Introduction à la Géométrie Algébrique. Le langage des schémas

Sujet d'examen, à rendre pour le mardi 6 décembre 2016

Accordez beaucoup d'importance à la clarté et à la précision des arguments.
Il n'est pas nécessaire de tout faire pour avoir une bonne note.
Il est possible d'écrire en anglais.
Tous les anneaux sont commutatifs et unitaires.

Exercice 1 Soit $f : X \to Y$ un morphisme de schémas.

(1) Soient $\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2$ deux faisceaux de $\mathcal{O}_X$-modules. Construisez un morphisme naturel de faisceaux $f_*\mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2) \to \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_Y}(f_*\mathscr{F}_1, f_*\mathscr{F}_2)$ (le morphisme nul n'est pas accepté).

(2) Soient $\mathscr{G}_1, \mathscr{G}_2$ deux faisceaux de $\mathcal{O}_Y$-modules. Construisez un morphisme naturel de faisceaux $f^*\mathscr{H}om_{\mathcal{O}_Y}(\mathscr{G}_1, \mathscr{G}_2) \to \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(f^*\mathscr{G}_1, f^*\mathscr{G}_2)$ (le morphisme nul n'est pas accepté).

Corrigé. (1) Soit V un ouvert de Y et $U = f^{-1}(V)$. On a

$$(f_*\mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2))(V) = \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2)(U) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_U}(\mathscr{F}_{1|U}, \mathscr{F}_{2|U}).$$

Soit $\varphi : \mathscr{F}_{1|U} \to \mathscr{F}_{2|U}$ un morphisme de faisceaux de $\mathcal{O}_U$-modules. Notons $f_U : U \to V$ la restriction de f à U. On associe à φ son image directe sur V c'est-à-dire $f_{U*}\varphi : f_{U*}\mathscr{F}_{1|U} \to f_{U*}\mathscr{F}_{2|U}$. Or $f_{U*}\mathscr{F}_{i|U} = (f_*\mathscr{F}_i)_{|V}$ car ces deux faisceaux prennent la même valeur $\mathscr{F}_i(f^{-1}(W))$ sur un ouvert $W \subset V$. On a donc obtenu un morphisme de faisceaux de $\mathcal{O}_V$-modules $f_{U*}\varphi : (f_*\mathscr{F}_1)_{|V} \to (f_*\mathscr{F}_1)_{|V}$, c'est-à-dire une section de $\mathscr{H}om_{\mathcal{O}_Y}(f_*\mathscr{F}_1, f_*\mathscr{F}_2)(V)$. Enfin, pour obtenir un morphisme de faisceaux, on doit vérifier que si $V' \subset V$ et $U = f^{-1}(V)$, $U' = f^{-1}(V')$ alors le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
(f_*\mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2))(V) \arrow[r, "\varphi \mapsto f_{U*}\varphi"] \arrow[d, "\mathrm{res}"'] & \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_Y}(f_*\mathscr{F}_1, f_*\mathscr{F}_2)(V) \arrow[d, "\mathrm{res}"] \\
(f_*\mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2))(V') \arrow[r, "\varphi' \mapsto f_{U'*}\varphi'"] & \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_Y}(f_*\mathscr{F}_1, f_*\mathscr{F}_2)(V')
\end{tikzcd}$$

Ceci ne pose pas de difficuté (il est plus important de dire clairement qu'on doit faire cette vérification, que de la faire). Ceci fournit le morphisme demandé.

