Propriétés universelles ; foncteurs représentables

1 Foncteurs de points

Soit C une catégorie. On rappelle que le bifoncteur Hom_C (noté simplement Hom) est contravariant en la première variable et covariant en la deuxième variable. Ceci signifie qu'en fixant une ou l'autre des variables on obtient :

(1) un foncteur contravariant $h_X = \mathrm{Hom}(-, X)$. Précisément $h_X : C^\circ \to \mathrm{Ens}$ est défini par :

$h_X(T) = \mathrm{Hom}(T, X)$ pour tout objet T,
$h_X(f) : \mathrm{Hom}(T_2, X) \to \mathrm{Hom}(T_1, X)$, $v \mapsto v \circ f$ pour toute flèche $f : T_1 \to T_2$.

(2) un foncteur covariant $k_X = \mathrm{Hom}(X, -)$. Précisément $k_X : C \to \mathrm{Ens}$ est défini par :

$k_X(T) = \mathrm{Hom}(X, T)$ pour tout objet T,
$k_X(f) : \mathrm{Hom}(X, T_1) \to \mathrm{Hom}(X, T_2)$, $u \mapsto f \circ u$ pour toute flèche $f : T_1 \to T_2$.

On appelle h_X le *foncteur de points* de X, et k_X le *foncteur de copoints* de X. En fait, par dualité (c'est-à-dire par passage à la catégorie opposée), ces deux concepts n'en font qu'un. Plus précisément, si on note $h_{C,X}$ et $k_{C,X}$ pour souligner le fait que les foncteurs h_X et k_X définis ci-dessus sont relatifs à la catégorie C, on voit que

$$h_{C^\circ,X}(T) = \mathrm{Hom}_{C^\circ}(T, X) = \mathrm{Hom}_C(X, T) = k_{C,X}(T)$$

pour tout objet T. Il s'ensuit que $k_{C,X} = h_{C^\circ,X}$, c'est-à-dire que le foncteur k_X de la catégorie C n'est rien d'autre que le foncteur h_X de la catégorie C°.

2 Problèmes universels contravariants

Étudions d'abord les problèmes universels contravariants.

Définition. Un *problème universel contravariant* est un foncteur $F : C^\circ \to \mathrm{Ens}$. Soit $X \in C$. On dit que X *est solution du problème universel* F ou encore que X *possède la propriété universelle définie par* F s'il existe un isomorphisme de foncteurs $i : \mathrm{Hom}(-, X) \xrightarrow{\sim} F$.

Remarque. Une autre terminologie fréquemment utilisée est la suivante : si $\mathrm{Hom}(-, X) \xrightarrow{\sim} F$, on dit que *le foncteur* F *est représentable par* X, ou que *l'objet* X *représente le foncteur* F.

Exemple 1. Soit $C = \mathrm{Ens}$ la catégorie des ensembles et $X, Y \in C$ deux ensembles fixés. On définit un foncteur $F : C^\circ \to \mathrm{Ens}$ en posant $F(T) = \mathrm{Hom}(T, X) \times \mathrm{Hom}(T, Y)$, c'est-à-dire que $F(T)$ est composé des couples d'applications $(T \xrightarrow{u} X, T \xrightarrow{v} Y)$. (On laisse au lecteur le soin de décrire F sur les morphismes.) Alors F est représentable par le produit cartésien $X \times Y$, appelé parfois simplement *produit*.

Exemple 2. Soit X un espace topologique. Soit $\mathscr{P}(X)$ la catégorie des parties $A \subset X$, avec pour morphismes les inclusions $A \subset B$. Soit $\mathscr{O}(X)$ la sous-catégorie pleine de D dont les objets sont les ouverts de X. Si A une partie quelconque de X, le foncteur $F : \mathscr{O}^{\circ} \to \mathrm{Ens}$ défini par $F(U) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{P}(X)}(U, A)$ est représentable par l'intérieur $\mathrm{int}(A)$ de A.

