

Introduction à la Géométrie Algébrique. Le langage des schémas

Cours du 6 septembre 2016

Références

[GÉOMÉTRIE ALGÈBRIQUE]

- [EH] D. EISENBUD, J. HARRIS, *The geometry of schemes*, Graduate Texts in Math. 197, Springer-Verlag, 2000.
- [GW] U. GÖRTZ, T. WEDHORN, *Algebraic Geometry 1, Schemes with examples and exercises*, Advanced Lectures in Mathematics, Vieweg-Teubner, 2010.
- [Har] R. HARTSHORNE, *Algebraic geometry*, Graduate Texts in Math. 52, Springer-Verlag, 1977.
- [Liu] Q. LIU, *Algebraic geometry and arithmetic curves*, Oxford Graduate Texts in Math. no. 6, Oxford University Press, 2002.
- [Mu] D. MUMFORD, *The red book of varieties and schemes*, Second edition, Lecture Notes in Mathematics 1358, Springer-Verlag, 1999.
- [Per] D. PERRIN, *Géométrie Algébrique, une introduction*, EDP Sciences - CNRS éditions, 2001.

[ALGÈBRE COMMUTATIVE]

- [Ei] D. EISENBUD, *Commutative algebra with a view toward algebraic geometry*, Graduate Texts in Math., Springer-Verlag, 1995.
- [Mat] H. MATSUMURA, *Commutative ring theory*, Cambridge Studies in Advanced Math. 8, Cambridge University Press, 1989.
- [Na] M. NAGATA, *Local rings*, Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, No. 13 Interscience Publishers, John Wiley & Sons, 1962.

[THÉORIE DES CATÉGORIES ET THÉORIE DES ENSEMBLES]

- [Le] T. LEINSTER, *Basic category theory*, Cambridge Studies in Advanced Math. 143. Cambridge University Press, 2014.
- [Mac] S. MACLANE, *Categories for the working mathematician*, Graduate Texts in Math. no. 5, Springer-Verlag, 1978.
- [Awo] S. AWODEY, *Category Theory*, Oxford University Press, 2006.
- [Hal] P. HALMOS, *Introduction à la théorie des ensembles*, Gauthier-Villars, 1967.

∴

Dans ce cours, tous les anneaux considérés sont commutatifs et unitaires.

1 Contexte et motivation

1.1 Constructions fondamentales en géométrie et en théorie des nombres

Une théorie mathématique féconde se développe à partir d'exemples fondamentaux, le plus souvent assez simples, et de certaines constructions naturelles qui amènent à en considérer de nouveaux, plus compliqués. Ainsi, en géométrie différentielle, la droite réelle \mathbb{R} , l'intervalle $[0, 1]$, le cercle S^1 sont des exemples fondamentaux, et on en fabrique de nouveaux à l'aide de constructions telles que :

1. produits,
2. sous-objets,
3. identifications et recollements,
4. ensembles d'applications, groupes d'automorphismes (etc),
5. « noyaux » (ensembles de zéros) et « images »,
6. intersections,
7. quotients et points fixes par des actions de groupes,
8. ensembles de paramètres (espaces projectifs, grassmanniennes),
9. fibrations (recollement d'espaces produits)...

De même, en théorie des nombres, l'anneau des entiers \mathbb{Z} et son corps des fractions \mathbb{Q} sont des exemples fondamentaux et au nombre des constructions naturelles, on trouve :

1. la localisation en un nombre premier,
2. la complétion,
3. la clôture intégrale,
4. l'étude de certains sous-groupes (ex : inversibles, carrés...),
5. le passage à une extension finie et la théorie de Galois,
6. le passage d'un corps à une clôture algébrique...

Souvent, le cadre choisi initialement est trop restreint pour que toutes les constructions souhaitées puissent se faire, et c'est en essayant de l'élargir que certaines des plus grandes découvertes mathématiques ont été faites (les distributions, les groupes, les variétés abstraites, etc).

De même, la géométrie algébrique a été hantée depuis Kronecker (1823-1891) par le désir de trouver un cadre assez large pour contenir les constructions naturelles de la géométrie algébrique « classique » (c'est-à-dire antérieure à 1959) et de la théorie des nombres. La théorie des schémas réalise ce désir.

Dans la suite de cette section 1, pour expliquer l'idée des schémas, nous allons rappeler brièvement ce que sont les variétés algébriques classiques. Pour ces rappels, on peut se reporter au chapitre I du livre de D. Perrin [Per], ou au chapitre 1 de Hartshorne [Har].

1.2 Variétés algébriques classiques

1.2.1 Variétés affines. Soit k un corps algébriquement clos. Les *ensembles algébriques affines* sont les lieux de zéros communs de polynômes $f_1, \dots, f_r \in k[t_1, \dots, t_n]$:

$$X = \{x \in k^n; f_1(x) = \dots = f_r(x) = 0\}.$$

L'ensemble X est muni de la *topologie de Zariski* dont les fermés sont les ensembles algébriques affines inclus dans X . L'espace affine $\mathbb{A}^n(k) = k^n$ est un exemple, et tout ensemble algébrique affine est fermé dans un espace affine. On dit que X est une *variété affine* s'il est irréductible, i.e. s'il est non vide et n'est pas réunion de deux fermés propres (l'exercice 1.3.3 situé à la fin de cette section donne des détails sur la notion d'irréductibilité). Par exemple, la courbe $X \subset \mathbb{A}^2(k)$ d'équation $y^2 = x^3 + 1$ est irréductible, alors que la courbe d'équation $xy = 0$ est réductible, avec deux composantes irréductibles d'équations $x = 0$ et $y = 0$. Un *morphisme* entre deux ensembles algébriques affines $X \subset \mathbb{A}^n(k)$, $Y \subset \mathbb{A}^m(k)$ est une application induite par une application à composantes polynomiales $\mathbb{A}^n(k) \rightarrow \mathbb{A}^m(k)$. À un ensemble algébrique affine X on associe l'idéal $\mathfrak{a}_X \subset k[t_1, \dots, t_n]$ des fonctions nulles sur X , et l'*anneau des fonctions régulières* :

$$\Gamma(X) = k[t_1, \dots, t_n]/\mathfrak{a}_X.$$

Celui-ci est réduit, i.e. sans élément nilpotent (non nul). De plus X est une variété ssi $\Gamma(X)$ est intègre. Si $Y \subset X$ est un fermé, son idéal \mathfrak{a}_Y contient \mathfrak{a}_X , et l'anneau des fonctions régulières $\Gamma(Y)$ est donc un quotient de $\Gamma(X)$. Si $u : X \rightarrow Y$ est un morphisme, toute fonction f sur Y induit une fonction $\Gamma(u) = f \circ u$ sur X , de sorte qu'on obtient un morphisme de k -algèbres $\Gamma(Y) \rightarrow \Gamma(X)$.

Le Nullstellensatz (théorème des zéros) de Hilbert permet de reconstruire X à partir de $A = \Gamma(X)$. Il affirme que tout idéal maximal $m \subset A$ est de la forme $m = (t_1 - x_1, \dots, t_n - x_n)$ pour un unique point $x \in X$. Le morphisme d'évaluation $\text{ev}_x : A \rightarrow k$, $f \mapsto f(x)$, surjectif de noyau m , identifie alors A/m à k . On est amené à associer à toute k -algèbre de type fini A son *spectre maximal* :

$$\text{Spm}(A) = \{\text{idéaux maximaux de } A\}.$$

Un fermé de Zariski de $\text{Spm}(A)$ s'identifie à un ensemble $\text{Spm}(A/I)$ pour un idéal $I \subset A$. Grâce au Nullstellensatz, la préimage d'un idéal maximal par un morphisme de k -algèbres de type fini $\varphi : A \rightarrow B$ est un idéal maximal. On peut donc définir une application $\text{Spm}(\varphi) : \text{Spm}(B) \rightarrow \text{Spm}(A)$ par $n \mapsto \varphi^{-1}(n)$. On obtient un dictionnaire qui s'exprime presque par des bijections :

$$\{\text{ensembles algébriques affines sur } k\} \xrightleftharpoons[\text{Spm}(A) \leftarrow A]{V \mapsto \Gamma(V)} \{k\text{-algèbres de type fini réduites}\}.$$

J'écris « presque » car les objets de part et d'autre ne sont pas des ensembles ; le bon cadre pour formuler cela est celui des catégories, nous y reviendrons.

1.2.2 Exemples. La droite affine $V = \mathbb{A}^1(k)$ a pour anneau de fonctions $A = k[T]$, la courbe plane $W \subset \mathbb{A}^2(k)$ d'équation $y^2 = x^3$ a pour anneau de fonctions $B = k[X, Y]/(Y^2 - X^3)$, et le morphisme d'ensembles algébriques $\varphi : V \rightarrow W$ défini par $\varphi(t) = (t^2, t^3)$ correspond au morphisme de k -algèbres $\psi : k[X, Y]/(Y^2 - X^3) \rightarrow k[T]$ qui envoie X sur T^2 et Y sur T^3 . Il est important d'être très à l'aise avec ce dictionnaire. Ici j'ai utilisé des petites lettres pour les points et des grandes lettres pour les fonctions (les indéterminées des polynômes), mais quand on sera à l'aise je n'utiliserai généralement que des petites lettres car cela donne des écritures plus légères.

1.2.3 Exercice. On notera que la correspondance entre espaces et anneaux de fonctions est un phénomène classique qui existe dans d'autres contextes. Voici un exemple. Soit X un espace topologique compact et A l'anneau des fonctions continues de X dans \mathbb{R} . Pour $x \in X$, on note $m_x = \{f \in A; f(x) = 0\}$. Montrez que $X \rightarrow \text{Spm}(A)$, $x \mapsto m_x$ est un homéomorphisme. On pourra consulter [Ei], chapitre 1, exercice 1.25.

1.2.4 Variétés abstraites. Les géomètres classiques étudiaient également les ensembles algébriques projectifs (ou quasi-projectifs), c'est-à-dire fermés (ou localement fermés) dans l'espace projectif $\mathbb{P}^n(k)$. Le livre de A. WEIL, *Foundations of Algebraic Geometry* publié en 1946 a introduit les ensembles algébriques abstraits, que l'on peut définir comme des espaces topologiques X possédant un recouvrement ouvert par des ensembles algébriques affines X_i . Les variétés algébriques abstraites sont les ensembles algébriques abstraits qui sont irréductibles, comme ci-dessus. Un morphisme $f : X \rightarrow Y$ entre deux tels ensembles est une application continue telle qu'il existe des recouvrements ouverts $X = \cup X_i$, $Y = \cup Y_j$ par des ensembles algébriques affines $X_i \subset \mathbb{A}^{n_i}(k)$ et $Y_j \subset \mathbb{A}^{m_j}(k)$, et des applications à composantes polynomiales $f_{i,j} : \mathbb{A}^{n_i}(k) \rightarrow \mathbb{A}^{m_j}(k)$ satisfaisant $f_{i,j}(X_i) \subset Y_j$ et $f|_{X_i} = f_{i,j}$.