Remarque. Certains ont confondu $\mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2)$ avec le préfaisceau $\mathscr{H}$ défini par $\mathscr{H}(U) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X(U)}(\mathscr{F}_1(U), \mathscr{F}_2(U))$. Le problème est que $\mathscr{H}$ n'est pas un faisceau en général ; les notes de cours ont insisté sur ce problème en demandant de ne pas confondre $\mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathscr{F}, \mathscr{G})$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathscr{F}, \mathscr{G})$ et $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X(X)}(\mathscr{F}(X), \mathscr{G}(X))$. Voici un exemple dans lequel le préfaisceau $\mathscr{H}$ ci-dessus n'est pas un faisceau. Prenons $X = \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ et $\mathscr{F}_1 = \mathscr{F}_2 = \mathcal{O}(-1)$. La multiplication par un scalaire $z \in \mathbb{C}$ définit un endomorphisme de $\mathcal{O}(-1)$, de sorte que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2)$ contient $\mathbb{C}$ (on peut montrer qu'en fait ce groupe est égal à $\mathbb{C}$). En revanche, comme $\mathcal{O}(-1)$ n'a pas de section globale non nulle, on a $\mathscr{H}(X) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X(X)}(\mathscr{F}_1(X), \mathscr{F}_2(X)) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X(X)}(0, 0) = 0$. Prenons un recouvrement ouvert

$X = U \cup V$, par exemple le recouvrement ouvert standard de X par deux espaces (droites) affines. Toute élément non nul $z \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2)$ définit par restriction à U et V deux éléments non nuls $z_U \in \mathscr{H}(U)$ et $z_V \in \mathscr{H}(V)$, qui coïncident sur $U \cap V$ mais qui ne se recollent pas en un élément de $\mathscr{H}(X)$ puisque $\mathscr{H}(X) = 0$.

(2) Par adjonction, il est équivalent de construire un morphisme de faisceaux de $\mathcal{O}_Y$-modules

$$\alpha : \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_Y}(\mathscr{G}_1, \mathscr{G}_2) \to f_*\mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(f^*\mathscr{G}_1, f^*\mathscr{G}_2).$$

Soit V un ouvert de Y et $U = f^{-1}(V)$. Soit $\varphi : \mathscr{G}_{1|V} \to \mathscr{G}_{2|V}$ une section sur l'ouvert V du faisceau $\mathscr{H}om_{\mathcal{O}_Y}(\mathscr{G}_1, \mathscr{G}_2)$. Notons $f_U : U \to V$ la restriction de f à U. On associe à φ son image inverse $f_U^*\varphi : f_U^*(\mathscr{G}_{1|V}) \to f_U^*(\mathscr{G}_{2|V})$. On observe maintenant que $f_U^*(\mathscr{G}_{i|V}) = (f^*\mathscr{G}_i)_{|U}$. En effet ceci provient simplement du fait qu'on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "f_U"] \arrow[d, "i"'] & V \arrow[d, "j"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

où i, j sont les immersion ouvertes, donc un peut calculer $f_U^*(\mathscr{G}_{i|V}) = f_U^* j^* \mathscr{G}_i = i^* f^* \mathscr{G}_i = (f^*\mathscr{G}_i)_{|U}$. Nous avons donc un morphisme $f_U^*\varphi : (f^*\mathscr{G}_1)_{|U} \to (f^*\mathscr{G}_2)_{|U}$ c'est-à-dire une section sur V de $f_*\mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(f^*\mathscr{G}_1, f^*\mathscr{G}_2)(V)$. Enfin, pour que α soit un morphisme de faisceaux, on doit vérifier que si $V' \subset V$ et $U = f^{-1}(V)$, $U' = f^{-1}(V')$ alors le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_Y}(\mathscr{G}_1, \mathscr{G}_2)(V) \arrow[r, "\varphi \mapsto f_U^*\varphi"] \arrow[d, "\mathrm{res}"'] & (f_*\mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(f^*\mathscr{G}_1, f^*\mathscr{G}_2))(V) \arrow[d, "\mathrm{res}"] \\ \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_Y}(\mathscr{G}_1, \mathscr{G}_2)(V') \arrow[r, "\varphi \mapsto f_{U'}^*\varphi"] & (f_*\mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(f^*\mathscr{G}_1, f^*\mathscr{G}_2))(V') \end{tikzcd}$$

Ici encore ceci ne pose pas de difficulté.

Exercice 2 On souhaite étudier les composantes connexes du groupe orthogonal de la forme quadratique $q(X, Y) := XY \in \mathbb{Z}[X, Y]$ sur un corps k quelconque. Dans cet exercice il nous suffit de travailler avec des schémas *affines* ; on note $(\mathrm{Aff}/\mathbb{Z})$ la catégorie qu'ils forment.