Exemple 3. Soit $C = \mathrm{Gr}$ la catégorie des groupes. Soit $f : G \to G'$ un morphisme de groupes. On définit un foncteur $F : C^{\circ} \to \mathrm{Ens}$ en posant $F(H) = \{\text{morphismes } g : H \to G \text{ tels que } f \circ g = 1\}$, où $1 : H \to G'$, $x \mapsto 1_{G'}$ est le morphisme trivial. Alors F est représentable par le groupe $\ker(f)$.

Exemple 4. Soit p un nombre premier. Notons D la catégorie des corps de de caractéristique p, et C sa sous-catégorie pleine des corps parfaits, c'est-à-dire ceux dont l'endomorphisme de Frobenius est surjectif. Soit $K \in D$ un corps fixé. Alors le foncteur $F : C^{\circ} \to \mathrm{Ens}$ défini par $F(L) = \mathrm{Hom}_D(L, K)$ est représentable par $\cap_{n \geqslant 0} K^{p^n}$, l'intersection des sous-corps de puissances p^n-ièmes de K, qui est le plus grand sous-corps parfait de K.

Le lemme de Yoneda est crucial pour bien comprendre les problèmes universels. Pour l'énoncer, considérons un foncteur $F : C^{\circ} \to \mathrm{Ens}$, i.e. un problème universel contravariant. Notons $\mathrm{Hom}(h_X, F)$ l'ensemble des morphismes de foncteurs de h_X dans F (appelés aussi transformations naturelles de h_X dans F mais nous utilisons peu cette terminologie). Plus précisément, si l'on note $\mathrm{Hom}(C^{\circ}, \mathrm{Ens})$ la catégorie des foncteurs de C° dans Ens, il s'agit de l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Hom}(C^{\circ},\mathrm{Ens})}(h_X, F)$. À tout morphisme $u : h_X \to F$, on peut associer l'objet $\xi_u := u_X(\mathrm{id}_X)$ qui est l'image de $\mathrm{id}_X \in \mathrm{Hom}(X, X) = h_X(X)$ par l'application $u_X : h_X(X) \to F(X)$.

Lemme de Yoneda. *Soit C une catégorie. Alors l'application $u \mapsto \xi_u = u_X(\mathrm{id}_X)$ est une bijection :*

$$\mathrm{Hom}(h_X, F) \xrightarrow{\sim} F(X).$$

Démonstration. Notons $\alpha : \mathrm{Hom}(h_X, F) \to F(X)$ l'application décrite ci-dessus. Nous allons voir pourquoi u est uniquement déterminé par ξ_u, ce qui donnera l'expression d'une application $\beta : F(X) \to \mathrm{Hom}(h_X, F)$ telle que $\beta \circ \alpha$ est l'identité. Nous laisserons de côté les autres vérifications nécessaires pour démontrer le lemme ; on peut les trouver par exemple dans le livre de Leinster, *Basic category theory*. Soit donc $u : h_X \to F$ un morphisme de foncteurs. Nous voulons montrer comment pour tout objet $Y \in C$ l'application $u_Y : h_X(Y) \to F(Y)$ est déterminée par ξ_u. Prenons $a : Y \to X$ un élément de $h_X(Y) = \mathrm{Hom}(Y, X)$. Comme u est un morphisme de foncteurs, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} h_X(X) \arrow[r, "u_X"] \arrow[d, "f \mapsto f \circ a"'] & F(X) \arrow[d, "F(a)"] \\ h_X(Y) \arrow[r, "u_Y"] & F(Y). \end{tikzcd}$$

En prenant les images de id_X on voit que $u_Y(a) = [F(a)](\xi_u)$, ce qui exprime u_Y uniquement en termes de ξ_u. Plus généralement, pour tout élément $\xi \in F(X)$ notons $\beta(\xi)$ ou u_ξ le morphisme $u_\xi : h_X \to F$ défini par $u_{\xi,Y} : h_X(Y) \to F(Y)$, $a \mapsto [F(a)](\xi)$. On définit ainsi une application

$\beta : F(X) \to \mathrm{Hom}(h_X, F)$ et le calcul qui précède a montré que $\beta(\alpha(u)) = u$. Comme indiqué ci-dessus, nous laissons au lecteur le soin de démontrer (ou de lire dans un livre) le fait que $\alpha \circ \beta$ est l'identité. $\square$

