\mathscr{G}_j = \mathscr{N}^j\mathscr{F}/\mathscr{N}^{j+1}\mathscr{F}$ est un faisceau de $\mathcal{O}_X/\mathscr{N}$-modules, donc égal à $i_*i^*(\mathscr{G}_j)$ où $i : X_{\mathrm{red}} \to X$ est l'immersion fermée.
   (b) En utilisant les suites exactes $0 \to \mathscr{N}^{j+1}\mathscr{F} \to \mathscr{N}^j\mathscr{F} \to \mathscr{N}^j\mathscr{F}/\mathscr{N}^{j+1}\mathscr{F} \to 0$, démontrez que si X_{red} est affine, alors X aussi.
2. On se propose de montrer que $\mathrm{Pic}(X) = \mathrm{Pic}(X_{\mathrm{red}})$ lorsque X est affine, en utilisant la description $\mathrm{Pic}(X) = \mathrm{H}^1(X, \mathcal{O}_X^\times)$, où $\mathcal{O}_X^\times$ désigne le faisceau multiplicatif des fonctions inversibles. (*Il se trouve que le* H^1 *au sens des foncteurs dérivés et le* H^1 *au sens de Čech sont isomorphes.*)

(a) Soient $\mathscr{I} \subset \mathcal{O}_X$ un faisceau quasi-cohérent d'idéaux tel que $\mathscr{I}^2 = 0$ et Y le sous-schéma fermé d'idéal $\mathscr{I}$. Montrez qu'on a une suite exacte de faisceaux sur X :

$$0 \longrightarrow \mathscr{I} \xrightarrow{u} \mathcal{O}_X^\times \longrightarrow \mathcal{O}_Y^\times \longrightarrow 0$$

où $u(x) = 1+x$ et on a identifié $\mathcal{O}_Y^\times$ avec son image directe par l'immersion fermée $Y \hookrightarrow X$.

(b) On suppose que X est affine et noethérien. En prenant la suite exacte longue de cohomologie et en utilisant l'exercice 2, démontrez que $\mathrm{Pic}(X) = \mathrm{Pic}(X_{\mathrm{red}})$.

Exercice 4. Soit X un schéma propre sur un corps k, de dimension $m = \dim(X)$. Pour tout faisceau cohérent $\mathscr{F}$ sur X, les k-espaces vectoriels $\mathrm{H}^i(X, \mathscr{F})$ sont de dimension finie d'après le théorème de finitude, et nuls pour $i > m$. On appelle *caractéristique d'Euler-Poincaré de $\mathscr{F}$* l'entier :

$$\chi(\mathscr{F}) = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \dim \mathrm{H}^i(X, \mathscr{F}).$$

1. Démontrez que pour toute suite exacte de faisceaux cohérents $0 \to \mathscr{F}' \to \mathscr{F} \to \mathscr{F}'' \to 0$, on a

$$\chi(\mathscr{F}) = \chi(\mathscr{F}') + \chi(\mathscr{F}'').$$

Si X est une sous-variété fermée de l'espace projectif $P = \mathbb{P}_k^r$, on note $\mathcal{O}_X(1)$ l'image inverse de $\mathcal{O}_P(1)$ sur X et on pose $\mathscr{F}(n) = \mathscr{F} \otimes \mathcal{O}_X(1)$. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on note $F(n) = \chi(\mathscr{F}(n))$.

2. Lorsque $X = H$ est une hypersurface de $\mathbb{P}^r$ définie par une équation f de degré d, et $\mathscr{F} = \mathcal{O}_H$, démontrez que F est un polynôme en n de terme dominant $\frac{d}{(r-1)!} n^{r-1}$.