(1) Soient R un anneau, $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{Mat}_2(R)$, et $v = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ un vecteur. Calculez $q(Mv)$.

(2) Pour M comme ci-dessus, on note $q \circ M = (aX + bY)(cX + dY) \in R[X, Y]$. Posons :

$$G(R) = \left\{ M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(R) \ ; \ q \circ M = q \right\}.$$

(On note $G(R)$ au lieu de $G(\mathrm{Spec}(R))$.) Montrez que le foncteur $G : (\mathrm{Aff}/\mathbb{Z})^\circ \to \mathrm{Ens}$ est représentable par le $\mathbb{Z}$-schéma $\mathrm{O}_2 = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[A, B, C, D]/(AC, BD, AD + BC - 1))$.

(3) Montrez que pour tout anneau R et tout $M \in \mathrm{O}_2(R)$, on a $\det(M)^2 = 1$.

(4) Montrez que le foncteur $H : (\mathrm{Aff}/\mathbb{Z})^\circ \to \mathrm{Ens}$ défini par $H(R) = \{r \in R \ ; \ r^2 = 1\}$ est représentable par le $\mathbb{Z}$-schéma $\mu_2 = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[T]/(T^2 - 1))$. Décrivez $\mu_2(k)$ lorsque k est un corps.

(5) Montrez qu'il existe un morphisme de schémas $\det : \mathrm{O}_2 \to \mu_2$ tel que pour tout anneau R, l'application $\det(R) : \mathrm{O}_2(R) \to \mu_2(R)$ est $M \mapsto \det(M)$. Déduisez-en que pour tout corps k de caractéristique $p \neq 2$, le groupe $\mathrm{O}_{2,k} = \mathrm{O}_2 \times \mathrm{Spec}(k)$ n'est pas connexe.

(6) (Question plus difficile) On note $\mu_2' = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[U]/(U^2+U))$ et on considère le morphisme $\pi : \mu_2' \to \mu_2$ défini par le morphisme d'anneaux $T \mapsto 1+2U$. Démontrez qu'il existe un unique morphisme $\det' : \mathrm{O}_2 \to \mu_2'$ tel que $\det = \pi \circ \det'$. (*Indication : on pourra démontrer que l'anneau de fonctions de* O_2 *est un* $\mathbb{Z}$*-module libre.*) Déduisez-en que lorsque k est un corps de caractéristique $p = 2$, le groupe $\mathrm{O}_{2,k}$ n'est pas connexe.

Corrigé. (1) Clairement $q(Mv) = (ax+by)(cx+dy)$.

Dans toute la suite, on pose $\mathscr{O} = \mathbb{Z}[A,B,C,D]/(AC, BD, AD+BC-1)$.

(2) On a $q \circ M = q$ si et seulement si $(aX+bY)(cX+dY) = XY$, c'est-à-dire par identification : $ac = bd = 0$ et $ad+bc = 1$. On peut donc écrire $G(R) = \{(a,b,c,d) \in R^4 \,;\, ac = bd = ad+bc-1 = 0\}$. On sait que se donner quatre éléments $(a,b,c,d) \in R^4$ vérifiant les trois relations indiquées est la même chose que se donner un morphisme d'anneaux $u : \mathscr{O} \to R$ tel que $u(A) = a$, $u(B) = b$, $u(C) = c$, $u(D) = d$. Ceci démontre que $G(R)$ est en bijection avec $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ann}}(\mathscr{O}, R)$ fonctoriellement en R. D'après l'équivalence de catégories entre anneaux et schémas affines, cet ensemble est en bijection (fonctorielle en R) avec $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sch}}(\mathrm{Spec}(R), \mathrm{O}_2)$ où $\mathrm{O}_2 = \mathrm{Spec}(\mathscr{O})$. Ceci prouve que G est représentable par O_2.

