Géométrie Algébrique 1

À rendre avant lundi 6 novembre 2023

Tous les anneaux sont supposés commutatifs et unitaires.

1. Soit R un anneau. Démontrez que les données suivantes sont équivalentes :
   (a) un morphisme de R-schémas $f : \mathbb{A}^n_R \to \mathbb{A}^m_R$,
   (b) un m-uplet de polynômes $f_1, \dots, f_m \in R[x_1, \dots, x_n]$,
   (c) une famille d'applications $f(B) : B^n \to B^m$, pour toute R-algèbre B, fonctorielles en B.

$\boxed{\text{1+1 pts}}$ *Par l'équivalence de catégories* Spec *entre anneaux et schémas affines, il est équivalent de se donner un morphisme de R-schémas $f : \mathbb{A}^n_R \to \mathbb{A}^m_R$ ou un morphisme de R-algèbres $R[t_1, \dots, t_m] \to R[x_1, \dots, x_n]$. Par la propriété universelle des algèbres de polynômes, c'est équivalent à se donner des polynômes $f_1, \dots, f_m \in R[x_1, \dots, x_n]$, donc* (a) $\Leftrightarrow$ (b). *Par ailleurs, d'après le lemme de Yoneda qui affirme la pleine fidélité du foncteur de points h_X d'un R-schéma, il est équivalent de se donner $f : \mathbb{A}^n_R \to \mathbb{A}^m_R$ ou le morphisme de foncteurs $h_f : h_{\mathbb{A}^n_R} \to h_{\mathbb{A}^m_R}$, c'est-à-dire une collection d'applications $f(B) : B^n \to B^m$, pour toute R-algèbre B, fonctoriellement en B, donc* (a) $\Leftrightarrow$ (c).

2. On appelle *infinitésimal* un n-uplet $\epsilon = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) \in B^n$ tel que $\epsilon_i\epsilon_j = 0$ pour $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Démontrez que si $f : \mathbb{A}^n_R \to \mathbb{A}^m_R$ est comme ci-dessus, il existe une matrice $J = J(x_1, \dots, x_n)$ de taille (m, n) à coefficients dans $R[x_1, \dots, x_n]$ telle que pour toute R-algèbre B, pour tout $b \in B^n$, et pour tout infinitésimal $\epsilon \in B^n$, on ait $f(b + \epsilon) = f(b) + J(b)\epsilon$.

$\boxed{\text{2 pts}}$ *Soit $b \in B^n$ quelconque et $\epsilon \in B^n$ infinitésimal. Si $n = 1$, on a $\epsilon^2 = 0$ et la formule du binôme de Newton fournit $(b+\epsilon)^i = b^i + ib^{-1}\epsilon$. En utilisant cette propriété jointe à la propriété d'annulation des doubles produits $\epsilon_i\epsilon_j = 0$, pour $F \in R[x_1, \dots, x_n]$ on obtient la formule de Taylor suivante :*

$$F(b_1 + \epsilon_1, \dots, b_n + \epsilon_n) = F(b_1, \dots, b_n) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_j}(b_1, \dots, b_n)\, \epsilon_j.$$

Notons J la matrice (jacobienne) de coefficients $J_{i,j} = \partial f_i / \partial x_j$. La formule précédente fournit :

$$\begin{aligned} f(b+\epsilon) &= \Big(f_1(b_1 + \epsilon_1, \dots, b_n + \epsilon_n), \dots, f_m(b_1 + \epsilon_1, \dots, b_n + \epsilon_n) \Big) \\ &= \left(f_1(b_1, \dots, b_n) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(b_1, \dots, b_n)\, \epsilon_j \;, \dots, \; f_m(b_1, \dots, b_n) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_m}{\partial x_j}(b_1, \dots, b_n)\, \epsilon_j \right) \\ &= f(b) + J(b)\epsilon. \end{aligned}$$

Soit $R \to A$ un morphisme d'anneaux et M un A-module. Une application $d : A \to M$ est appelée *R-dérivation* si elle est R-linéaire et si $d(xy) = xd(y) + yd(x)$ pour tous $x, y \in A$. On note $\mathrm{Der}_R(A, M)$ l'ensemble des R-dérivations ; c'est un A-module.