1.3 L'idée des schémas

1.3.1 Schémas affines. Dans le membre de droite de la correspondance

$$\{\text{ensembles algébriques affines sur } k\} \xleftrightarrow{\quad} \{k\text{-algèbres de type fini réduites}\},$$

les restrictions imposées aux anneaux (être une algèbre sur un corps algébriquement clos ; de type fini ; réduite) sont des obstacles pour traiter de nombreuses questions géométriques et arithmétiques. Ce n'est qu'après les avoir levés que, au sein de la théorie des schémas :

1. l'intersection schématique de la parabole $\{y = x^2\}$ et de la droite $\{y = a\}$ dans le plan complexe sera de cardinal 2 même lorsque $a = 0$,
2. les variétés sur des corps non algébriquement clos et qui n'ont aucun point (sous-entendu sur le corps), comme la conique réelle $x^2 + y^2 + 1 = 0$, ne seront pas plus pathologiques que les autres,
3. la catégorie des groupes algébriques commutatifs sur un corps quelconque sera *abélienne* i.e. vérifiera d'aussi bonnes propriétés que la catégorie des groupes commutatifs (existence de noyaux et images, théorèmes d'isomorphismes, etc),
4. de nombreux espaces de paramètres (espaces projectifs, grassmanniennes, structures complexes sur une surface de genre g) existeront et vérifieront une propriété universelle.

Les schémas affines généralisent donc les ensembles algébriques affines de manière à étendre la correspondance à tous les anneaux :

$$\begin{array}{ccc} \{\text{ensembles algébriques affines sur } k\} & \xleftrightarrow{1-1} & \{k\text{-algèbres de type fini réduites}\} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \{\text{schémas affines}\} & \xleftrightarrow{1-1} & \{\text{anneaux}\}. \end{array}$$

1.3.2 Schémas. Les schémas sont ensuite obtenus à partir des schémas affines par le même procédé de globalisation que celui qui permet de définir les variétés algébriques abstraites générales à partir des ensembles algébriques affines. Nous reviendrons plus loin sur les idées de *globalisation* et de *recollement*. Pour l'instant, le point de vue qui nous sera utile passe par quelques rappels de géométrie différentielle. Soit M un espace topologique. Une structure de *variété différentielle* sur M est définie par une collection de *cartes* qui sont des homéomorphismes $\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$ sur des ouverts U_α

recouvrant M , tels que les *changements de cartes* $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}$ soient des difféomorphismes entre ouverts convenables de \mathbb{R}^n . On pourrait même prendre tous les U_α égaux à la boule unité ouverte de rayon 1.

En géométrie algébrique cette définition ne fonctionne pas bien, car les variétés algébriques ne possèdent pas des bases d'ouverts tous isomorphes (leur *structure locale* est plus variée). On contourne cette difficulté de la manière suivante.

On définit les *fonctions différentiables* sur un ouvert $U \subset M$ comme les $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $f \circ \phi_\alpha^{-1}$ est une fonction différentiable de $\phi_\alpha(U \cap U_\alpha) \subset \mathbb{R}^n$ vers \mathbb{R} , pour tout α . On note $\mathcal{O}(U)$ l'anneau composé par ces fonctions. La collection $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}(U)\}_{U \subset M}$ est un exemple de ce qu'on appelle un *faisceau*; elle détermine la structure de variété différentielle sur M , puisque les cartes $\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$ sont déterminées par leurs fonctions coordonnées $\phi_{\alpha,1}, \dots, \phi_{\alpha,n}$ qui sont éléments de $\mathcal{O}(U_\alpha)$. On peut donc représenter une variété différentielle comme une paire (M, \mathcal{O}) composée d'un espace topologique et un faisceau d'anneaux, localement isomorphe à $(\mathbb{R}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{R}^n})$ ¹.

C'est ce modèle qui servira pour la définition d'un schéma. Notre programme dans cette première section est le suivant : introduire les schémas affines, les faisceaux, et les « espaces localement annelés » qui donnent le cadre pour la définition générale d'un schéma.

1.3.3 Exercice. Soit X un espace topologique. Montrez que les conditions suivantes sont équivalentes :

- (1) $X \neq \emptyset$ et X n'est pas réunion de deux fermés stricts,
- (2) $X \neq \emptyset$ et deux ouverts non vides de X ont une intersection non vide,
- (3) $X \neq \emptyset$ et tout ouvert non vide de X est dense,
- (4) $X \neq \emptyset$ et tout ouvert de X est connexe.

Lorsqu'elles sont remplies, on dit que X est *irréductible*. Soit X quelconque et $Y \subset X$ une partie. Montrez que Y est irréductible si et seulement si son adhérence \overline{Y} est irréductible.

2 Définition des schémas

2.1 L'ensemble sous-jacent à un schéma affine

Notations de base sur les idéaux : soient $\varphi : A \rightarrow B$ un morphisme d'anneaux, I un idéal de A , J un idéal de B . On note IB l'idéal engendré par $\varphi(I)$ dans B . On note $\varphi^{-1}(J)$ l'idéal préimage de J par φ ; on le note aussi souvent $J \cap A$ même lorsque φ n'est pas injectif. On dit souvent « un premier » au lieu de « un idéal premier ».

2.1.1 Le spectre premier d'un anneau. Comme expliqué dans 1, on souhaite passer de certaines algèbres de type fini très particulières aux anneaux généraux. La définition du spectre maximal ne nécessite aucune hypothèse sur A , mais pour les anneaux quelconques, celui-ci contient trop peu d'information sur A . Un problème se pose notamment si l'on veut associer à tout morphisme d'anneaux $\varphi : A \rightarrow B$ un morphisme $\text{Spm}(\varphi) : \text{Spm}(B) \rightarrow \text{Spm}(A)$, car en général $\varphi^{-1}(n)$ n'est pas

1. Voir la page wikipedia https://en.wikipedia.org/wiki/Differentiable_manifold pour une discussion des différentes approches de la définition d'une variété différentielle.

maximal, même si $n \subset B$ est maximal. (Exemple : l'inclusion $\varphi : \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$.) Ce problème ne se pose pas avec les idéaux premiers et avec le *spectre premier* de A :

$$\text{Spec}(A) = \{\text{idéaux premiers de } A\}.$$

En effet, si $q \subset B$ est premier, l'injection $A/\varphi^{-1}(q) \hookrightarrow B/q$ montre que $\varphi^{-1}(q) \subset A$ est premier. On a donc une application $\text{Spec}(\varphi) : \text{Spec}(B) \rightarrow \text{Spec}(A)$, $q \mapsto \varphi^{-1}(q)$. Nous aurons d'autres occasions de voir pourquoi le spectre premier est plus naturel que le spectre maximal.

On pense à $\text{Spec}(A)$ comme un *espace*, i.e. un objet géométrique. Un idéal premier $p \subset A$ définit un point de cet espace, noté $[p]$. Dans un souci de clarté, on évite le plus souvent de mélanger les notations de l'algèbre commutative et celles de la géométrie. Ainsi, si $X = \text{Spec}(A)$, on notera souvent x plutôt que $[p]$ le point correspondant à un premier $p \subset A$.

Soit $X = \text{Spec}(A)$ et $x = [p]$. On appelle *anneau local de x* l'anneau localisé $\mathcal{O}_{X,x} := A_p = S^{-1}A$ avec $S = A \setminus p$. C'est un anneau local d'idéal maximal $m_x := pA_p$. On appelle *corps résiduel de x* le corps $\kappa(x) := \mathcal{O}_{X,x}/m_x = A_p/pA_p = \text{Frac}(A/p)$.

La notion de localisation en l'algèbre commutative a fait son apparition, et comme nous l'utilisons en permanence, nous insérons un bref rappel sous forme d'une proposition.

2.1.2 Proposition. *Soient A un anneau et $S \subset A$ une partie multiplicative i.e. contenant 1 et stable par multiplication.*

(1) *Il existe un anneau $S^{-1}A$ et un morphisme d'anneaux $u : A \rightarrow S^{-1}A$, appelé localisé de A par rapport à S , tel que :*

(i) *pour tout $s \in S$, l'image $u(s)$ est inversible,*

(ii) *pour tout morphisme d'anneaux $f : A \rightarrow B$ tel que les éléments de $f(S)$ sont inversibles, il existe un unique morphisme d'anneaux $f' : S^{-1}A \rightarrow B$ tel que $f = f' \circ u$.*

(2) *Soit M un A -module. Il existe un $S^{-1}A$ -module $S^{-1}M$ et un morphisme de A -modules $v : M \rightarrow S^{-1}M$, appelé localisé de M par rapport à S , tel que :*

(i) *pour tout $s \in S$, l'endomorphisme de multiplication $u(s) : S^{-1}M \rightarrow S^{-1}M$, $mx \mapsto u(s)x$ est un isomorphisme,*

(ii) *pour tout morphisme de A -modules $g : M \rightarrow N$ tel que $g(s) : N \rightarrow N$ est un isomorphisme pour tout $s \in S$, il existe un unique morphisme de A -modules $g' : S^{-1}M \rightarrow N$ tel que $g = g' \circ v$.*

(3) *Les applications $I \mapsto S^{-1}I$ et $J \mapsto J \cap A$ établissent des bijections entre l'ensemble des idéaux $I \subset A$ qui ne rencontrent pas S et l'ensemble des idéaux $J \subset S^{-1}A$ distincts de $S^{-1}A$. Ces bijections préservent les ensembles d'idéaux premiers de part et d'autre.*

Démonstration : (1) L'idée est que les éléments de $S^{-1}A$ sont les fractions a/s avec $a \in A$ et $s \in S$, avec pour opérations l'addition et la multiplication habituelles dans le calcul des fractions. Pour le construire précisément, on considère l'ensemble des couples $(a, s) \in A \times S$ que l'on munit de la relation d'équivalence suivante : $(a, s) \sim (a', s')$ si et seulement s'il existe $t \in S$ tel que $t(s'a - sa') = 0$. (Si S ne contient pas de diviseur de 0, l'élément t n'est pas utile, mais en toute généralité il est nécessaire pour qu'on ait bien une relation d'équivalence.) On note a/s la classe d'équivalence de (a, s) . On définit $u : A \rightarrow S^{-1}A$ par $u(a) = a/1$. Si $s \in S$, il est clair que $u(s) = s/1$ est inversible d'inverse

$1/s$. Enfin pour vérifier la propriété universelle, si $f : A \rightarrow B$ est tel que les éléments de $f(S)$ sont inversibles, on définit $f' : S^{-1}A \rightarrow B$ par $f'(a/s) = f'(a)f(s)^{-1}$.

(2) On procède comme ci-dessus pour construire $S^{-1}M$ comme quotient de l'ensemble des couples (m, s) par la relation d'équivalence : « $(m, s) \sim (m', s')$ ssi il existe $t \in S$ tel que $t(s'm - sm') = 0$ », définir les opérations sur $S^{-1}M$ comme on pense, vérifier que c'est naturellement un $S^{-1}A$ -module, définir v par $v(m) = m/1$, et enfin vérifier la propriété universelle.

(3) Exercice. Voir par exemple [Ei], chap. 2. □

Introduction à la Géométrie Algébrique. Le langage des schémas

Cours du 13 septembre 2016

Après ce petit rappel, nous poursuivons par quelques exemples.

2.1.3 Exemples. (1) Le spectre de \mathbb{Z} est composé de l'idéal (0) et de tous les idéaux (p) engendrés par les nombres premiers p .

(2) La droite affine \mathbb{A}_k^1 sur un corps k est le spectre de l'anneau de polynômes $k[t]$. Comme celui-ci est principal, la description est semblable à celle du spectre de \mathbb{Z} . On trouve que l'ensemble \mathbb{A}_k^1 est composé de (0) et de tous les idéaux (p) engendrés par les polynômes irréductibles unitaires. Si k est algébriquement clos, les polynômes irréductibles sont de la forme $t - a$ avec $a \in k$, si bien que $\mathbb{A}_k^1 = \{0\} \cup k$. Par rapport à la variété classique, on n'a ajouté que le point (0).