(3) Soit $M \in \mathrm{O}_2(R)$, donc $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ avec $ac = bd = 0$ et $ad+bc = 1$. Alors $\det(M) = ad-bc$ donc $\det(M)^2 = (ad-bc)^2 = (ad)^2 + (bc)^2$. Par ailleurs, en multipliant la relation $ad+bc = 1$ par ad on trouve $(ad)^2 = ad$, et en multipliant cette relation par bc on trouve $(bc)^2 = bc$. Finalement $\det(M)^2 = (ad)^2 + (bc)^2 = ad+bc = 1$.

(4) On a une bijection entre l'ensemble des $r \in R$ tels que $r^2 = 1$ et l'ensemble des morphismes d'anneaux $u : \mathbb{Z}[T]/(T^2-1) \to R$, où u est déterminé par $u(T) = r$. Ceci établit une bijection, fonctorielle en R, entre $H(R)$ et l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ann}}(\mathbb{Z}[T]/(T^2-1), R)$ lui-même en bijection avec $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sch}}(\mathrm{Spec}(R), \mu_2)$. Ceci démontre que H est représentable par μ_2.

Si k est un corps, notons $p \geqslant 0$ sa caractéristique. On a $\mu_2(k) = \{r \in k \,;\, r^2 = 1\}$ qui est égal à $\{\pm 1\}$ si $p \neq 2$, et égal à $\{1\}$ si $p = 2$.

(5) Dans l'anneau $\mathscr{O}$, les images $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ de A, B, C, D vérifient par construction les relations qui permettent d'affirmer que la matrice $M_0 = \left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{smallmatrix}\right)$ appartient à $\mathrm{O}_2(\mathscr{O})$. D'après la question précédente, on a donc $(\alpha\delta - \beta\gamma)^2 = \det(M_0)^2 = 1$. On en déduit que le morphisme $\mathbb{Z}[T] \to \mathscr{O}$ qui envoie T sur $\alpha\delta - \beta\gamma$ passe au quotient en un morphisme $\mathbb{Z}[T]/(T^2-1) \to \mathscr{O}$. En passant au spectre, ceci donne un morphisme de schémas $\mathrm{O}_2 \to \mu_2$.

Vérifions que l'application $\det(R) : \mathrm{O}_2(R) \to \mu_2(R)$ est donnée par $M \mapsto \det(M)$. Un élément de $\mathrm{O}_2(R)$ peut être vu comme une matrice $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ avec $ac = bd = ad+bc-1 = 0$ ou comme un morphisme $\mathrm{Spec}(R) \to \mathrm{O}_2$ donné par un morphisme d'anneaux $f : \mathscr{O} \to R$ tel que $f(\alpha) = a$, $f(\beta) = b$, etc. Son image dans $\mu_2(R)$ correspond au morphisme composé $\mathbb{Z}[T]/(T^2-1) \to \mathscr{O} \to R$ tel que $T \mapsto \alpha\delta - \beta\gamma \mapsto ad - bc = \det(M)$. Ce morphisme correspond à son tour à l'élément $\det(M) \in \mu_2(R)$.

Par changement de base $\mathbb{Z} \to k$, on obtient un morphisme $\det_k : \mathrm{O}_{2,k} \to \mu_{2,k}$. Si $\mathrm{car}(k) \neq 2$, on peut écrire $k[T]/(T^2-1) \simeq k[T]/(T-1) \times k[T]/(T+1) \simeq k \times k$. On en déduit que

$$\mu_{2,k} = \mathrm{Spec}(k[T]/(T^2-1)) \simeq \mathrm{Spec}(k) \amalg \mathrm{Spec}(k)$$

qui possède deux points. Le morphisme $\det_k$ est surjectif car $\det\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)=1$ et $\det\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)=-1$. Les deux points de $\mu_{2,k}$ sont ouverts et fermés, donc leurs préimages dans $\mathrm{O}_{2,k}$ sont deux parties ouvertes et fermées non vides, ce qui montre que $\mathrm{O}_{2,k}$ n'est pas connexe.