3. Démontrez que le foncteur $\mathrm{Mod}(A) \to \mathrm{Mod}(A)$, $M \mapsto \mathrm{Der}_R(A, M)$ est coreprésentable, c'est-à-dire qu'il existe un A-module $\Omega_{A/R}$ muni d'une dérivation $d : A \to \Omega_{A/R}$, tel que l'application

$$\mathrm{Hom}_A(\Omega_{A/R}, M) \longrightarrow \mathrm{Der}_R(A, M), \quad u \longmapsto u \circ d$$

est un isomorphisme fonctoriel en M. Le module $\Omega_{A/R}$ est appelé *module des 1-formes différentielles (de Kähler)* de A/R.

$\boxed{\text{2 pts}}$ *Notons $\Omega_{A/R} = L/R$ le quotient du A-module libre $L = \oplus_{x\in A} A dx$ de base $\{dx, x \in A\}$ par le sous-module R engendré par les éléments $d(rx+y) - rdx - dy$ et $d(xy) - xdy - ydx$ pour $r \in R$ et $x, y \in A$. Notons $d : A \to \Omega_{A/R}$ l'application définie par $d(a) = da$. Par construction même de $\Omega_{A/R}$, l'application d est une R-dérivation. Soit M un A-module. Par propriété d'une présentation par générateurs et relations d'un module, la donnée d'un morphisme de A-modules $u : L/R \to M$ est équivalente à la donnée des images $\delta(x) := u(dx)$ contraintes à vérifier les relations de R-linéarité $\delta(rx+y) - r\delta(x) - \delta(y) = 0$ et les « relations de Leibnitz » $\delta(xy) - x\delta(y) - y\delta(x) = 0$. Ceci est exactement dire que $\delta : A \to M$, $x \mapsto \delta(x)$ est une R-dérivation. On a ainsi obtenu une bijection $\mathrm{Hom}_A(\Omega_{A/R}, M) \to \mathrm{Der}_R(A, M)$, $u \mapsto \delta = u \circ d$. (Cette construction de $\Omega_{A/R}$ est celle du livre de Eisenbud,* Commutative algebra*, chapitre 16.)*

4. On suppose que $A = R[x_1, \ldots, x_n]/(f_1, \ldots, f_m)$ avec $n, m \geqslant 1$ entiers. Montrez que $X = \mathrm{Spec}(A)$ est la fibre en 0 d'un morphisme de R-schémas $f : \mathbb{A}^n_R \to \mathbb{A}^m_R$. Si J est comme dans la question 2, de transposée J^*, et $R[x] := R[x_1, \ldots, x_n]$, donnez un isomorphisme de A-modules :

$$\Omega_{A/R} \simeq \mathrm{coker}(J^* : R[x]^m \longrightarrow R[x]^n) \otimes_{R[x]} A.$$

$\boxed{\text{1+2 pts}}$ *Il faut comprendre 0 comme étant le R-point $0 : \mathrm{Spec}\, R \to \mathbb{A}^m_R$ donné par le morphisme d'algèbres $R[t_1, \ldots, t_m] \to R$, $t_i \mapsto 0$. Ce morphisme identifie R au quotient de $R[t_1, \ldots, t_m]$ par l'idéal $I = (t_1, \ldots, t_m)$. Si $f : \mathbb{A}^n_R \to \mathbb{A}^m_R$ est donné par le uplet de polynômes $f_1, \ldots, f_m$ alors le produit fibré $\mathbb{A}^n_R \times_{f, \mathbb{A}^m_R, 0} \mathrm{Spec}(R)$ est le schéma affine déterminé par la R-algèbre*

$$\begin{aligned} R[x_1, \ldots, x_n] \otimes_{R[t_1,\ldots,t_m]} R &= R[x_1, \ldots, x_n] \otimes_{R[t_1,\ldots,t_m]} (R[t_1, \ldots, t_m]/I) \\ &= R[x_1, \ldots, x_n]/IR[x_1, \ldots, x_n] \\ &= R[x_1, \ldots, x_n]/(f_1, \ldots, f_m). \end{aligned}$$

Ceci montre que $X = \mathrm{Spec}(A)$ est la fibre en 0 de f. Maintenant notons $J = (\partial f_i/\partial x_j)$ comme précédemment. Conservons les notations commodes du calcul différentiel en notant $dx_1, \ldots, dx_n$ la base canonique du $R[x]$-module $R[x]^n = \oplus R[x] dx_i$. Introduisons le A-module défini par le conoyau du membre de droite de l'isomorphisme de l'énoncé :

$$\Psi_{A/R} = \frac{A dx_1 \oplus \cdots \oplus A dx_n}{\frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n} dx_n, \ \ldots \ , \frac{\partial f_m}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial f_m}{\partial x_n} dx_n}.$$