(3) Le plan affine \mathbb{A}_k^2 . Pour simplifier, nous nous limitons au cas d'un corps algébriquement clos. Notons $A = k[x, y]$ l'anneau de polynômes en deux variables. Alors les idéaux premiers de A sont :

- l'idéal $p = (0)$ qui est un premier minimal ;
- les idéaux de la forme $p = (f)$ où f est un polynôme irréductible ;
- les idéaux de la forme $m = (x - a, y - b)$ pour un $(a, b) \in k^2$, qui sont les idéaux maximaux.

Démontrons ceci. Soit p un idéal premier. Si $p = (0)$ on a le premier type.

Si $p \neq (0)$, il contient un élément $f \in A$ non nul. En décomposant f en facteurs irréductibles, comme p est premier, on voit que l'un des facteurs est dans p . Quitte à remplacer f par ce facteur, on peut supposer f irréductible. Comme A est factoriel, l'idéal (f) est premier. Si $p = (f)$, on obtient les premiers du deuxième type.

Si $p \neq (f)$, il contient un élément $g \notin (f)$. Par le même raisonnement que précédemment, p contient un des facteurs irréductibles π de g , et nécessairement $\pi \notin (f)$. Quitte à remplacer g par π , on peut supposer g irréductible. On a donc trouvé f, g irréductibles distincts tels que $(f, g) \subset p$. Nous allons montrer qu'on peut de plus supposer que $f \in k[x]$ et $g \in k[y]$. Supposons que $f, g \notin k[x]$ et notons $R = k[x]$ et K son corps de fractions. D'après le théorème de Gauss sur la factorialité de $R[y]$, dans $K[y]$ les éléments f, g sont encore irréductibles distincts. Or $K[y]$ est un anneau principal, donc par le théorème de Bézout il existe $u, v \in K$ tels que $uf + vg = 1$. En chassant les dénominateurs de u et v on trouve $r, s, t \in k[x]$ tels que $rf + sg = t$. Ceci montre que p contient un polynôme en x . De même, on montre que p contient un polynôme en y . Quitte à remplacer ces polynômes par un de leurs facteurs irréductibles convenable (même raisonnement que précédemment), on peut les supposer irréductibles. On les note encore $f = f(x)$ et $g = g(y)$ pour simplifier. Comme k est algébriquement clos, il existe $a, b \in k$ tels que $f = x - a$ et $g = y - b$. Comme $(x - a, y - b)$ est maximal, finalement $p = (x - a, y - b)$. Ce sont les premiers du troisième type.

2.1.4 Fonctions régulières. Une des idées fortes de la théorie est que les éléments $f \in A$ sont pensés comme des fonctions sur $X = \text{Spec}(A)$. On appelle donc A l'anneau des fonctions régulières sur X . Si $x \in X$, le germe de f en x noté f_x est l'image de f dans l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$, et la valeur de f en x notée $f(x)$ est l'image de f dans le corps résiduel $\kappa(x)$ par l'application $A \rightarrow A/p \rightarrow \text{Frac}(A/p)$.

Une fonction régulière prend donc ses valeurs dans des corps variables ; ce n'est pas une fonction au sens usuel, mais ce n'est pas très grave. Prenons l'exemple de $A = \mathbb{Z}$. Alors $X = \{(0), (2), (3), (5), \dots\}$ et les corps résiduels sont $\mathbb{Q}, \mathbb{F}_2, \mathbb{F}_3, \mathbb{F}_5, \dots$. La fonction $f = 28$ prend les valeurs $f(0) = 28 \in \mathbb{Q}, f(2) = 0 \in \mathbb{F}_2, f(3) = 1 \in \mathbb{F}_3, f(5) = 3 \in \mathbb{F}_5, \dots$.

Des conditions telles que $f(x) = 0$, ou $f(x) \neq 0$, ou $f(x) = 1$, ont un sens sans référence au corps $\kappa(x)$. Il est équivalent de dire que $f(x) \neq 0$ pour tout $x \in X$, ou que f est inversible dans A : en effet, si f n'est pas inversible, d'après le lemme de Zorn il est inclus dans un idéal maximal p , et on a $f(x) = 0$ pour $x = [p] \in X$; la réciproque est immédiate.

Pour conclure ces quelques mots sur les fonctions régulières, revenons sur le cas où A est de type fini sur un corps algébriquement clos k . Alors, pour tout idéal maximal $m \subset A$ on a $A/m \simeq k$ de sorte que dans ce cas $f \in A$ définit une véritable fonction $f : \text{Spm}(A) \subset \text{Spec}(A) \rightarrow k$.

2.1.5 Exercice. Notons A_{red} l'anneau réduit de A , quotient de A par son nilradical (ensemble des éléments nilpotents). Soit $X_{\text{red}} = \text{Spec}(A_{\text{red}})$. Montrez que la flèche induite $X_{\text{red}} \rightarrow X$ est une bijection. Indication : le nilradical est l'intersection de tous les premiers de A ([Mat], chap. 1, th. 1.2).

2.2 L'espace topologique d'un schéma affine

2.2.1 Les fermés. Soit I un idéal de A . Nous identifierons systématiquement les premiers qui contiennent I et les premiers de A/I . Un *fermé* de $X = \text{Spec}(A)$ est par définition une partie de la forme

$$V(I) = \{p ; p \supset I\} = \text{Spec}(A/I).$$

Il est immédiat de vérifier que les $V(I)$ sont les fermés d'une topologie, appelée la *topologie de Zariski* de X . En fait, c'est la topologie définie exactement pour que les fonctions régulières $f \in A$ aient pour ensembles d'annulation des fermés (comme toute honnête fonction continue). On a $V(I) = X$ ssi I est inclus dans le nilradical, et $V(I) = \emptyset$ ssi $I = A$. Le schéma affine X_{red} est un fermé de X , et la flèche canonique $X_{\text{red}} \rightarrow X$ est un homéomorphisme.

2.2.2 Les ouverts. Les ouverts de X sont les parties $D(I) = X \setminus V(I)$. Comme $V(I) = \bigcap_{f \in I} V(f)$, on a $D(I) = \bigcup_{f \in I} D(f)$. Les ouverts de la forme

$$D(f) = X \setminus V(f) = \{p ; p \not\supset f\}$$

forment donc une base de la topologie de X . Ils sont particulièrement importants car ils sont eux-mêmes spectres d'anneaux. En effet, pour une partie multiplicative $S \subset A$, les premiers de A disjoints de S s'identifient aux premiers de $S^{-1}A$. Ainsi, si l'on note $A_f = A[1/f]$ le localisé de A par rapport à la partie multiplicative $S = \{1, f, f^2, \dots\}$, on a $D(f) = \text{Spec}(A_f)$. Les $D(f)$ sont appelés ouverts *distingués*, ou *principaux* de X .

2.2.3 Spectre et morphismes. Si $\varphi : A \rightarrow B$ est un morphisme d'anneaux, l'application $\text{Spec}(\varphi) : \text{Spec}(B) \rightarrow \text{Spec}(A)$ est continue, puisque la préimage du fermé $V(I)$ est le fermé $V(\varphi(I))$.

2.2.4 Propriétés de compacité. La topologie de Zariski sur un spectre $X = \text{Spec}(A)$ est assez différente de la topologie d'espaces plus familiers, comme les espaces métriques. L'étude la compacité nous sera utile plus tard : l'espace X est-il séparé (au sens de l'axiome de Hausdorff : deux points quelconques possèdent des voisinages ouverts disjoints) et quasi-compact (de tout recouvrement ouvert on peut extraire un sous-recouvrement fini) ? Voici les réponses.

La séparation n'a presque jamais lieu. Par exemple, lorsque A est intègre, l'espace topologique $X = \text{Spec}(A)$ est irréductible puisque (voir exercice 1.3.3) chaque ouvert non vide est dense : en fait, le point correspondant à l'idéal premier $p = (0)$ appartient à tous les ouverts non vides, et il est lui-même dense.

La quasi-compacité, en revanche, est toujours vérifiée. En effet, soit $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement de X par des ouverts. Quitte à le raffiner par un recouvrement par des ouverts principaux, on peut supposer que $U_i = D(f_i)$. Si l'idéal $I \subset A$ engendré par les f_i est distinct de A , d'après le lemme de Zorn il est inclus dans un idéal maximal m , et ceci est impossible, car le point $[m] \in X$ appartient à l'un des ouverts $D(f_i)$, ce qui signifie que $f_i \notin m$. On en déduit que $I = A$. En particulier $1 \in I$, donc il existe une écriture $1 = a_1 f_1 + \dots + a_n f_n$ pour certains $a_i \in A$. On voit alors que $X = D(f_1) \cup \dots \cup D(f_n)$ ce qui produit un sous-recouvrement fini, d'où la quasi-compacité.

2.2.5 Exemple. Utilisant le fait que \mathbb{Z} et l'anneau de polynômes $k[t]$ sont principaux, on vérifie facilement que pour $X = \text{Spec}(\mathbb{Z})$ ou pour $X = \mathbb{A}_k^1$ (avec k un corps), les fermés de X sont X tout entier et les ensembles finis.

2.2.6 Exercice. Soit $X = \mathbb{A}_k^2$ le plan affine sur un corps k . Pour chacun des trois types de points $x \in X$, décrits dans 2.1.3, calculez l'adhérence $\overline{\{x\}}$.

2.2.7 Exercice. Soient $f, g \in A$. Montrez que les conditions suivantes sont équivalentes :

- (1) $D(f) \subset D(g)$,
- (2) le morphisme de localisation $A \rightarrow A_f$ se factorise à travers un morphisme $A_g \rightarrow A_f$,
- (3) l'image de g dans A_f est inversible,
- (4) il existe $a \in A$ et $n \geq 1$ entier tels que $f^n = ag$.

Montrez que $D(f) = D(g)$ si et seulement si $A_g \rightarrow A_f$ est un isomorphisme.

Il nous faut maintenant introduire quelques notions sur les faisceaux. Le vocabulaire des catégories, que nous avons évité jusqu'ici, donnera un cadre très utile pour présenter ces notions.

2.3 Interlude 1 : catégories et foncteurs

La théorie des catégories est basée sur l'idée que dans l'étude d'une famille donnée d'objets mathématiques, les applications entre ces objets sont au moins aussi importantes que les objets eux-mêmes. Ce phénomène est déjà visible pour les ensembles algébriques et les algèbres de type fini, vus précédemment. Nous utiliserons seulement les notions de base sur les catégories. Des références possibles pour compléter ces quelques éléments sont les livres de MacLane [Mac] et Leinster [Le].

2.3.1 Définition. Une *catégorie* C est la donnée de :

- une classe (ou collection) $\text{Ob}(C)$ dont les éléments sont appelés *objets* de C ,²

2. La nature mathématique (classe ou ensemble) de $\text{Ob}(C)$ est un point délicat qui est traité différemment selon les auteurs. Expliquons ceci très brièvement avec l'exemple de la catégorie des ensembles, i.e. la catégorie notée Ens dont les objets sont les ensembles et les applications sont les simples applications ensemblistes. Pour certains auteurs, on peut prendre pour $\text{Ob}(\text{Ens})$ la classe de *tous* les ensembles; elle ne peut alors pas elle-même être un ensemble, à cause du paradoxe de Russell. Pour d'autres, comme la notion de *classe* vit aux frontières (floues) de la théorie des ensembles, il est préférable de travailler avec une catégorie (U - Ens) dont les objets, les ensembles éléments d'un univers U fixé, forment un véritable ensemble. On pourra lire [Mac], chap. I, § 6 pour plus de détails.

