Géométrie Algébrique 1

À rendre avant lundi 6 novembre 2023

La rédaction en LaTeX est vivement encouragée, mais non obligatoire. Toutes les sources à votre disposition peuvent être utilisées ; seuls les résultats du cours ne nécessitent pas de démonstration.

Tous les anneaux sont supposés commutatifs et unitaires.

1. Soit R un anneau. Démontrez que les données suivantes sont équivalentes :
   (a) un morphisme de R-schémas $f : \mathbb{A}^n_R \to \mathbb{A}^m_R$,
   (b) un m-uplet de polynômes $f_1, \ldots, f_m \in R[x_1, \ldots, x_n]$,
   (c) une famille d'applications $f(B) : B^n \to B^m$, pour toute R-algèbre B, fonctorielles en B.
2. On appelle *infinitésimal* un n-uplet $\epsilon = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n) \in B^n$ tel que $\epsilon_i \epsilon_j = 0$ pour $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Démontrez que si $f : \mathbb{A}^n_R \to \mathbb{A}^m_R$ est comme ci-dessus, il existe une matrice $J = J(x_1, \ldots, x_n)$ de taille (m, n) à coefficients dans $R[x_1, \ldots, x_n]$ telle que pour toute R-algèbre B, pour tout $b \in B^n$, et pour tout infinitésimal $\epsilon \in B^n$, on ait $f(b + \epsilon) = f(b) + J(b)\epsilon$.

Soit $R \to A$ un morphisme d'anneaux et M un A-module. Une application $d : A \to M$ est appelée *R-dérivation* si elle est R-linéaire et si $d(xy) = xd(y) + yd(x)$ pour tous $x, y \in A$. On note $\mathrm{Der}_R(A, M)$ l'ensemble des R-dérivations ; c'est un A-module.

3. Démontrez que le foncteur $\mathrm{Mod}(A) \to \mathrm{Mod}(A)$, $M \mapsto \mathrm{Der}_R(A, M)$ est coreprésentable, c'est-à-dire qu'il existe un A-module $\Omega_{A/R}$ muni d'une dérivation $d : A \to \Omega_{A/R}$, tel que l'application
$$\mathrm{Hom}_A(\Omega_{A/R}, M) \longrightarrow \mathrm{Der}_R(A, M), \quad u \longmapsto u \circ d$$
est un isomorphisme fonctoriel en M. Le module $\Omega_{A/R}$ est appelé *module des 1-formes différentielles (de Kähler)* de A/R.
4. On suppose que $A = R[x_1, \ldots, x_n]/(f_1, \ldots, f_m)$ avec $n, m \geqslant 1$ entiers. Montrez que $X = \mathrm{Spec}(A)$ est la fibre en 0 d'un morphisme de R-schémas $f : \mathbb{A}^n_R \to \mathbb{A}^m_R$. Si J est comme dans la question 2, de transposée J^*, et $R[x] := R[x_1, \ldots, x_n]$, donnez un isomorphisme de A-modules :
$$\Omega_{A/R} \simeq \mathrm{coker}(J^* : R[x]^m \longrightarrow R[x]^n) \otimes_{R[x]} A.$$

On rappelle que la dimension de Krull d'une algèbre de type fini E sur un corps k, notée $\dim(E)$, est le supremum d des longueurs des chaînes d'idéaux premiers $p_0 \subsetneq p_1 \subsetneq \cdots \subsetneq p_d$ dans E. Cette quantité est stable par changement du corps de base k'/k : on a $\dim(E \otimes_k k') = \dim(E)$. On dit que A *est une R-algèbre lisse de dimension relative* d si $\dim(A \otimes_R k) = d$ pour tout corps résiduel k de R, et si de plus $\Omega_{A/R}$ est localement libre de rang d.

5. Soit $R \to R'$ un morphisme d'anneaux et $A' = A \otimes_R R'$. Démontrez que si $R \to A$ est lisse, alors $R' \to A'$ est lisse.
6. On considère le cas où $n = m = 1$, donc $A = R[x]/(f)$, et on suppose f unitaire.
   (a) Donnez une condition équivalente sur f pour que $R \to A$ soit lisse de dimension relative 0.
   (b) Lorsque $R = \mathbb{Z}$ et f est de degré 2, démontrez que A est lisse sur $\mathbb{Z}$ si et seulement si f est scindé à racines α, β vérifiant $|\alpha - \beta| = 1$.
   (c) Lorsque $R = \mathbb{Z}$ et $f = X^3 + pX + q$, démontrez que A n'est pas lisse sur $\mathbb{Z}$.

Commentaire : un théorème de Minkowski affirme que le discriminant d'un corps de nombres K est distinct de ± 1. Ceci implique que l'anneau des entiers $\mathcal{O}_K$ n'est jamais une $\mathbb{Z}$-algèbre lisse.

7. Soit $h : X \to S$ un morphisme de schémas et $\mathscr{M}$ un $\mathcal{O}_X$-module quasi-cohérent. On définit la notion de $\mathcal{O}_S$-dérivation $d : \mathcal{O}_X \to \mathscr{M}$ en mimant la définition provenant de l'algèbre commutative. Démontrez qu'il existe un $\mathcal{O}_X$-module quasi-cohérent $\Omega_{X/S}$ avec une dérivation $d : \mathcal{O}_X \to \Omega_{X/S}$ vérifiant une propriété universelle adéquate, et tel que pour tout ouvert affine $V = \mathrm{Spec}(R) \subset S$ et tout ouvert affine $U = \mathrm{Spec}(A) \subset h^{-1}(V)$, on ait $\Omega_{X/S|U} \simeq \widetilde{\Omega}_{A/R}$.

On considère maintenant un corps k de caractéristique $p \neq 2$ et la courbe plane $C \subset \mathbb{A}^2_k$ définie par l'équation $y^2 = f(x)$ où $f \in k[x]$ est un polynôme de degré $d \geqslant 2$.

8. Donnez une condition nécessaire et suffisante sur f pour que C soit lisse.
9. On suppose C lisse. Le module $\Omega_{C/k}$ est-il (globalement) libre de rang 1 ?
10. On note $\widetilde{C}$ l'adhérence de Zariski de C dans $\mathbb{P}^2_k$, appelée *complétée projective* de C ; elle est définie par l'équation homogène $y^2 z^{d-2} = f(x, z)$ où $f(x, z) = z^d f(x/z)$. Décrivez un ouvert affine contenant tous les points de $\widetilde{C} \smallsetminus C$. La courbe $\widetilde{C}$ est-elle lisse ?