La différentiation des polynômes $P \mapsto d'P := \sum_{i=1}^n \frac{\partial P}{\partial x_i} dx_i$ induit une R-dérivation $d' : R[x] \to \Psi_{A/R}$ qui est nulle sur l'idéal $(f_1, \ldots, f_m)$ donc induit une dérivation $d : A \to \Psi_{A/R}$. Montrons que $(\Psi_{A/R}, d)$ vérifie la propriété universelle de $\Omega_{A/R}$. Soit $u : \Psi_{A/R} \to M$ un morphisme de A-modules. Par définition de $\Psi_{A/R}$, ce morphisme est déterminé par les images $y_i = u(dx_i)$ satisfaisant

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_1} y_1 + \cdots + \frac{\partial f_j}{\partial x_n} y_n = 0$$

pour tout $j = 1, \dots, m$. Définissons alors une application R-linéaire $\delta' : R[x] \to M$ par l'expression $\delta'(P(x_1, \dots, x_n)) = \frac{\partial P}{\partial x_1} y_1 + \dots + \frac{\partial P}{\partial x_n} y_n$. Les propriétés des dérivées partielles impliquent que $\delta'(PQ) = P\delta'(Q) + Q\delta'(P)$, donc δ' est une R-dérivation. Compte tenu des relations satisfaites par les y_i, on voit que $f_1, \dots, f_m$ sont dans le noyau de δ', donc aussi (grâce à la règle de Leibnitz) l'idéal $(f_1, \dots, f_m)$. Il en découle que δ' induit une R-dérivation $\delta : A \to M$, qui est unique avec la propriété que $\delta = u \circ d$. Ceci conclut.

On rappelle que la dimension de Krull d'une algèbre de type fini E sur un corps k, notée $\dim(E)$, est le supremum d des longueurs des chaînes d'idéaux premiers $p_0 \subsetneq p_1 \subsetneq \dots \subsetneq p_d$ dans E. Cette quantité est stable par changement du corps de base k'/k : on a $\dim(E \otimes_k k') = \dim(E)$. On dit que *$A$ est une R-algèbre lisse de dimension relative d* si $\dim(A \otimes_R k) = d$ pour tout corps résiduel k de R, et si de plus $\Omega_{A/R}$ est localement libre de rang d.

5. Soit $R \to R'$ un morphisme d'anneaux et $A' = A \otimes_R R'$. Démontrez que si $R \to A$ est lisse, alors $R' \to A'$ est lisse.

$\boxed{\text{2 pts}}$ *La question précédente montre ce qu'il se passe quand on fait une extension $R \to R'$ de l'anneau des scalaires : en particulier on voit que $\Omega_{A/R} \otimes_A A' \simeq \Omega_{A'/R'}$. Cet isomorphisme existe aussi pour toute R-algèbre ; on peut l'établir en général comme suit. Soit M' un A'-module et M'_A le même groupe abélien, vu comme A-module. On a une bijection $\mathrm{Der}_R(A, M'_A) \simeq \mathrm{Der}_{R'}(A', M')$ inspirée de l'énoncé analogue avec Hom au lieu de Der, et définie ainsi : à une R-dérivation $d : A \to M'_A$ on associe $d' : A' = A \otimes_R R' \to M'$ définie par $d'(a \otimes r') = r'd(a)$. Réciproquement, à une R'-dérivation $d' : A' \to M'$ on associe $d : A \to M'_A$ définie par $d(a) = d'(a \otimes 1)$. Nous omettons ici les vérifications du fait qu'on obtient bien des dérivations et une bijection comme indiqué. On calcule alors :*

$$\mathrm{Hom}_{A'}(\Omega_{A/R} \otimes_A A', M') = \mathrm{Hom}_{A'}(\Omega_{A/R}, M'_A) = \mathrm{Der}_R(A, M'_A) = \mathrm{Der}_{R'}(A', M').$$

Ainsi $\Omega_{A/R} \otimes_A A'$ vérifie la propriété universelle de $\Omega_{A'/R'}$, il lui est donc canoniquement isomorphe.