- des ensembles notés $\text{Hom}_C(X, Y)$ dont les éléments sont appelés *morphismes* ou *flèches* entre X et Y , pour chaque paire d'objets X, Y ,
- des applications $\text{Hom}_C(X, Y) \times \text{Hom}_C(Y, Z) \rightarrow \text{Hom}_C(X, Z)$ appelées *compositions* et notées $(f, g) \mapsto g \circ f$, pour chaque triplet d'objets X, Y, Z , qui forment une loi associative possédant des éléments neutres à droite et à gauche notés $\text{id}_X \in \text{Hom}_C(X, X)$ et appelés *identités*, pour tout objet X de C .

On note souvent $X \in \text{Ob}(C)$ ou simplement $X \in C$ pour dire que X est un objet de C . On note souvent $f : X \rightarrow Y$ au lieu de $f \in \text{Hom}_C(X, Y)$. On note souvent gf au lieu de $g \circ f$.

2.3.2 Exemples. (1) La catégorie des ensembles notée Ens , la catégorie des groupes, la catégorie des variétés différentielles, etc.

(2) À toute catégorie C on peut associer sa catégorie *opposée* C^{op} définie par $\text{Ob}(C^{\text{op}}) = \text{Ob}(C)$ et $\text{Hom}_{C^{\text{op}}}(X, Y) = \text{Hom}_C(Y, X)$.

2.3.3 Définition. Soit C une catégorie. Une *sous-catégorie* D de C est la donnée d'une sous-classe d'objets $\text{Ob}(D) \subset \text{Ob}(C)$ et, pour chaque paire d'objets $X, Y \in C$ d'un sous-ensemble $\text{Hom}_D(X, Y) \subset \text{Hom}_C(X, Y)$, telle que D contient les identités et est stable par composition. On dit que D est une sous-catégorie *pleine* si $\text{Hom}_D(X, Y) = \text{Hom}_C(X, Y)$ pour tous X, Y .

2.3.4 Exemples, remarques. (1) La catégorie des groupes abéliens est la sous-catégorie pleine de la catégorie des groupes dont les objets sont les groupes abéliens. (On notera que pour spécifier une sous-catégorie pleine, il suffit de spécifier ses objets.)

(2) La catégorie des espaces vectoriels avec pour morphismes les applications linéaires *injectives* est une sous-catégorie non pleine de la catégorie des espaces vectoriels usuelle (i.e. avec pour morphismes toutes les applications linéaires).

2.3.5 Définition. Soit C une catégorie et $f : X \rightarrow Y$ un morphisme dans C . On dit que f est :

- un *monomorphisme* (ou simplement un *mono*) si pour toute paire de morphismes $g, h : W \rightarrow X$ telle que $fg = fh$, on a $g = h$.
- un *épimorphisme* (ou simplement un *épi*) si pour toute paire de morphismes $g, h : Y \rightarrow Z$ telle que $gf = hf$, on a $g = h$.
- un *isomorphisme* (ou simplement un *iso*) s'il existe $g : Y \rightarrow X$ tel que $gf = \text{id}_X$ et $fg = \text{id}_Y$.

2.3.6 Exercice. (1) Dans une catégorie C , un iso est mono et épi.

(2) Dans la catégorie des ensembles, les monos, épis, isos sont les injections, surjections, bijections, respectivement. En particulier, un morphisme qui est mono et épi est iso.

(3) Dans la catégorie des anneaux commutatifs unitaires, le morphisme d'inclusion $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ est un mono et un épi, mais pas un iso. Dans la catégorie des variétés différentielles, l'application $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ d'élévation au cube est un mono et un épi mais pas un iso.

2.3.7 Définition. Soient C, D deux catégories. Un *foncteur* $F : C \rightarrow D$ est la donnée de :

- un objet $F(X) \in D$ pour chaque objet $X \in C$,
- un morphisme $F(f) : F(X) \rightarrow F(Y)$ pour chaque morphisme $f : X \rightarrow Y$ dans C ,

de telle sorte que $F(\text{id}_X) = \text{id}_{FX}$ et $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$ pour tous f, g composables.

Un *foncteur contravariant* de C dans D est un foncteur $F : C^{\text{op}} \rightarrow D$; à chaque morphisme $f : X \rightarrow Y$ dans C il associe donc un morphisme $F(f) : F(Y) \rightarrow F(X)$.

2.3.8 Remarques. (1) On peut composer deux foncteurs $F : C \rightarrow D$ et $G : D \rightarrow E$ de manière évidente. (Il y a en fait une catégorie des catégories, dont les morphismes sont les foncteurs.)

(2) Il est fréquent de définir un foncteur en donnant seulement les valeurs $F(X)$ des objets, lorsque les valeurs $F(f)$ des morphismes sont faciles à trouver avec le contexte. Par exemple, si C est une catégorie et $X \in C$ un objet fixé, on définit un foncteur $F : C \rightarrow \text{Ens}$ en posant $F(Y) = \text{Hom}_C(X, Y)$. (Comment est défini $F(f)$, pour un morphisme $f : Y_1 \rightarrow Y_2$?) De même, si Y est fixé, on définit un foncteur $G : C^{\text{op}} \rightarrow \text{Ens}$ en posant $G(X) = \text{Hom}_C(X, Y)$. (Même question.) On dit que Hom est un bifoncteur, contravariant en la première variable, covariant en la seconde.

(3) On prendra garde au fait que l'image d'un foncteur (définie de la manière naturelle) n'est pas une sous-catégorie en général.

2.3.9 Définition. Soit $F : C \rightarrow D$ un foncteur. On dit que F est un *isomorphisme de catégories* s'il existe un foncteur $G : D \rightarrow C$ tel que $G \circ F = \text{id}_C$ et $F \circ G = \text{id}_D$.

La notion d'isomorphisme de catégories est naturelle, mais elle est souvent trop rigide dans les applications. Voici un exemple. Avec un corps k fixé, considérons la catégorie C des k -espaces vectoriels de dimension finie, avec pour morphismes les isomorphismes k -linéaires. Utilisant la notion de dimension, on voit que les *classes d'isomorphisme* d'éléments de C forment un ensemble qui est en bijection avec \mathbb{N} . Si on voit \mathbb{N} comme une catégorie dont les objets sont les entiers naturels et les morphismes sont réduits aux identités id_n pour $n \in \mathbb{N}$, on peut même étendre la dimension en un foncteur $\text{dim} : C \rightarrow \mathbb{N}$. Cependant, ce foncteur ne peut pas être un isomorphisme, car il n'existe pas de bijection entre la classe (énorme, non dénombrable) des espaces vectoriels et l'ensemble \mathbb{N} . Au mieux existe-t-il un foncteur $G : \mathbb{N} \rightarrow C$ qui associe à $n \in \mathbb{N}$ l'espace vectoriel canonique k^n . Mais on n'a pas $G \circ \text{dim} = \text{id}_C$, car un espace vectoriel de dimension n est *isomorphe*, mais non *égal* à, l'espace k^n . La notion adaptée pour décrire cet exemple et bien d'autres est celle d'équivalence de catégories.

2.3.10 Définition. Soient $F, G : C \rightarrow D$ deux foncteurs de mêmes source et but. Une *transformation naturelle*, ou simplement *morphisme de foncteurs* $u : F \rightarrow G$ est la donnée d'un morphisme $u(X) : F(X) \rightarrow G(X)$ pour tout $X \in C$, de telle sorte que $G(\alpha) \circ u(X) = u(Y) \circ F(\alpha)$ pour tout morphisme $\alpha : X \rightarrow Y$ dans C .

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{u(X)} & G(X) \\ F(\alpha) \downarrow & & \downarrow G(\alpha) \\ F(Y) & \xrightarrow{u(Y)} & G(Y) \end{array}$$

On peut composer les morphismes de foncteurs de manière naturelle. Les foncteurs de C vers D forment ainsi une catégorie $\text{Fonct}(C, D)$. On dispose donc de la notion générale d'isomorphisme : un morphisme de foncteurs $u : F \rightarrow G$ est un iso lorsqu'il existe $v : G \rightarrow F$ tel que $v \circ u = \text{id}_F$ et $u \circ v = \text{id}_G$.

2.3.11 Définition. Une *équivalence de catégories* est un foncteur $F : C \rightarrow D$ tel qu'il existe un foncteur $G : D \rightarrow C$ et des isomorphismes de foncteurs $G \circ F \xrightarrow{\sim} \text{id}_C$ et $F \circ G \xrightarrow{\sim} \text{id}_D$. Le foncteur G est alors appelé un *quasi-inverse* pour F .

Dans ce cas, le foncteur $G : D \rightarrow C$ est aussi une équivalence, appelée *inverse* de F . Citons Awodey [Awo], page 148 : *Experience has shown that the mathematically significant properties of objects are those that are invariant under isomorphisms, and in category theory, identity of objects is a much less important relation than isomorphism. So it is really equivalence of categories that is the more important notion of “similarity” for categories. One can think of equivalence of categories as “isomorphism up to isomorphism.”*

2.3.12 Définition. Soit $F : C \rightarrow D$ un foncteur. On dit que F est

- *plein* si les applications $\text{Hom}_C(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_D(FX, FY)$ sont injectives,
- *fidèle* si les applications $\text{Hom}_C(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_D(FX, FY)$ sont surjectives,
- *pleinement fidèle* s'il est plein et fidèle.

On dit que F est *essentiellement surjectif* si tout $Y \in D$ est isomorphe à FX , pour un $X \in C$.

Par exemple, toute sous-catégorie $D \subset C$ détermine un foncteur d'inclusion $i : D \rightarrow C$ qui est fidèle mais n'est plein que si D est une sous-catégorie pleine.

2.3.13 Lemme. *Un foncteur $F : C \rightarrow D$ est une équivalence si et seulement s'il est pleinement fidèle et essentiellement surjectif.*

Démonstration : Voir [Le], Prop. 1.3.18 ou [Mac], chap. IV, § 4, th. 1 ou [Awo], Prop. 7.25. Noter que la partie « si » utilise une forme forte de l'axiome du choix. \square

2.3.14 Exercice. Soit C une catégorie telle que pour tous $X, Y \in C$ il existe un unique morphisme $X \rightarrow Y$. Soit C_0 la catégorie composée d'un seul objet avec un seul morphisme, l'identité de cet objet. Montrez qu'il existe un unique foncteur $C \rightarrow C_0$ et que c'est une équivalence de catégories.

Pour conclure cette brève introduction aux catégories en revenant à notre sujet, signalons que si k est un corps algébriquement clos, alors les foncteurs $X \mapsto \Gamma(X)$ et $A \mapsto \text{Spm}(A)$ sont des équivalences de catégories inverses entre la catégorie des ensembles algébriques affines sur k et la catégorie des k -algèbres de type fini réduites.

Introduction à la Géométrie Algébrique. Le langage des schémas

Cours du 20 septembre 2016

2.4 Interlude 2 : faisceaux

Comme nous l'avons indiqué dans 1, un schéma sera défini comme un couple composé d'un espace topologique et d'un faisceau d'anneaux d'un certain type. Nous aurons donc besoin d'être à l'aise avec quelques notions liées aux faisceaux sur un espace topologique X .

2.4.1 Définition. Un *préfaisceau d'ensembles* \mathcal{F} sur X est la donnée d'une collection d'ensembles $\mathcal{F}(U)$ pour tous les ouverts $U \subset X$, et d'une collection d'applications appelées *restrictions* $\text{res}_{V,U} : \mathcal{F}(V) \rightarrow \mathcal{F}(U)$ pour toute inclusion d'ouverts $U \subset V$, satisfaisant les propriétés suivantes : $\text{res}_{U,U} = \text{id}_U$ pour tout U , et $\text{res}_{V,U} \circ \text{res}_{W,V} = \text{res}_{W,U}$ pour toute chaîne $U \subset V \subset W$.

