Introduction à la Géométrie Algébrique. Le langage des schémas

Sujet d'examen, à rendre pour le mardi 6 décembre 2016

Accordez beaucoup d'importance à la clarté et à la précision des arguments.
Il n'est pas nécessaire de tout faire pour avoir une bonne note.
Il est possible d'écrire en anglais.
Tous les anneaux sont commutatifs et unitaires.

Exercice 1 Soit $f : X \to Y$ un morphisme de schémas.

(1) Soient $\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2$ deux faisceaux de $\mathcal{O}_X$-modules. Construisez un morphisme naturel de faisceaux $f_*\mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2) \to \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_Y}(f_*\mathscr{F}_1, f_*\mathscr{F}_2)$ (le morphisme nul n'est pas accepté).

(2) Soient $\mathscr{G}_1, \mathscr{G}_2$ deux faisceaux de $\mathcal{O}_Y$-modules. Construisez un morphisme naturel de faisceaux $f^*\mathscr{H}om_{\mathcal{O}_Y}(\mathscr{G}_1, \mathscr{G}_2) \to \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(f^*\mathscr{G}_1, f^*\mathscr{G}_2)$ (le morphisme nul n'est pas accepté).

Exercice 2 On souhaite étudier les composantes connexes du groupe orthogonal de la forme quadratique $q(X,Y) := XY \in \mathbb{Z}[X,Y]$ sur un corps k quelconque. Dans cet exercice il nous suffit de travailler avec des schémas *affines* ; on note $(\mathrm{Aff}/\mathbb{Z})$ la catégorie qu'ils forment.

(1) Soient R un anneau, $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{Mat}_2(R)$, et $v = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ un vecteur. Calculez $q(Mv)$.

(2) Pour M comme ci-dessus, on note $q \circ M = (aX + bY)(cX + dY) \in R[X,Y]$. Posons :

$$G(R) = \left\{ M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(R) \ ; \ q \circ M = q \right\}.$$

(On note $G(R)$ au lieu de $G(\mathrm{Spec}(R))$.) Montrez que le foncteur $G : (\mathrm{Aff}/\mathbb{Z})^\circ \to \mathrm{Ens}$ est représentable par le $\mathbb{Z}$-schéma $\mathrm{O}_2 = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[A,B,C,D]/(AC, BD, AD + BC - 1))$.

(3) Montrez que pour tout anneau R et tout $M \in \mathrm{O}_2(R)$, on a $\det(M)^2 = 1$.

(4) Montrez que le foncteur $H : (\mathrm{Aff}/\mathbb{Z})^\circ \to \mathrm{Ens}$ défini par $H(R) = \{r \in R \ ; \ r^2 = 1\}$ est représentable par le $\mathbb{Z}$-schéma $\mu_2 = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[T]/(T^2 - 1))$. Décrivez $\mu_2(k)$ lorsque k est un corps.

(5) Montrez qu'il existe un morphisme de schémas $\det : \mathrm{O}_2 \to \mu_2$ tel que pour tout anneau R, l'application $\det(R) : \mathrm{O}_2(R) \to \mu_2(R)$ est $M \mapsto \det(M)$. Déduisez-en que pour tout corps k de caractéristique $p \neq 2$, le groupe $\mathrm{O}_{2,k} = \mathrm{O}_2 \times \mathrm{Spec}(k)$ n'est pas connexe.

(6) (Question plus difficile) On note $\mu_2' = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[U]/(U^2 + U))$ et on considère le morphisme $\pi : \mu_2' \to \mu_2$ défini par le morphisme d'anneaux $T \mapsto 1 + 2U$. Démontrez qu'il existe un unique morphisme $\det' : \mathrm{O}_2 \to \mu_2'$ tel que $\det = \pi \circ \det'$. (*Indication : on pourra démontrer que l'anneau de fonctions de* O_2 *est un* $\mathbb{Z}$*-module libre.*) Déduisez-en que lorsque k est un corps de caractéristique $p = 2$, le groupe $\mathrm{O}_{2,k}$ n'est pas connexe.

Exercice 3 On note k un corps algébriquement clos. Soit $X = \mathbb{A}^1_k = \mathrm{Spec}(k[t])$ la droite affine et $Y \subset \mathbb{A}^2_k = \mathrm{Spec}(k[x, y])$ la courbe affine plane d'équation $y^2 - x^3 = 0$. Soit $f : X \to Y$ le morphisme de k-schémas défini par le morphisme d'anneaux $\varphi : k[x, y]/(y^2 - x^3) \to k[t]$, $x \mapsto t^2$, $y \mapsto t^3$.

(1) Montrez que f est un homéomorphisme.

(2) Montrez que φ est injectif et non surjectif. Déduisez-en que f n'est pas un isomorphisme.

(3) Soit les ouverts $Y^* = D(x) \subset Y$ et $X^* = f^{-1}(Y^*)$. Montrez que $f_{|X^*} : X^* \to Y^*$ est un isomorphisme.

(4) Soit Z le sous-schéma fermé de X défini par l'idéal (t^2). Montrez que f envoie Z dans un k-point de Y, c'est-à-dire qu'il existe un k-point $y : \mathrm{Spec}(k) \to Y$ tel que $f_{|Z} : Z \to Y$ se factorise par y. On dit que f *contracte* Z.

(5) (Question plus difficile) Montrez que pour tout k-schéma W et tout morphisme $g : X \to W$ tel que g contracte Z, il existe un unique morphisme $g' : Y \to W$ tel que $g = g' \circ f$. (*Indication : on pourra se limiter au cas où W est affine pour simplifier.*)