Conséquence 1 : le foncteur de Yoneda est pleinement fidèle. Si on prend pour F un foncteur de la forme h_Y, le lemme de Yoneda fournit une bijection $\mathrm{Hom}(h_X, h_Y) \xrightarrow{\sim} h_Y(X) = \mathrm{Hom}(X, Y)$. Bien sûr, c'est l'inverse de l'application $\mathrm{Hom}(X, Y) \to \mathrm{Hom}(h_X, h_Y)$ associée au foncteur $h : C \to \mathrm{Hom}(C^\circ, \mathrm{Ens})$. Ceci montre que le foncteur de Yoneda h est pleinement fidèle. Par ailleurs, le fait que h soit un foncteur implique immédiatement que la bijection ci-dessus préserve les isomorphismes.

Conséquence 2 : deux objets solution du même problème universel sont canoniquement isomorphes. Si X et Y sont tous deux solutions du problème universel F, on dispose d'isomorphismes de foncteurs $i : h_X \xrightarrow{\sim} F$ et $j : h_Y \xrightarrow{\sim} F$, d'où un isomorphisme $k = j^{-1} \circ i : h_X \xrightarrow{\sim} h_Y$. D'après le point (1) il existe un unique isomorphisme $f : X \to Y$ tel que $k = h_f$. En résumé, il existe un unique isomorphisme entre X et Y compatible avec i et j. On exprime souvent cette propriété en disant que deux objets X, Y qui représentent le même foncteur sont canoniquement isomorphes.

3 Problèmes universels covariants

Définition. Un *problème universel covariant* est un foncteur $F : C \to \mathrm{Ens}$. Soit $X \in C$. On dit que X *est solution du problème universel* F ou encore que X *possède la propriété universelle définie par* F s'il existe un isomorphisme de foncteurs $i : \mathrm{Hom}(X, -) \xrightarrow{\sim} F$.

Remarque. Comme dans le cas contravariant, on dit aussi que *le foncteur F est représentable par X*, ou que *l'objet X représente le foncteur F*.

Exemple 1. Soit $C = \mathrm{Ens}$ la catégorie des ensembles et $X, Y \in C$ deux ensembles fixés. On définit un foncteur $F : C \to \mathrm{Ens}$ en posant $F(T) = \mathrm{Hom}(X, T) \times \mathrm{Hom}(Y, T)$, c'est-à-dire que $F(T)$ est composé des couples d'applications $(X \xrightarrow{u} T, Y \xrightarrow{v} T)$. Alors F est représentable par la somme disjointe $X \amalg Y$, appelée aussi *coproduit.*

Exemple 2. Le foncteur $\mathscr{P} : \mathrm{Ens} \to \mathrm{Ens}$ qui à X associe l'ensemble $\mathscr{P}(X)$ de ses parties est représentable par l'ensemble $\{0, 1\}$. (Pourquoi ?)

Exemple 3. Soit $C = \mathrm{Ann}$ la catégorie des anneaux commutatifs, et fixons un anneau A avec un idéal I. Prenons pour $F : \mathrm{Ann} \to \mathrm{Ens}$ le foncteur tel que $F(B)$ est l'ensemble des morphismes d'anneaux $f : A \to B$ tels que $f(I) = 0$. Alors F est représentable par l'anneau quotient A/I.

Exemple 4. Soit p un nombre premier. Notons D la catégorie des corps de de caractéristique p et C sa sous-catégorie pleine des corps parfaits. Soit $K \in D$ un corps fixé. Alors le foncteur $F : C \to \mathrm{Ens}$ défini par $F(L) = \mathrm{Hom}_D(K, L)$ est représentable par $\cup_{n \geqslant 0} K^{p^{-n}}$, la réunion (dans une clôture algébrique $\overline{K}$ fixée) des extensions engendrées par les racines p^n-ièmes des éléments de K, aussi appelée clôture parfaite de K.