Un *morphisme de préfaisceaux* $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ est la donnée d'applications $\varphi(U) : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$ pour tous les ouverts $U \subset X$, qui commutent aux applications de restriction des préfaisceaux \mathcal{F} et \mathcal{G} i.e. $\text{res}_{V,U}^{\mathcal{G}} \circ \varphi(V) = \varphi(U) \circ \text{res}_{V,U}^{\mathcal{F}}$.

Un préfaisceau de groupes, ou d'anneaux (etc) est une collection de groupes, d'anneaux (etc) munie d'applications de restriction qui sont des morphismes de groupes, d'anneaux (etc). Les notions de *morphisme de préfaisceaux de groupes, d'anneaux (etc)* sont définies naturellement.

La notation $\Gamma(U, \mathcal{F})$ est aussi utilisée pour désigner $\mathcal{F}(U)$. Les éléments de $\mathcal{F}(U)$ sont souvent appelés *sections de \mathcal{F} au-dessus de U* ³. Si $U \subset V \subset X$ et $s \in \mathcal{F}(V)$, la restriction $\text{res}_{V,U}(s)$ est souvent notée $s|_U$. Avec cette notation simplifiée, la relation $\text{res}_{V,U}^{\mathcal{G}} \circ \varphi(V) = \varphi(U) \circ \text{res}_{V,U}^{\mathcal{F}}$ s'écrit $\varphi(s)|_U = \varphi(s|_U)$ pour tous U, V, s .

2.4.2 Remarque. On peut reformuler cette définition en introduisant la catégorie $\text{Ouv}(X)$ dont les objets sont les ouverts de X , et les morphismes sont les seules inclusions $U \subset V$ (il n'y a donc pas de morphisme entre U et V si $U \not\subset V$). En ces termes, un préfaisceau est simplement un foncteur contravariant $\mathcal{F} : \text{Ouv}(X)^{\text{op}} \rightarrow \text{Ens}$, et un morphisme de préfaisceaux est un morphisme de foncteurs.

On dispose donc de catégories de préfaisceaux d'ensembles, de groupes, d'anneaux (etc) sur X . Dans la suite, tant que les résultats énoncés ne dépendent pas du type particulier de faisceau considéré, nous ne le spécifierons pas. Nous noterons $P(X)$ une catégorie que la lectrice ou le lecteur peut imaginer comme étant la catégorie des préfaisceaux d'ensembles, ou de groupes, ou d'anneaux.

2.4.3 Exercice. Les monos, épis, isos de $P(X)$ sont les morphismes $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ tels que $\varphi(U)$ est injectif, surjectif, bijectif pour tout ouvert U . En particulier, les isos sont les morphismes qui sont mono et épi.

3. Pour une raison historique : aux débuts de la théorie des faisceaux, ceux-ci étaient présentés plutôt comme des espaces topologiques munis d'une application continue $\pi : \mathcal{F} \rightarrow X$, et dans ce cadre les éléments de $\mathcal{F}(U)$ correspondaient à des sections de $\pi^{-1}(U) \rightarrow U$. Voir par exemple l'exposé de Henri Cartan, *Faisceaux sur un espace topologique*, I, Séminaire Henri Cartan, 3 (1950-1951), Exp. No. 14, accessible ici. On peut aussi regarder l'exercice I.8 de [EH].

Venons-en aux faisceaux. Ceux-ci servent à relier données locales et données globales. Si \mathcal{F} est un préfaisceau, ce qu'on entend par « données globales » c'est les sections de $\mathcal{F}(X)$. Ce qu'on entend par « données locales » c'est les sections de $\mathcal{F}(U)$ pour de « petits » ouverts U , ou encore plus local, les éléments des *fibres* (en anglais : *stalks*)

$$\mathcal{F}_x = \varinjlim_{U \ni x} \mathcal{F}(U).$$

(On rappelle que cette limite inductive est l'ensemble des classes d'équivalence de paires (U, s) avec $U \ni x$ ouvert et $s \in \mathcal{F}(U)$, pour la relation suivante : $(U, s) \sim (U', s')$ si et seulement s'il existe $V \subset U \cap U'$ contenant x tel que $s|_V = s'|_V$. Pour plus de rappels sur les limites inductives, voir [Le], ou [Ei], Appendix 6 ou [Mat], Appendix A.) L'opération « fibre en x » est un foncteur : pour tout morphisme de préfaisceaux $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ on a un morphisme induit $\varphi_x : \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x$ sur les fibres. Si U est un ouvert contenant x et $s \in \mathcal{F}(U)$, l'image de s par l'application $\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}_x$ est appelée *germe de s au point x* . Les fibres sont particulièrement importantes en géométrie algébrique car les ouverts de la topologie de Zariski sont très gros. Ce qu'on entend par « relier données locales et données globales » s'exprime dans la définition d'un faisceau.

2.4.4 Définition. Un *faisceau* (d'ensembles, de groupes, d'anneaux, etc) \mathcal{F} sur X est un préfaisceau tel que pour tout ouvert $U \subset X$, pour tout recouvrement ouvert $(U_i)_{i \in I}$ de U , et toute collection de sections $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ qui coïncident sur les intersections $U_i \cap U_j$, il existe une unique section $s \in \mathcal{F}(U)$ telle que $s|_{U_i} = s_i$ pour tout i . Un *morphisme de faisceaux* $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ est un morphisme de préfaisceaux.

On résume parfois la propriété de faisceau par un diagramme exact

$$\mathcal{F}(U) \rightarrow \prod_{i \in I} \mathcal{F}(U_i) \rightrightarrows \prod_{i, j} \mathcal{F}(U_i \cap U_j).$$

Voici en exercice une conséquence de la propriété de faisceau.

2.4.5 Exercice. Soit \mathcal{F} un préfaisceau sur X . Pour chaque ouvert U , notons $\mathcal{F}'(U)$ l'ensemble des collections $(s(x)) \in \prod_{x \in U} \mathcal{F}_x$ qui *proviennent localement d'une section* au sens où tout point $y \in U$ possède un voisinage ouvert $V \subset U$ sur lequel tous les éléments $s(x)$, $x \in V$, sont les germes d'une même section $t \in \mathcal{F}(V)$.

(a) Montrez que \mathcal{F}' est un faisceau.

(b) Soit $\gamma(U) : \mathcal{F}(U) \rightarrow \prod_{x \in U} \mathcal{F}_x$ l'application qui envoie s sur la collection de germes $(s_x)_{x \in U}$. Montrez que les $\gamma(U)$ induisent un morphisme de préfaisceaux $\gamma : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'$ et que γ est un isomorphisme si \mathcal{F} est un faisceau.

On dispose aussi des notions de faisceaux en groupes, en anneaux, etc. Considérons le cas de la catégorie $F(X)$ des faisceaux de groupes abéliens sur X . Dans les exercices suivants, on décrit ses monos, épis, isos. Ceux-ci sont souvent appelés injections, surjections et bijections de faisceaux, même si cette terminologie peut porter à confusion comme on va le voir.

2.4.6 Exercice. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (a) $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ est un mono,
- (b) $\varphi(U)$ est injectif pour tout ouvert U ,
- (c) φ_x est injectif pour tout $x \in X$.

Pour les épimorphes, la situation n'est pas si simple, et c'est heureux car c'est précisément ce point qui fait tout l'intérêt de la notion de faisceau. En effet, il existe des épimorphes $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ dans $F(X)$ tels que $\varphi(U)$ n'est pas surjectif, pour un certain ouvert U . Cf exercice I.10 dans [EH] :

- dans (a) les ouverts de Zariski sont trop gros pour extraire des racines carrées ;
- dans (b) les variétés projectives ont trop peu de fonctions globales.

2.4.7 Exercice. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (a) $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ est un épimorphisme,
- (b) φ est *localement surjectif* : pour tout ouvert U et tout $t \in \mathcal{G}(U)$, il existe un recouvrement ouvert $U = \cup_{i \in I} U_i$ et des sections $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ telles que $\varphi(s_i) = t|_{U_i}$ pour tout i ,
- (c) φ_x est surjectif pour tout $x \in X$.

2.4.8 Exercice. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (a) $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ est un iso,
- (b) φ est un mono et un épimorphisme,
- (c) φ_x est un iso, pour tout $x \in X$.

2.4.9 Faisceaux sur une base d'ouverts. Pour terminer cette brève présentation des faisceaux, rappelons-nous que notre objectif est de définir le faisceau de fonctions \mathcal{O}_X d'un schéma affine $X = \text{Spec}(A)$. Comme les ouverts généraux de X sont assez compliqués, il est agréable de travailler seulement avec les ouverts principaux $D(f) = \text{Spec}(A_f)$, qui forment une base. Les valeurs d'un faisceau sur les seuls ouverts de cette base le déterminent entièrement.

2.4.10 Définition. Soit X un espace topologique et \mathcal{B} une base d'ouverts. Un \mathcal{B} -faisceau \mathcal{F}_0 est la donnée d'une collection d'ensembles $\mathcal{F}_0(V)$ pour tous les $V \in \mathcal{B}$, et d'applications de restriction $\text{res}_{W,V}$ pour $V \subset W$ éléments de \mathcal{B} , telles que pour tout $V \in \mathcal{B}$, pour tout recouvrement ouvert de V par des éléments $V_i \in \mathcal{B}$, et toute collection de sections $s_i \in \mathcal{F}_0(V_i)$ qui coïncident sur tous les ouverts $W \subset V_i \cap V_j$ appartenant à \mathcal{B} , il existe une unique section $s \in \mathcal{F}_0(V)$ telle que $s|_{V_i} = s_i$ pour tout i .

Il s'agit ni plus ni moins de la propriété de faisceau dans laquelle on s'astreint à ne mentionner que les ouverts éléments de la base \mathcal{B} (ce qui donne une formulation un peu lourde).

2.4.11 Proposition. Soit \mathcal{F}_0 un \mathcal{B} -faisceau. Pour un ouvert quelconque $U \subset X$, posons

$$\mathcal{F}(U) = \varinjlim_{V \subset U, V \in \mathcal{B}} \mathcal{F}_0(V).$$

Alors \mathcal{F} est l'unique faisceau tel que $\mathcal{F}(U) = \mathcal{F}_0(U)$ si $U \in \mathcal{B}$.

On rappelle que la limite projective dans le membre de droite est l'ensemble des collections $(s_V)_{V \in \mathcal{B}}$, $s_V \in \mathcal{F}_0(V)$, telles que $s_W = (s_V)|_W$ pour toute inclusion $W \subset V$ dans \mathcal{B} . Pour des rappels sur les limites projectives (ou limites inverses), voir [Ei], Appendix 6 ou [Mat], Appendix A.