(6) Lorsqu'on passe aux anneaux, un morphisme $\det' : \mathrm{O}_2 \to \mu_2'$ tel que $\det = \pi \circ \det'$ correspond à un morphisme en pointillés dans le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}[T]/(T^2-1) \arrow[r, "\det^\sharp"] \arrow[d, "T\mapsto 1+2U"'] & \mathscr{O} \\
\mathbb{Z}[U]/(U^2+U) \arrow[ur, dotted, "\varphi"'] &
\end{tikzcd}$$

Pour que ce diagramme soit commutatif, il faut et il suffit que l'on ait $\varphi(1+2U) = \det^\sharp(T) = \det(M_0) = \alpha\delta - \beta\gamma$ avec les notations de la question (5). En utilisant la relation $\alpha\delta + \beta\gamma = 1$, cette relation peut s'écrire $1 + 2\varphi(U) = 1 - 2\beta\gamma$ ou encore $2\varphi(U) = -2\beta\gamma$.

Or nous allons voir que le $\mathbb{Z}$-module sous-jacent à l'anneau $\mathscr{O}$ est libre. En effet, partant d'un polynôme en A, B, C, D, on peut utiliser les relations $AC, BD, AD+BC-1$ qui engendrent l'idéal qui définit $\mathscr{O}$ pour remplacer AC et BD par 0 chaque fois qu'ils apparaissent, et AD par $1-BC$ chaque fois qu'il apparait. On voit ainsi que tout élément de $\mathscr{O}$ peut s'écrire de manière unique comme une somme finie $\sum_{i,j,k,l} n_{i,j,k,l} A^i B^j C^k D^l$ dans laquelle les coefficients $n_{i,j,k,l} \in \mathbb{Z}$ sont nuls lorsque $ik \neq 0$, $jl \neq 0$, ou $il \neq 0$. En d'autres termes, les monômes $A^i B^j C^k D^l$ tels que $ik = jl = il = 0$ forment une base de $\mathscr{O}$ comme $\mathbb{Z}$-module.

En particulier $\mathscr{O}$ est sans 2-torsion, donc l'équation $2\varphi(U) = -2\beta\gamma$ possède une unique solution qui est $\varphi(U) = -\beta\gamma$. Ceci démontre qu'il existe un unique morphisme comme demandé dans l'énoncé.

Par changement de base $\mathbb{Z} \to k$, on obtient un morphisme $\det'_k : \mathrm{O}_{2,k} \to \mu'_{2,k}$. Comme $k[U]/(U^2+U) = k[U]/(U(U+1)) \simeq k \times k$, on obtient $\mu'_{2,k} \simeq \mathrm{Spec}(k) \amalg \mathrm{Spec}(k)$ sans aucune condition sur k. Ce schéma possède deux points. Le morphisme $\det'_k$ est surjectif car $\det'\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)=0$ et $\det'\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)=-1$. Les deux points de $\mu'_{2,k}$ sont ouverts et fermés, donc leurs préimages dans $\mathrm{O}_{2,k}$ sont deux parties ouvertes et fermées non vides, ce qui montre que $\mathrm{O}_{2,k}$ n'est pas connexe.

Remarque. Il est possible de montrer directement que $\mathrm{O}_{2,k}$ n'est pas connexe, quelle que soit la caractéristique de k, en observant que AD et BC sont des idempotents orthogonaux. Cependant, la méthode utilisée dans l'exerice a le mérite de fonctionner aussi pour les groupes orthogonaux de dimension plus grande.

Exercice 3 On note k un corps algébriquement clos. Soit $X = \mathbb{A}^1_k = \mathrm{Spec}(k[t])$ la droite affine et $Y \subset \mathbb{A}^2_k = \mathrm{Spec}(k[x,y])$ la courbe affine plane d'équation $y^2 - x^3 = 0$. Soit $f : X \to Y$ le morphisme de k-schémas défini par le morphisme d'anneaux $\varphi : k[x,y]/(y^2-x^3) \to k[t]$, $x \mapsto t^2$, $y \mapsto t^3$.