Maintenant supposons $R \to A$ lisse de dimension relative d. Nous avons :

- *pour tout corps résiduel k' de R', et k le corps résiduel correspondant de A (i.e. le corps résiduel du point image de $\mathrm{Spec}(k') \to \mathrm{Spec}(R') \to \mathrm{Spec}(R)$) on aura*

$$\dim(A' \otimes_{R'} k') = \dim(A \otimes_R k') = \dim((A \otimes_R k) \otimes_k k') = \dim(A \otimes_R k) = d.$$

- *Le A'-module $\Omega_{A'/R'}$ est localement libre de rang d, puisqu'il est isomorphe au changement de base $\Omega_{A/R} \otimes_A A'$ à partir du A-module $\Omega_{A/R}$ localement libre de rang d.*

Ceci démontre que $R' \to A'$ est lisse.

6. On considère le cas où $n = m = 1$, donc $A = R[x]/(f)$, et on suppose f unitaire.
   (a) Donnez une condition équivalente sur f pour que $R \to A$ soit lisse de dimension relative 0.
   (b) Lorsque $R = \mathbb{Z}$ et f est unitaire de degré 2, démontrez que A est lisse sur $\mathbb{Z}$ si et seulement si f est scindé à racines α, β vérifiant $|\alpha - \beta| = 1$.
   (c) Lorsque $R = \mathbb{Z}$ et $f = X^3 + pX + q$, démontrez que A n'est pas lisse sur $\mathbb{Z}$.

Commentaire : un théorème de Minkowski affirme que le discriminant d'un corps de nombres K est distinct de ± 1. Ceci implique que l'anneau des entiers $\mathcal{O}_K$ n'est jamais une $\mathbb{Z}$-algèbre lisse.

$\boxed{\text{3 pts}}$ (a) *La matrice jacobienne vaut ici $J = (f')$ donc $\Omega_{A/R} = (Adx)/(f'dx) \simeq A/f'(x) \simeq R[x]/(f, f')$. Supposons $R \to A$ lisse de dimension relative 0. Alors d'après la question 5, pour tout* *corps résiduel $R \to k$ l'algèbre $k \to A \otimes_R k$ est lisse de dimension* 0. *Or $A \otimes_R k = k[x]/(\overline{f}, \overline{f}')$ est de dimension* 0 *puisque k est unitaire, donc la seule condition à exprimer est que $\Omega_{A/R} = R[x]/(f, f')$ est nul, c'est-à-dire que $(f, f') = R[x]$. Montrons que cette condition est équivalente à dire que* le discriminant $\mathrm{disc}(f) := \mathrm{Res}(f, f')$ est inversible dans R. *Si $(f, f') = R[x]$, alors pour tout corps résiduel $R \to k$ on aura $(\overline{f}, \overline{f}') = k[x]$ donc l'image de* $\mathrm{disc}(f)$ *dans k, qui est* $\mathrm{disc}(\overline{f})$*, est non nulle ; ainsi* $\mathrm{disc}(f)$ *est inversible dans R. Réciproquement, supposons que* $\mathrm{disc}(f) \in R^\times$. *Pour démontrer que $(f, f') = R[x]$, on peut utiliser une propriété générale du résultant qui dit qu'il existe $u, v \in R[x]$ tels que $uf + vf' =$* $\mathrm{disc}(f)$*, donc $R[x] =$* $(\mathrm{disc}(f)) \subset (f, f')$. *Alternativement, on peut regarder l'application R-linéaire $\mu : L \to L$ de multiplication par f' dans le R-module libre de rang fini $L = R[x]/(f)$. Soit k un corps résiduel de R. Comme* $\mathrm{disc}(f) \in R^\times$, *alors* $\mathrm{disc}(\overline{f}) \in k^\times$ *donc $\overline{f}'$ est inversible dans $L \otimes_R k = k[x]/(f)$. Il en découle que* $\det(\overline{\mu}) \in k^\times$. *Ceci étant vrai pour tout corps résiduel,* $\det(\mu) \in R^\times$. *On déduit que f' est inversible dans $R[x]/(f)$, donc $(f, f') = R[x]$.*

En conclusion $R \to A$ est lisse de dimension relative 0 *ssi* $\mathrm{disc}(f) \in R^\times$.