Démonstration : Si $U \in \mathcal{B}$, le système projectif des $V \subset U$, $V \in \mathcal{B}$ possède un élément maximal (ou initial) de sorte que $\mathcal{F}(U) = \mathcal{F}_0(U)$. S'il existe un faisceau \mathcal{F} avec cette propriété, alors chacune de ses sections $s \in \mathcal{F}(U)$ est déterminée par la collection de ses restrictions $s|_V$, $V \in \mathcal{B}$, $V \subset U$, astreintes à coïncider sur les ouverts $V \cap V'$, c'est-à-dire sur tous les ouverts $W \subset V \cap V'$ de \mathcal{B} (noter que $V \cap V'$, s'il n'est pas dans \mathcal{B} , est en tout cas recouvert par des éléments de \mathcal{B}). Ainsi s peut être identifiée à l'ensemble des familles $(s_V)_{V \in \mathcal{B}}$, $s_V \in \mathcal{F}_0(V)$, telles que $s_W = (s_V)|_W$ pour toute inclusion $W \subset V$ dans \mathcal{B} . C'est exactement l'expression donnée en termes de limite projective dans l'énoncé. Il reste à montrer que cette expression définit bien un faisceau ; ceci est laissé au lecteur. \square

2.4.12 Exercice. Décrivez les morphismes de restriction du préfaisceau \mathcal{F} défini dans la proposition. Vérifiez que \mathcal{F} est bien un faisceau. Montrez que si $\mathcal{F}_0, \mathcal{G}_0$ sont deux \mathcal{B} -faisceaux, alors toute collection d'applications $\varphi(V) : \mathcal{F}_0(V) \rightarrow \mathcal{G}_0(V)$ pour $V \in \mathcal{B}$, commutant aux restrictions d'ouverts de \mathcal{B} , s'étend en un unique morphisme de faisceaux $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$.

2.5 Le faisceau de fonctions d'un schéma affine

Soit A un anneau et $X = \text{Spec}(A)$. Nous voulons définir le *faisceau des fonctions régulières* \mathcal{O}_X . D'après 2.4.9, il suffit de définir un \mathcal{B} -faisceau, pour la base \mathcal{B} composée des ouverts principaux $D(f)$, $f \in A$. Cette base possède la propriété agréable d'être stable par intersections finies puisque $D(f_1) \cap D(f_2) = D(f_1 f_2)$, ce qui simplifie la condition de coïncidence de la définition 2.4.10.

Nous avons vu en 2.1.4 et 2.2.2 que $D(f)$ est l'ensemble des points où f ne s'annule pas, et s'identifie au spectre de l'anneau $A_f = A[1/f]$. Ceci est en harmonie avec l'idée naturelle que sur l'ouvert où f ne s'annule pas, les quotients a/f^n définissent d'honnêtes fonctions.

2.5.1 Proposition. *Les données suivantes :*

- (1) $\mathcal{O}_X(D(f)) = A_f$ pour tout $f \in A$,
- (2) $\text{res}_{D(g), D(f)} : A_g \rightarrow A_f$ égal au morphisme d'anneaux naturel (voir exercice 2.2.7), pour toute inclusion $D(f) \subset D(g)$,

définissent un \mathcal{B} -faisceau.

Démonstration : D'abord il convient de noter que lorsque $D(f) = D(g)$, les anneaux A_f et A_g sont canoniquement isomorphes (voir exercice 2.2.7). Par conséquent, si $U = D(f)$, la définition $\mathcal{O}_X(U) = A_f$ ne dépend pas du choix de f . Maintenant, fixons $f \in A$ et montrons la propriété de \mathcal{B} -faisceau pour tous les recouvrements ouverts de $D(f)$. Celui-ci étant un spectre, et ses ouverts principaux étant des ouverts principaux dans X , quitte à remplacer A par A_f on se ramène au cas $f = 1$. Il reste à montrer que pour tout recouvrement ouvert de la forme $X = \cup_i D(f_i)$, toute famille d'éléments $s_i \in A_{f_i}$ tels que s_i et s_j deviennent égaux dans $A_{f_i f_j}$ se recolle en un unique $s \in A$.

D'abord une remarque. Pour tout entier $\alpha \geq 1$ on a $D(f) = D(f^\alpha)$, donc $X = \cup_i D(f_i^\alpha)$. Comme X est quasi-compact (voir 2.2.4), il existe un sous-recouvrement fini $D(f_1^\alpha), \dots, D(f_n^\alpha)$. Ceci entraîne qu'il existe a_1, \dots, a_n dans A tels que $1 = a_1 f_1^\alpha + \dots + a_n f_n^\alpha$, par le même argument que dans 2.2.4. (Les a_i dépendent de α , bien sûr.) Dans la suite de la preuve, nous utiliserons ce type d'écriture, appelé une *partition de l'unité*.

Montrons l'unicité. Si s et t sont égaux dans chaque A_{f_i} , alors pour chaque i il existe $\alpha_i \geq 1$ tel que $f_i^{\alpha_i}(s - t) = 0$. Si $\alpha = \max(\alpha_i)$, on trouve $f_i^\alpha(s - t) = 0$ pour tout i . En utilisant une partition de l'unité, on en déduit que $s - t = 0$.

Montrons maintenant l'existence. Soient $\alpha, \beta \geq 1$ tels que, pour tous i, j on a $s_i = d_i/f_i^\alpha$ et $(f_i f_j)^\beta (f_j^\alpha d_i - f_i^\alpha d_j) = 0$, ce qui traduit l'hypothèse que s_i et s_j deviennent égaux dans $A_{f_i f_j}$. Les entiers α et β peuvent être choisis uniformes, par quasi-compacité. Fixons une partition de l'unité $1 = \sum_j a_j f_j^{\alpha+\beta}$. Posons $s = \sum_j a_j f_j^\beta d_j$. On a :

$$f_i^{\alpha+\beta} s = \sum_j a_j f_j^\beta f_i^{\alpha+\beta} d_j = \sum_j a_j f_j^{\alpha+\beta} f_i^\beta d_i = f_i^\beta d_i.$$

Ceci montre que dans A_{f_i} on a $s = d_i/f_i^\alpha = s_i$, pour tout i . \square

2.5.2 Fibres de \mathcal{O}_X . Si $x = [p]$ est un point de $X = \text{Spec}(A)$, dans 2.1.1 on a appelé *anneau local de x* l'anneau localisé $\mathcal{O}_{X,x} := A_p = S^{-1}A$ avec $S = A \setminus p$. Vérifions que ceci est bien la fibre au point x du faisceau \mathcal{O}_X , de sorte que la notation utilisée est cohérente. La fibre de ce faisceau est la limite inductive $\varinjlim \mathcal{O}_X(U)$ prise sur tous les ouverts U contenant x . Comme les ouverts principaux forment une base, il suffit de considérer ceux-ci dans la limite inductive. Ainsi la fibre est égale à la limite inductive des anneaux A_f pour $f \notin p$, c'est-à-dire l'ensemble des classes d'équivalence d'éléments de la forme a/f^n avec $a \in A$ et $f \notin p$. On voit que cet ensemble est isomorphe au localisé de A par rapport à la partie $S = A \setminus p$, c'est bien le localisé A_p .

Un schéma général sera défini comme une paire (X, \mathcal{O}_X) composée d'un espace topologique muni d'un faisceau d'anneaux, localement isomorphe à un schéma affine. Dans la catégorie où l'expression « localement isomorphe » prendra son sens, les morphismes relient les faisceaux via une image directe ou une image inverse. Il nous faut faire un troisième interlude pour présenter ces notions.

2.6 Interlude 3 : image directe et image inverse de faisceaux

Nous introduisons ces opérations d'abord pour les préfaisceaux, puis pour les faisceaux.

2.6.1 Définition. Soit $f : X \rightarrow Y$ une application continue entre deux espaces topologiques.

(1) Si $\mathcal{F} \in P(X)$ on définit $f_* \mathcal{F} \in P(Y)$ par $(f_* \mathcal{F})(V) = \mathcal{F}(f^{-1}V)$, pour tout ouvert $V \subset Y$. Ce préfaisceau est appelé *image directe de \mathcal{F}* par l'application continue f .

(2) Si $\mathcal{F} \in P(Y)$ on définit $f^{-1} \mathcal{F} \in P(X)$ par $(f^{-1} \mathcal{F})(U) = \varinjlim_{V \supset f(U)} \mathcal{F}(V)$, pour tout ouvert $U \subset X$. Ce préfaisceau est appelé *image inverse de \mathcal{F}* par f .

Notez que dans (2), lorsque $f(U)$ est ouvert, on a $(f^{-1} \mathcal{F})(U) = \mathcal{F}(f(U))$. Cependant, en général $f(U)$ n'est pas ouvert et une telle formule n'est pas licite.

2.6.2 Exemple : restriction à un ouvert. Soit $U \subset X$ un ouvert et $i : U \rightarrow X$ l'inclusion. Le faisceau $i^{-1} \mathcal{F}$ est noté $\mathcal{F}|_U$ et appelé la *restriction de \mathcal{F} à U* . On a $(i^{-1} \mathcal{F})(V) = \mathcal{F}(i(V)) = \mathcal{F}(V)$ pour tout $V \subset U$.

2.6.3 Exercice. Montrez que f_* s'étend en un foncteur $f_* : P(X) \rightarrow P(Y)$, i.e. montrez comment associer à un morphisme $\psi : \mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{F}_2$ de préfaisceaux sur X un morphisme $f_*\psi : f_*\mathcal{F}_1 \rightarrow f_*\mathcal{F}_2$. Montrez de même que f^{-1} s'étend en un foncteur $f^{-1} : P(Y) \rightarrow P(X)$.

2.6.4 Exercice. Soit $f : X \rightarrow Y$ une application continue et $x \in X$ un point.

- (1) Soit \mathcal{F} un préfaisceau d'ensembles sur Y . Construisez une bijection naturelle $(f^{-1}\mathcal{F})_x \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_{f(x)}$.
- (2) Soit \mathcal{F} un préfaisceau d'ensembles sur X . Construisez une application naturelle $(f_*\mathcal{F})_{f(x)} \rightarrow \mathcal{F}_x$ et montrez qu'en général elle n'est ni injective ni surjective.

L'apparition de la limite inductive dans la définition de $f^{-1}\mathcal{F}$ trouve en fait son origine dans la *formule d'adjonction* suivante :

2.6.5 Proposition (Adjonction (f^{-1}, f_*)). Si $f : X \rightarrow Y$ est continue, on a une bijection

$$\mathrm{Hom}_{P(X)}(f^{-1}\mathcal{G}, \mathcal{F}) = \mathrm{Hom}_{P(Y)}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F})$$

fonctorielle en les préfaisceaux $\mathcal{F} \in P(X)$ et $\mathcal{G} \in P(Y)$.

Démonstration : On construit d'abord deux flèches naturelles $\eta : \mathcal{G} \rightarrow f_*f^{-1}\mathcal{G}$ et $\epsilon : f^{-1}f_*\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$. Pour η , on observe que comme l'ouvert $V \subset Y$ contient $f(f^{-1}V)$, on a une application

$$\mathcal{G}(V) \rightarrow (f_*f^{-1}\mathcal{G})(V) = (f^{-1}\mathcal{G})(f^{-1}(V)) = \varinjlim_{W \supset f(f^{-1}V)} \mathcal{G}(W)$$

qui à $s \in \mathcal{G}(V)$ associe sa classe d'équivalence dans la limite inductive. La construction de ϵ est laissée en exercice. La bijection annoncée se construit ainsi : à un morphisme $u : f^{-1}\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F}$ on associe la composée $v = f_*u \circ \eta : \mathcal{G} \rightarrow f_*f^{-1}\mathcal{G} \rightarrow f_*\mathcal{F}$. Réciproquement, à un morphisme $v : \mathcal{G} \rightarrow f_*\mathcal{F}$ on associe $u = \epsilon \circ f^{-1}v$. La preuve du fait que ces deux flèches sont inverses l'une de l'autre est laissée en exercice. Il reste à montrer que la bijection est fonctorielle en \mathcal{F} et \mathcal{G} . Cela découle essentiellement du fait que $\eta = \eta_{\mathcal{G}}$ et $\epsilon = \epsilon_{\mathcal{F}}$ sont fonctorielles. Ceci signifie (pour η) qu'à tout morphisme $\varphi : \mathcal{G}_1 \rightarrow \mathcal{G}_2$ de préfaisceaux sur Y est associé un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}_1 & \xrightarrow{\eta_{\mathcal{G}_1}} & f_*f^{-1}\mathcal{G}_1 \\ \varphi \downarrow & & \downarrow f_*f^{-1}\varphi \\ \mathcal{G}_2 & \xrightarrow{\eta_{\mathcal{G}_2}} & f_*f^{-1}\mathcal{G}_2. \end{array}$$

La preuve de ces faits est un exercice recommandé au lecteur. Une rédaction détaillée en est fournie en 2.6.9. □

2.6.6 Exercice. Décrivez le morphisme de préfaisceaux $\epsilon : f^{-1}f_*\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ puis vérifiez que les applications $u \mapsto f_*u \circ \alpha$ et $v \mapsto \beta \circ f^{-1}v$ sont inverses l'une de l'autre.

