Image inverse d'un faisceau quasi-cohérent par un morphisme de schémas affines

Soit $f : Y = \mathrm{Spec}(B) \to X = \mathrm{Spec}(A)$ un morphisme de schémas affines. On souhaite démontrer que l'image inverse $f^*\mathscr{F}$ du faisceau de $\mathcal{O}_X$-modules $\mathscr{F} = \widetilde{M}$, pour un A-module M, est le faisceau $\widetilde{M \otimes_A B}$. On propose une preuve différente de celles données dans le cours, utilisant quelques faits simples sur les faisceaux de modules, énoncés sous la forme d'exercices.

Exercice 1. Soient $X = \mathrm{Spec}(A)$ un schéma affine, M un A-module, $\mathscr{F}$ un faisceau de $\mathcal{O}_X$-modules.
(1) Démontrer que le foncteur de sections globales $\Gamma : \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\widetilde{M}, \mathscr{F}) \to \mathrm{Hom}_A(M, \Gamma(X, \mathscr{F}))$ est une bijection fonctorielle en M et $\mathscr{F}$. (*Indication : adapter la preuve de la prop. 4.2.2 du cours.*)
(2) Déduisez-en que le foncteur $i : \mathrm{Qcoh}(\mathcal{O}_X) \to \mathrm{Mod}(\mathcal{O}_X)$ d'inclusion de la catégorie des $\mathcal{O}_X$-modules quasi-cohérents comme sous-catégorie pleine de la catégorie de tous les $\mathcal{O}_X$-modules possède un adjoint à droite, donné par le foncteur $\mathscr{F} \mapsto \Gamma\widetilde{(X, \mathscr{F})}$.

Exercice 2. Soient X un espace annelé et $\mathscr{F}, \mathscr{G}$ deux faisceaux de $\mathcal{O}_X$-modules. Soit $x \in X$ un point. Montrez qu'on a un isomorphisme de $\mathcal{O}_{X,x}$-modules $\mathscr{F}_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \mathscr{G}_x \xrightarrow{\sim} (\mathscr{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathscr{G})_x$.
(*Indications.* (i) *Pour construire ce morphisme, prenez les germes dans l'application bilinéaire universelle* $\mathscr{F} \times \mathscr{G} \to \mathscr{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathscr{G}$. (ii) *Le produit tensoriel commute aux limites inductives, voir Matsumura,* Commutative Ring Theory, *Appendice A, Th. A1.*)

Exercice 3. Soient $f : Y = \mathrm{Spec}(B) \to X = \mathrm{Spec}(A)$ un morphisme de schémas affines, M un A-module, et $\mathscr{F} = \widetilde{M}$.
(1) En partant du morphisme d'adjonction $\mathscr{F} \to f_*f^*\mathscr{F}$ et en prenant les sections globales, construisez un morphisme $M \otimes_A B \to \Gamma(Y, f^*\mathscr{F})$.
(2) En utilisant l'exercice 1, déduisez-en un morphisme $\varphi : \widetilde{M \otimes_A B} \to f^*\mathscr{F}$.
(3) En utilisant l'exercice 2, montrez que φ est un isomorphisme sur les fibres en tous les points $x \in X$, donc un isomorphisme de faisceaux.