$\boxed{\text{2 pts}}$ (b) *Dans ce cas on a $f = x^2 + bx + c$ avec $b, c \in \mathbb{Z}$, et* $\mathrm{disc}(f) = b^2 - 4c$. *La condition de lissité dit que $b^2 - 4c = \pm 1 =: \epsilon$. En regardant modulo 4, ceci implique que $\epsilon = +1$ et que b est impair. Donc $b = 1 + 2d$ pour un $d \in \mathbb{Z}$, et l'équation devient $d + d^2 = c$. Alors $f = x^2 + (1 + 2d)x + d + d^2 = (x + d)(x + 1 + d)$ qui est scindé avec racines distantes de* 1.

$\boxed{\text{2 pts}}$ (c) *Compte tenu de la formule pour le discriminant de $f = X^3 + pX + q$, on doit maintenant considérer l'équation $4p^3 + 27q^2 = \pm 1 =: \epsilon$. En réduisant modulo 4 on voit que $\epsilon = -1$ et que $q = 1 + 2r$ est impair. En réduisant modulo 3, on voit que $p = -1 + 3s$ est congru à -1 modulo 3. L'équation devient $9s - 27s^2 + 27s^3 + 27r + 27r^2 = -6$. Cette équation n'a pas de solution car le membre de gauche est multiple de 9.*

7. Soit $h : X \to S$ un morphisme de schémas et $\mathscr{M}$ un $\mathcal{O}_X$-module quasi-cohérent. On définit la notion de $\mathcal{O}_S$-dérivation $d : \mathcal{O}_X \to \mathscr{M}$ en mimant la définition d'algèbre commutative. Démontrez qu'il existe un $\mathcal{O}_X$-module quasi-cohérent $\Omega_{X/S}$ avec une dérivation $d : \mathcal{O}_X \to \Omega_{X/S}$ vérifiant une propriété universelle adéquate, et tel que pour tout ouvert affine $V = \mathrm{Spec}(R) \subset S$ et tout ouvert affine $U = \mathrm{Spec}(A) \subset h^{-1}(V)$, on ait $\Omega_{X/S|U} \simeq \widetilde{\Omega}_{A/R}$.

$\boxed{\text{2 pts}}$ *La propriété universelle est donnée par un isomorphisme* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\Omega_{X/S}, \mathscr{M}) \to \mathrm{Der}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{O}_X, \mathscr{M})$ *de foncteurs en $\mathscr{M}$. Lorsque $X = \mathrm{Spec}\, A$ et $S = \mathrm{Spec}\, R$ sont affines, on pose $\Omega_{X/S} = \widetilde{\Omega}_{A/R}$. Supposons seulement S affine. On recouvre X par des ouverts affines $U_i = \mathrm{Spec}\, A_i$, alors $\Omega_{U_i/S}$ est défini pour tout i. On vérifie que pour tout ouvert affine $W = \mathrm{Spec}\, C$ inclus dans $U_i \cap U_j$, les restrictions $\Omega_{U_i/S|W}$ et $\Omega_{U_j/S|W}$ sont tous les deux des modules quasi-cohérents vérifiant la propriété universelle de $\Omega_{W/S}$. Il en découle qu'ils sont canoniquement isomorphes et se recollent donc en un $\mathcal{O}_X$-module quasi-cohérent $\Omega_{X/S}$ qui répond à la question. Il reste enfin à traiter le cas général. On recouvre S par des ouverts affines S_i et on pose $X_i = X \times_S S_i$. Par l'étape précédente, on dispose de $\mathcal{O}_{X_i}$-modules quasi-cohérents Ω_{X_i/S_i}. Sur tout ouvert affine $T \subset S_i \cap S_j$, les restrictions de Ω_{X_i/S_i} et Ω_{X_j/S_j} à l'ouvert $h^{-1}(T)$ vérifient la propriété universelle de $\Omega_{h^{-1}(T)/T}$, donc ils sont canoniquement isomorphes et se recollent en un $\mathcal{O}_X$-module quasi-cohérent $\Omega_{X/S}$ qui répond à la question.*

On considère maintenant un corps k de caractéristique $p \neq 2$ et la courbe plane $C \subset \mathbb{A}^2_k$ définie par l'équation $y^2 = f(x)$ où $f \in k[x]$ est un polynôme de degré $d \geqslant 2$.