2.6.7 Remarque. Insistons sur le fait que les propriétés formelles (fonctorielles, catégoriques) des objets qu'on manipule sont fondamentales. En l'occurrence, nous venons de rencontrer un exemple de la notion générale d'adjonction dans une catégorie : on dit que deux foncteurs $F : C \rightarrow D$ et $G : D \rightarrow C$ sont *adjoints* s'il existe une bijection $\text{Hom}_D(FX, Y) = \text{Hom}_C(X, GY)$ fonctorielle en $X \in C$ et $Y \in D$ (on peut parler aussi d'un *isomorphisme de bifoncteurs*). On dit que F est adjoint à gauche de G , et G adjoint à droite de F . On montre que si F (resp. G) possède un adjoint à gauche (resp. à droite), alors celui-ci est unique à isomorphisme unique près. Voir [Mac], chap. IV, § 1. De nombreux exemples sont familiers, en voici deux grandes familles (voir exercice 2.6.8) :

- (1) les adjoints à gauche de foncteurs d'oubli, appelés foncteurs d'*objets libres*.
- (2) les adjoints à gauche d'inclusions de catégories, ou *réflecteurs*.

Pour revenir aux préfaisceaux, la définition de $f_*\mathcal{F}$ est naturelle et c'est la formule d'adjonction qui guide la définition de $f^{-1}\mathcal{F}$.

2.6.8 Exercice. (1) *Objets libres.* Montrez que le foncteur qui associe à un ensemble I le groupe libre sur l'ensemble de générateurs I est un adjoint à gauche du foncteur d'oubli qui associe à un groupe son ensemble sous-jacent. Montrez que le foncteur qui associe à un ensemble I l'algèbre de polynômes $A[(X_i)_{i \in I}]$ est un adjoint à gauche du foncteur d'oubli qui associe à une A -algèbre commutative unitaire son ensemble sous-jacent.

(2) *Réflecteurs.* Montrez que le foncteur corps de fractions est adjoint à gauche de l'inclusion de la catégorie des corps commutatifs dans la catégorie des anneaux commutatifs intègres avec pour morphismes les injections d'anneaux. Montrez que le foncteur d'abélianisation $G \mapsto G/[G, G]$ est adjoint à gauche de l'inclusion de la catégorie des groupes abéliens dans celle de tous les groupes (ici $[G, G]$ est le groupe dérivé). Montrez que le foncteur $M \mapsto M/M_{\text{tor}}$ est adjoint à gauche de l'inclusion de la catégorie des \mathbb{Z} -modules sans torsion dans celle de tous les \mathbb{Z} -modules (ici M_{tor} est le sous-module de torsion).

Parenthèse : preuve détaillée de l'adjonction (f^{-1}, f_*)

2.6.9 Proposition 2.6.5 (Adjonction (f^{-1}, f_*)). Si $f : X \rightarrow Y$ est continue, on a une bijection

$$\mathrm{Hom}_{P(X)}(f^{-1}\mathcal{G}, \mathcal{F}) = \mathrm{Hom}_{P(Y)}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F})$$

fonctorielle en les préfaisceaux $\mathcal{F} \in P(X)$ et $\mathcal{G} \in P(Y)$.

Démonstration : Si $\varphi : \mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{F}_2$ est un morphisme de faisceaux sur X , et $U \subset X$ est un ouvert, on note parfois φ_U et parfois $\varphi(U)$ pour désigner l'application $\mathcal{F}_1(U) \rightarrow \mathcal{F}_2(U)$.

(1) On construit un morphisme de faisceaux $\eta = \eta_{\mathcal{G}} : \mathcal{G} \rightarrow f_*f^{-1}\mathcal{G}$ fonctoriel en \mathcal{G} . Pour tout ouvert $V \subset Y$, on a par définition :

$$(f_*f^{-1}\mathcal{G})(V) = (f^{-1}\mathcal{G})(f^{-1}(V)) = \varinjlim_{W \supset f^{-1}V} \mathcal{G}(W).$$

Comme V contient $f(f^{-1}V)$, il est l'un des ouverts W en indice dans la limite inductive. On dispose donc d'une application

$$\eta_V : \mathcal{G}(V) \longrightarrow (f_*f^{-1}\mathcal{G})(V)$$

qui à $s \in \mathcal{G}(V)$ associe sa classe d'équivalence dans la limite inductive. Il est clair que si $V \subset V'$ est une inclusion d'ouverts de Y , les applications η_V et $\eta_{V'}$ commutent aux restrictions à la source et au but, c'est-à-dire explicitement que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}(V) & \xrightarrow{\eta_{V'}} & (f_*f^{-1}\mathcal{G})(V') \\ \mathrm{res}_{V',V} \downarrow & & \downarrow f_*f^{-1}\mathrm{res}_{V',V} \\ \mathcal{G}(V) & \xrightarrow{\eta_V} & (f_*f^{-1}\mathcal{G})(V). \end{array}$$

Ainsi η est un morphisme de faisceaux. Enfin montrons que $\eta = \eta_{\mathcal{G}}$ est fonctoriel en \mathcal{G} . Il s'agit de montrer que pour tout morphisme $\psi : \mathcal{G}_1 \rightarrow \mathcal{G}_2$ de préfaisceaux sur Y , le carré suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}_1 & \xrightarrow{\eta_{\mathcal{G}_1}} & f_*f^{-1}\mathcal{G}_1 \\ \psi \downarrow & & \downarrow f_*f^{-1}\psi \\ \mathcal{G}_2 & \xrightarrow{\eta_{\mathcal{G}_2}} & f_*f^{-1}\mathcal{G}_2. \end{array}$$

Pour montrer cela on doit voir que pour tout ouvert $V \subset Y$, le carré suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}_1(V) & \xrightarrow{\eta_{\mathcal{G}_1}(V)} & \varinjlim_{W \supset f^{-1}V} \mathcal{G}_1(W) \\ \psi(V) \downarrow & & \downarrow (f_*f^{-1}\psi)(V) \\ \mathcal{G}_2(V) & \xrightarrow{\eta_{\mathcal{G}_2}(V)} & \varinjlim_{W \supset f^{-1}V} \mathcal{G}_2(W). \end{array}$$

Or par le chemin du haut, une section $s \in \mathcal{G}_1(V)$ est envoyée sur la classe d'équivalence de $[(V, s)]$ dans la limite inductive relative à \mathcal{G}_1 puis sur la classe d'équivalence de $[(V, \psi(s))]$ dans la limite inductive relative à \mathcal{G}_2 . Par le chemin du bas, la section s est envoyée sur $\psi(s) \in \mathcal{G}_2(V)$ puis sur la classe d'équivalence de $[(V, \psi(s))]$ dans la limite inductive relative à \mathcal{G}_2 . On a donc bien commutation du diagramme.

(2) On construit maintenant un morphisme de faisceaux $\epsilon = \epsilon_{\mathcal{F}} : f^{-1}f_*\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ fonctoriel en \mathcal{F} . Pour tout ouvert $U \subset X$, on a par définition :

$$(f^{-1}f_*\mathcal{F})(U) = \varinjlim_{V \supset f(U)} \mathcal{F}(f^{-1}(V)).$$

Or $V \supset f(U)$ implique $f^{-1}(V) \supset f^{-1}(f(U)) \supset U$. On peut donc considérer les morphismes de restriction $\mathcal{F}(f^{-1}(V)) \rightarrow \mathcal{F}(U)$. Ils sont compatibles entre eux pour les ouverts $V \supset f(U)$ variables, donc ils passent à la limite pour induire une application

$$\epsilon_U : (f^{-1}f_*\mathcal{F})(U) \longrightarrow \mathcal{F}(U).$$

Il est clair que si $U \subset U'$ est une inclusion d'ouverts de X , les applications ϵ_U et $\epsilon_{U'}$ commutent aux restrictions à la source et au but, donc ϵ est un morphisme de faisceaux (ici je donne moins de détails que pour $\eta\dots$). Enfin montrons que $\epsilon = \epsilon_{\mathcal{F}}$ est fonctoriel en \mathcal{F} . Il s'agit de montrer que pour tout morphisme $\varphi : \mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{F}_2$ de préfaisceaux sur Y , le carré suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}f_*\mathcal{F}_1 & \xrightarrow{\epsilon_{\mathcal{F}_1}} & \mathcal{F}_1 \\ f^{-1}f_*\varphi \downarrow & & \downarrow \varphi \\ f^{-1}f_*\mathcal{F}_2 & \xrightarrow{\epsilon_{\mathcal{F}_2}} & \mathcal{F}_2. \end{array}$$

Ceci nécessite de vérifier que pour tout ouvert $U \subset X$, on a un carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \varinjlim_{V \supset f(U)} \mathcal{F}_1(f^{-1}(V)) & \xrightarrow{\epsilon_{\mathcal{F}_1}(U)} & \mathcal{F}_1(U) \\ (f^{-1}f_*\varphi)(U) \downarrow & & \downarrow \varphi \\ \varinjlim_{V \supset f(U)} \mathcal{F}_2(f^{-1}(V)) & \xrightarrow{\epsilon_{\mathcal{F}_2}(U)} & \mathcal{F}_2(U). \end{array}$$

On vérifie que c'est bien le cas (je donne moins de détails que pour $\eta\dots$).