(1) Montrez que f est un homéomorphisme.

(2) Montrez que φ est injectif et non surjectif. Déduisez-en que f n'est pas un isomorphisme.

(3) Soit les ouverts $Y^* = D(x) \subset Y$ et $X^* = f^{-1}(Y^*)$. Montrez que $f_{|X^*} : X^* \to Y^*$ est un isomorphisme.

(4) Soit Z le sous-schéma fermé de X défini par l'idéal (t^2). Montrez que f envoie Z dans un k-point de Y, c'est-à-dire qu'il existe un k-point $y : \mathrm{Spec}(k) \to Y$ tel que $f_{|Z} : Z \to Y$ se factorise par y. On dit que f *contracte* Z.

(5) (Question plus difficile) Montrez que pour tout k-schéma W et tout morphisme $g : X \to W$ tel que g contracte Z, il existe un unique morphisme $g' : Y \to W$ tel que $g = g' \circ f$. (*Indication : on pourra se limiter au cas où W est affine pour simplifier.*)

Corrigé. (1) Comme k est algébriquement clos, l'ensemble $|X|$ est égal à $k \cup \{\eta_X\}$ où un élément $c \in k$ s'identifie au point fermé correspondant à l'idéal $(t - c) \subset k[t]$, et η_X est le point générique de X. La topologie est telle que les fermés de $|X|$ distincts de X sont les ensembles finis de points fermés. De même l'ensemble $|Y|$ est égal à $\{(a, b) \in k^2; b^2 = a^3\} \cup \{\eta_Y\}$ et la topologie a pour fermés distincts de X les ensembles finis de points fermés. L'application $|f| : |X| \to |Y|$ envoie le point fermé c sur (c^2, c^3) et le point η_X sur η_Y. Pour voir qu'elle est bijective considérons l'application $g : |Y| \to |X|$ telle que $g(0, 0) = 0$, $g(a, b) = b/a$ si $a \neq 0$, et $g(\eta_Y) = \eta_X$. Il est clair que g est la bijection réciproque de $|f|$. Enfin $|f|$ est une application continue (comme tout morphisme de schémas) et elle envoie un ensemble fini de points fermés sur un ensemble fini de points fermés, donc c'est une application fermée. Il en découle que c'est un homéomorphisme.

(2) Première démonstration. Comme X et Y sont affines, d'après l'équivalence entre la catégorie des k-schémas affines et la catégorie des k-algèbres, f est un isomorphisme si et seulement si φ est un isomorphisme. Or l'image de φ est l'ensemble des polynômes en t^2 et t^3, elle ne contient pas t. Donc φ n'est pas surjectif et en particulier n'est pas un isomorphisme. Deuxième démonstration. Si $f : X \to Y$ est un isomorphisme, alors pour toute k-algèbre R, le morphisme induit $f(R) : X(R) \to Y(R)$ est une bijection. (On utilise ici la notation $X(R) = \mathrm{Hom}_k(\mathrm{Spec}(R), X)$ du foncteur de points.) Ici $X(R) = \mathrm{Hom}_k(\mathrm{Spec}(R), X) = \mathrm{Hom}_{k\text{-Alg}}(k[t], R) = R$ et $Y(R) = \{(a, b) \in R^2; b^2 = a^3\}$ et l'application $f(R)$ envoie $c \in R$ sur (c^2, c^3). En prenant $R = k[z]/(z^2)$, $c_1 = 0$ et $c_2 = z$ qui est un élément de carré nul dans R, on voit que $f(R)$ envoie c_1 et c_2 sur $(0, 0)$. Ainsi $f(R)$ n'est pas injectif.