8. Donnez une condition nécessaire et suffisante sur f pour que C soit lisse.

$\boxed{\text{3 pts}}$ *La courbe C est le spectre de $A = k[x,y]/(y^2 - f(x))$ et son module de formes différentielles est :*

$$\Omega_{A/k} = \frac{Adx \oplus Ady}{(2ydy - f'dx)}.$$

La courbe est donc lisse si et seulement si $\Omega_{A/R}$ est un A-module localement libre de rang 1 (on pouvait vérifier que $\dim(A) = 1$ mais ceci était implicitement admis par l'emploi du mot « courbe »). Raisonnons par condition nécessaire. Si $\Omega_{A/R}$ est A-module localement libre de rang 1, alors pour tout corps résiduel $A \to \kappa$ (qui correspond à un k-point de C) le module

$$\Omega_{A/k} \otimes_A \kappa = \frac{\kappa dx \oplus \kappa dy}{(2\overline{y}dy - \overline{f}'dx)}$$

est un κ-espace vectoriel de dimension 1. Ceci est un quotient de κ^2 par une équation ; il n'est pas de dimension 1 ssi l'équation est nulle, c'est-à-dire $\overline{y} = \overline{f}' = 0$. Or dans κ on a $\overline{y}^2 = \overline{f}$, donc finalement $\overline{f} = \overline{f}' = 0$. Ceci implique que $\operatorname{disc}(f)$ n'est pas inversible. On voit que si $\Omega_{A/R}$ est localement libre de rang 1 alors $\operatorname{disc}(f) \in k^\times$.

Réciproquement, si $\operatorname{disc}(f) \in k^\times$ alors f et f' sont premiers entre eux donc $U = D(f)$ et $V = D(f')$ recouvrent C. Comme l'équation $y^2 = f(x)$ implique $U = D(f) = D(y)$, on voit que

- *sur U, on a $dy = \frac{f'}{2y}dx$ et $\Omega_{C/k}$ est libre de base dx,*
- *sur V, on a $dx = \frac{2y}{f'}dy$ et $\Omega_{C/k}$ est libre de base dy.*

Donc $\Omega_{A/R}$ est localement libre de rang 1.

La condition nécessaire et suffisante recherchée est que $\operatorname{disc}(f) \in k^\times$, i.e. f est séparable.

9. On suppose C lisse. Le module $\Omega_{C/k}$ est-il (globalement) libre de rang 1 ?

$\boxed{\text{2 pts}}$ *Oui, il est en fait globalement libre. Si C est lisse, les polynômes f, f' sont premiers entre eux donc il existe une écriture de Bézout $uf + vf' = 1$. Alors le déterminant de la matrice*

$$\begin{pmatrix} 2y & v \\ -f' & \frac{1}{2}uy \end{pmatrix}$$

est égal à $uy^2 + vf' = uf + vf' = 1$. Ceci montre que les vecteurs colonnes $e := (2y, -f')$ et $f := (v, \frac{1}{2}uy)$ forment une base de $A^{\oplus 2}$, donc $\Omega_{A/k} = (Ae \oplus Af)/Ae \simeq Af$ est libre.

10. On note $\widetilde{C}$ l'adhérence de Zariski de C dans $\mathbb{P}^2_k$, appelée *complétée projective* de C ; elle est définie par l'équation homogène $y^2z^{d-2} = f(x,z)$ où $f(x,z) = z^d f(x/z)$. Décrivez un ouvert affine contenant tous les points de $\widetilde{C} \setminus C$. La courbe $\widetilde{C}$ est-elle lisse ?

$\boxed{\text{2 pts}}$ *L'équation homogène de $\widetilde{C}$ est de la forme $y^2z^{d-2} = a_dx^d + \cdots + a_0z^d$ avec $a_d \neq 0$. On note que $y = z = 0$ impose $x = 0$. Comme les coordonnées homogènes $(x : y : z)$ d'un point de $\widetilde{C}$ ne sont pas simultanément nulles, la courbe $\widetilde{C}$ est recouverte par l'ouvert U sur lequel $y \neq 0$ et l'ouvert V sur lequel $z \neq 0$. Les points de $\widetilde{C} \setminus C$ sont ceux pour lesquels $z = 0$, ils appartiennent donc tous à U. Or U est inclus dans le plan affine complémentaire de l'hyperplan $y = 0$ dans $\mathbb{P}^2_k$. Notons $r = x/y$ et $s = z/y$, alors $U \subset \operatorname{Spec} k[r,s]$ avec pour équation*

$$s^{d-2} = a_dr^d + \cdots + a_0s^d = f(r,s).$$

Il restait à voir si $\widetilde{C}$ est lisse en les points pour lesquels $s = 0$.