Exemple 5. Soit A un anneau commutatif et $C = \mathrm{Mod}(A)$ la catégorie des A-modules. Fixons deux A-modules M, N. Alors le foncteur $F : \mathrm{Mod}(A) \to \mathrm{Ens}$ tel que $F(P)$ est égal à l'ensemble

$\mathrm{Bilin}_A(M, N; P)$ des applications A-bilinéaires $M \times N \to P$ est représentable par le produit tensoriel $M \otimes_A N$. On sait par ailleurs que l'ensemble $\mathrm{Hom}_A(N, P)$ est muni d'une structure naturelle de A-module, et le foncteur $F' : \mathrm{Mod}(A) \to \mathrm{Ens}$ défini par $F'(P) = \mathrm{Hom}_A(M, \mathrm{Hom}_A(N, P))$ est lui aussi représentable par $M \otimes_A N$.

Passons à l'énoncé du lemme de Yoneda covariant. Soit $F : C \to \mathrm{Ens}$ un foncteur. Comme dans le cas contravariant, à tout morphisme de foncteurs $u : k_X \to F$ on peut associer l'objet $\xi_u := u_X(\mathrm{id}_X)$ qui est l'image de $\mathrm{id}_X \in \mathrm{Hom}(X, X) = k_X(X)$ par l'application $u_X : k_X(X) \to F(X)$.

Lemme de Yoneda. *Soit C une catégorie. Alors l'application $u \mapsto \xi_u = u_X(\mathrm{id}_X)$ est une bijection :*

$$\mathrm{Hom}(k_X, F) \xrightarrow{\sim} F(X).$$

Démonstration. Il s'agit du lemme de Yoneda contravariant appliqué à la catégorie opposée C°. $\square$

4 Exercices

Résoudre les exercices suivants en utilisant uniquement les propriétés universelles des objets concernés.

Exercice 1. Soient A un anneau commutatif et I, p deux idéaux de A avec p premier. On note A_p l'anneau localisé en p et I_p l'idéal localisé en p (c'est un cas particulier d'un A-module localisé M_p). Montrez qu'il existe un isomorphisme canonique entre A_p/I_p et $(A/I)_p$. Dans le cas particulier où $I = p$, ceci donne un isomorphisme canonique entre A_p/pA_p et $\mathrm{Frac}(A/p)$.

Exercice 2. Soient A un anneau commutatif et S une partie multiplicative de A. Montrez qu'il existe un isomorphisme canonique entre $S^{-1}A$ et $\varinjlim_{f \in S} A_f$.

Exercice 3. Soient G un groupe et $H \subset K \subset G$ des sous-groupes tels que H et K sont distingués dans G. Montrez qu'il existe un isomorphisme canonique entre les groupes $(G/H)/(K/H)$ et G/K.

Exercice 4. Soit X un espace topologique. Soit x un point et $i : \{x\} \to X$ l'application donnée par l'inclusion. On identifie la catégorie des faisceaux d'ensembles sur $\{x\}$ avec la catégorie des ensembles (tout faisceau $\mathscr{F}$ sur X étant uniquement déterminé par l'ensemble $E = \mathscr{F}(\{x\})$).

(1) Montrez que si $\mathscr{F}$ est un faisceau sur X, alors $i^{-1}\mathscr{F}$ s'identifie à l'ensemble des germes $\mathscr{F}_x$. Déduisez-en que l'ensemble de germes $\mathscr{F}_x$ (vu comme faisceau sur $\{x\}$) représente le foncteur covariant défini sur la catégorie des faisceaux sur $\{x\}$ par $F(\mathscr{G}) = \mathrm{Hom}_X(\mathscr{F}, i_*\mathscr{G})$.

(2) On suppose maintenant que $(X, \mathcal{O}_X)$ est un espace annelé et on prend deux faisceaux de $\mathcal{O}_X$-modules $\mathscr{F}, \mathscr{G}$ sur X. Montrez, en utilisant les propriétés universelles, qu'il existe un isomorphisme canonique entre $(\mathscr{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathscr{G})_x$ et $\mathscr{F}_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \mathscr{G}_x$.