(3) On a vu dans la question (1) que l'image par f d'un point $c \in k$ est le point (c^2, c^3), dont la coordonnée x est nulle si et seulement si $c = 0$. Autrement dit, la préimage de $D(x)$ par f est l'ouvert $D(t)$. Le morphisme $f_{|X^*}$ est donc décrit par le morphisme d'anneaux $\psi : (k[x, y]/(y^2 - x^3))[1/x] \to k[t, 1/t]$, $x \mapsto t^2$, $y \mapsto t^3$. Pour montrer que $f_{|X^*}$ est un isomorphisme il suffit de montrer que ce morphisme de k-algèbres est un isomorphisme. Pour cela, il suffit de donner son inverse. Or comme x est inversible, on peut écrire $\psi(y/x) = t^3/t^2 = t$. On voit alors facilement que le morphisme $\chi : k[t, 1/t] \to (k[x, y]/(y^2 - x^3))[1/x]$ défini par $\chi(t) = y/x$ est un isomorphisme inverse pour φ.

(4) Le morphisme $f_{|Z} : Z \to Y$ se décrit en termes d'anneaux par le morphisme $k[x, y]/(y^2 - x^3) \xrightarrow{\varphi} k[t] \xrightarrow{\pi} k[t]/(t^2)$ où $\pi : k[t] \to k[t]/(t^2)$ est la surjection canonique. Notons $A = k[x, y]/(y^2 - x^3)$ et $\psi = \pi \circ \varphi$. Comme $\psi(x) = \psi(y) = 0$, le morphisme ψ passe au quotient en un morphisme $\psi' : k = A/(x, y) \to k[t]/(t^2)$ ce qui donne un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\psi'"'] & k[t] \arrow[r, "\pi"] & k[t]/(t^2) \\ k \arrow[urr] & & \end{tikzcd}$$

En passant au spectre, le morphisme ψ' détermine un point $y : \mathrm{Spec}(k) \to Y$ et on obtient un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r] \arrow[drr] & X \arrow[r, "f"] & Y \\ & & \mathrm{Spec}(k) \arrow[u, "y"'] \end{tikzcd}$$

C'est la propriété demandée.

(5) Soit $g : X \to W$ un morphisme qui contracte Z, donc il existe un k-point $w : \mathrm{Spec}(k) \to W$ tel que $g_{|Z} : Z \to W$ se factorise par w. Suivant l'indication, nous supposons W affine et nous écrivons $W = \mathrm{Spec}(B)$. Le morphisme $g : X \to W$ est donné par un morphisme de k-algèbres $g^\sharp : B_tok[t]$, le k-point w est donné par un morphisme $w^\sharp : B \to k$ dont le noyau $m \subset B$ est un idéal maximal. Enfin la condition que g contracte Z signifie que le morphisme composé $Z \to X \to W$ se factorise par le point fermé w, c'est-à-dire que le morphisme composé d'anneaux $B \to k[t] \to k[t]/(t^2)$ envoie l'idéal maximal m sur 0, c'est-à-dire que $g^\sharp(m) \subset (t^2)$.

On va utiliser le fait que φ est injectif (question 2) pour identifier $k[x,y]/(y^2 - x^3)$ à son image dans $k[t]$, qui est le sous-anneau $k[t^2, t^3]$.

On recherche un morphisme pointillé comme indiqué dans le diagramme :

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "g^\sharp"] \arrow[dr, dotted, "h"'] & k[t] \\ & k[t^2, t^3] \arrow[u] \end{tikzcd}$$

c'est-à-dire, puisque la flèche verticale est injective, on cherche à démontrer que $g^\sharp(B) \subset k[t^2, t^3]$. Or pour tout $b \in B$, on peut écrire $b = b_0 + c$ où $b_0 = w^\sharp(b) \in k$ et $c = b - b_0 \in m$. On a donc $g^\sharp(b) = g^\sharp(b_0 + c) = b_0 + g^\sharp(c)$ car $b_0 \in k$ vue comme sous-algèbre de B. De plus, la condition $g^\sharp(m) \subset (t^2)$ montre que $g^\sharp(c) \in (t^2)$ donc $g^\sharp(b) = b_0 + g^\sharp(c) \in k[t^2, t^3]$. Le morphisme d'anneaux induit $g'^\sharp : B \to k[t^2, t^3]$ définit un morphisme de schémas $g' : Y \to W$ qui répond à la question. Ceci conclut la démonstration.