(3) On construit maintenant des applications fonctorielles $\alpha = \alpha_{\mathcal{F}, \mathcal{G}}$ et $\beta = \beta_{\mathcal{F}, \mathcal{G}}$:

$$\mathrm{Hom}_{P(X)}(f^{-1}\mathcal{G}, \mathcal{F}) \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha} \\ \xleftarrow{\beta} \end{array} \mathrm{Hom}_{P(Y)}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F}).$$

Pour tout morphisme $u : f^{-1}\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F}$ on pose $\alpha(u) = f_*u \circ \eta_{\mathcal{G}}$:

$$\alpha(u) : \mathcal{G} \xrightarrow{\eta_{\mathcal{G}}} f_*f^{-1}\mathcal{G} \xrightarrow{f_*u} f_*\mathcal{F}.$$

Pour tout morphisme $v : \mathcal{G} \rightarrow f_*\mathcal{F}$ on pose $\beta(v) = \epsilon_{\mathcal{F}} \circ f^{-1}v$:

$$\beta(v) : f^{-1}\mathcal{G} \xrightarrow{f^{-1}v} f^{-1}f_*\mathcal{F} \xrightarrow{\epsilon_{\mathcal{F}}} \mathcal{F}.$$

Dire que $\alpha = \alpha_{\mathcal{F},\mathcal{G}}$ est fonctorielle en \mathcal{F} signifie que pour tout morphisme $\varphi : \mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{F}_2$ de faisceaux sur X , le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{P(X)}(f^{-1}\mathcal{G}, \mathcal{F}_1) & \xrightarrow{u \mapsto \varphi \circ u} & \mathrm{Hom}_{P(X)}(f^{-1}\mathcal{G}, \mathcal{F}_2) \\ \alpha_{\mathcal{F}_1, \mathcal{G}} \downarrow & & \downarrow \alpha_{\mathcal{F}_2, \mathcal{G}} \\ \mathrm{Hom}_{P(Y)}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F}_1) & \xrightarrow{v \mapsto (f_*\varphi) \circ v} & \mathrm{Hom}_{P(Y)}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F}_2) \end{array}$$

Or pour $u : f^{-1}\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F}_1$, ses images dans le diagramme carré ci-dessus sont les suivantes :

$$\begin{array}{ccc} u & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & \varphi \circ u \\ \downarrow & & \downarrow \\ f_*u \circ \eta_{\mathcal{G}} & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & f_*\varphi \circ f_*u \circ \eta_{\mathcal{G}} \stackrel{?}{=} f_*(\varphi \circ u) \circ \eta_{\mathcal{G}}. \end{array}$$

On voit donc que la commutativité découle simplement du fait que $f_*(\varphi \circ u) = f_*\varphi \circ f_*u$. Ceci démontre que α est fonctoriel en \mathcal{F} . Il faut montrer aussi que α est fonctoriel en \mathcal{G} , et que β est fonctoriel en \mathcal{F} et \mathcal{G} . Les vérifications sont du même genre que ci-dessus, et on les laisse au lecteur.

Pour finir, il reste à montrer que α et β sont des bijections inverses l'une de l'autre, i.e. que $\beta \circ \alpha$ est l'identité de $\mathrm{Hom}_{P(X)}(f^{-1}\mathcal{G}, \mathcal{F})$, et que $\alpha \circ \beta$ est l'identité de $\mathrm{Hom}_{P(Y)}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F})$.

(4) Montrons que $\beta \circ \alpha$ est l'identité. Soit $u : f^{-1}\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F}$ un morphisme et $v = \alpha(u) = f_*u \circ \eta_{\mathcal{G}}$. Le morphisme $\beta(\alpha(u)) = \epsilon_{\mathcal{F}} \circ f^{-1}v = \epsilon_{\mathcal{F}} \circ (f^{-1}f_*u) \circ (f^{-1}\eta_{\mathcal{G}})$ est le suivant :

$$f^{-1}\mathcal{G} \xrightarrow{f^{-1}\eta_{\mathcal{G}}} f^{-1}f_*f^{-1}\mathcal{G} \xrightarrow{f^{-1}f_*u} f^{-1}f_*\mathcal{F} \xrightarrow{\epsilon} \mathcal{F}.$$

Soit $U \subset X$ un ouvert. Nous aurons besoin de comprendre l'ensemble :

$$(f^{-1}f_*f^{-1}\mathcal{G})(U) = \varinjlim_{V \supset f(U)} \varinjlim_{W \supset f^{-1}(V)} \mathcal{G}(W).$$

Utilisant le fait que $f(f^{-1}(V)) \subset V$, on a l'équivalence (il y a un petit calcul à faire) :

$$V \supset f(U) \iff f(f^{-1}(V)) \supset f(U).$$

Ceci montre que

$$(f^{-1}f_*f^{-1}\mathcal{G})(U) = \varinjlim_{W \supset f(U)} \mathcal{G}(W).$$

Nous utiliserons ce fait ci-dessous. Montrons maintenant que $\beta(\alpha(u)) = u$. Soit x un élément de $(f^{-1}\mathcal{G})(U)$, c'est la classe d'équivalence $x = \langle V, s \rangle$ d'une paire (V, s) avec $s \in \mathcal{G}(V)$ et V ouvert contenant $f(U)$, pour la relation d'équivalence définie par le fait que deux sections soient égales sur un sous-ouvert contenant $f(U)$. L'image de s par $\eta_{\mathcal{G}}(V)$ est la classe $[V, s]$ pour la relation d'équivalence

définie par le fait que deux sections soient égales sur un sous-ouvert contenant $f(f^{-1}(V))$, et l'image de $\langle (V, s) \rangle$ par $(f^{-1}\eta_{\mathcal{G}})(U)$ est la classe $\langle [V, s] \rangle$ qui à cause des remarques faites au point (4) peut simplement s'écrire $\langle V, s \rangle$. Ensuite, par définition de $(f_*u)(V)$, son image par $(f^{-1}f_*u)(U)$ est égale à la classe $\langle V, u(\langle V, s \rangle) \rangle$ où $u(\langle V, s \rangle) \in \mathcal{F}(f^{-1}(V))$. Enfin, l'image par $\epsilon(U)$ est la section $u(\langle V, s \rangle)|_U$. Comme u est un morphisme de faisceaux, il commute aux restrictions donc on a $u(\langle V, s \rangle)|_U = u(\langle V, s \rangle|_U)$. Enfin comme $x = \langle V, s \rangle$ est, depuis le début du calcul, une section de $f^{-1}\mathcal{G}$ sur l'ouvert U , on a $\langle V, s \rangle|_U = \langle V, s \rangle$. En résumé, l'application $(\beta \circ \alpha)(U)$ envoie $\langle (V, s) \rangle = x$ sur $u(\langle V, s \rangle) = u(x)$, c'est donc l'application $u(U)$.

(5) Montrons que $\alpha \circ \beta$ est l'identité. Soit $v : \mathcal{G} \rightarrow f_*\mathcal{F}$ un morphisme et $u = \beta(v) = \epsilon_{\mathcal{F}} \circ f^{-1}v$. Le morphisme $\alpha(\beta(v)) = (f_*\epsilon_{\mathcal{F}}) \circ (f_*f^{-1}v) \circ \eta_{\mathcal{G}}$ est le suivant :

$$\mathcal{G} \xrightarrow{\eta_{\mathcal{G}}} f_*f^{-1}\mathcal{G} \xrightarrow{f_*f^{-1}v} f_*f^{-1}f_*\mathcal{F} \xrightarrow{f_*\epsilon_{\mathcal{F}}} f_*\mathcal{F}.$$

Soit $V \subset Y$ un ouvert. Nous aurons besoin de comprendre l'ensemble :

$$(f_*f^{-1}f_*\mathcal{F})(V) = \varinjlim_{W \supset f^{-1}(V)} \mathcal{F}(f^{-1}W).$$

C'est un petit exercice de montrer que $W \supset f^{-1}(V)$ si et seulement si $f^{-1}(W) \supset f^{-1}(V)$. Comme de plus $f^{-1}(V)$ est ouvert, on trouve finalement :

$$(f_*f^{-1}f_*\mathcal{F})(V) = \varinjlim_{f^{-1}(W) \supset f^{-1}(V)} \mathcal{F}(f^{-1}W) = \mathcal{F}(f^{-1}(V)).$$

En d'autres termes, on a trouvé un isomorphisme $f_*f^{-1}f_*\mathcal{F} \simeq f_*\mathcal{F}$ et en ces termes, le morphisme $f_*\epsilon_{\mathcal{F}} : f_*f^{-1}f_*\mathcal{F} \rightarrow f_*\mathcal{F}$ est l'identité. Maintenant montrons que $\alpha(\beta(v)) = v$ sur l'ouvert V . Soit $s \in \mathcal{G}(V)$. Son image par $\eta_{\mathcal{G}}(V)$ est la classe $\langle V, s \rangle$ pour la relation d'équivalence définie par le fait que deux sections soient égales sur un sous-ouvert contenant $f(f^{-1}(V))$. Ensuite l'image par $(f_*f^{-1}v)(V)$ est un élément dans $(f_*f^{-1}f_*\mathcal{F})(V)$ qui via l'identification $(f_*f^{-1}f_*\mathcal{F})(V) = \mathcal{F}(f^{-1}(V))$ ci-dessus est simplement la section $v(s) \in \mathcal{F}(f^{-1}(V))$. Comme $f_*\epsilon_{\mathcal{F}}$ est l'identité, on trouve bien que $(\alpha \circ \beta)(V) = v(V)$.

(6) Un petit mot de conclusion. On a vu que :

- la construction de η et ϵ n'est pas trop difficile mais nécessite tout de même quelques vérifications,
- ensuite, la construction de α et β et du fait qu'elles sont (bi-)fonctorielles est facile,
- enfin, la vérification des égalités $\beta \circ \alpha = \text{id}$ et $\alpha \circ \beta = \text{id}$ est plus délicate, notamment à cause du simple fait qu'il faut écrire ce que sont les faisceaux $f^{-1}f_*f^{-1}\mathcal{G}$ et $f_*f^{-1}f_*\mathcal{F}$ (autrement dit, c'est à ce moment que les constructions empilées doivent être déroulées).

□

Introduction à la Géométrie Algébrique. Le langage des schémas

Cours du 27 septembre 2016

Si $f : X \rightarrow Y$ est continue et $\mathcal{F} \in F(X)$, alors $f_*\mathcal{F}$ tel qu'on l'a défini est un faisceau. En revanche, pour $\mathcal{F} \in F(Y)$, le préfaisceau $f^{-1}\mathcal{F}$ n'est pas toujours un faisceau. Un exemple simple de ce phénomène est donné dans l'exercice suivant.

2.6.10 Exercice. Soit X un espace topologique irréductible, par exemple $X = \text{Spec}(A)$ avec A intègre. On rappelle que dans ce cas, tous les ouverts non vides de X sont denses, voir 2.2.4. Montrez que le préfaisceau défini par $\mathcal{F}(U) = \mathbb{Z}$ est un faisceau. Supposons que X contient deux points fermés $x_1 \neq x_2$ et notons $f : \{x_1, x_2\} \hookrightarrow X$ l'inclusion. Montrez que le préfaisceau $f^{-1}\mathcal{F}$ n'est pas un faisceau.

Il est donc crucial de savoir qu'on peut revenir dans la catégorie des faisceaux en associant à un préfaisceau une « meilleure approximation par un faisceau ». Ceci s'exprime ainsi.

2.6.11 Proposition. *Il existe un foncteur $a : P(X) \rightarrow F(X)$ de faisceau associé ou faisceautisation qui est adjoint à gauche pour l'inclusion $i : F(X) \hookrightarrow P(X)$, i.e. on a*

$$\text{Hom}_{P(X)}(\mathcal{F}, i(\mathcal{G})) = \text{Hom}_{F(X)}(a(\mathcal{F}), \mathcal{G})$$

fonctoriellement en $\mathcal{F} \in P(X)$ et $\mathcal{G} \in F(X)$. (On note $i(\mathcal{G})$ pour souligner l'adjonction, mais on note \mathcal{G} dans la pratique.) Le morphisme canonique $\mathcal{F} \rightarrow a(\mathcal{F})$, correspondant à l'identité de $\mathcal{G} = a(\mathcal{F})$ par adjonction, est un isomorphisme sur les fibres.

La situation est similaire à celle de l'exemple (2) de la remarque 2.6.7, c'est-à-dire que a est un adjoint de la famille des réflecteurs.

Démonstration : Soit \mathcal{F} un préfaisceau (de groupes abéliens). Pour $U \subset X$ ouvert, soit $\mathcal{F}'(U)$ l'ensemble des collections $(s(x))_{x \in U}$, $s(x) \in \mathcal{F}_x$, qui proviennent localement d'une section, comme dans l'exercice 2.4.5. Alors \mathcal{F}' est un faisceau ; on pose $a(\mathcal{F}) := \mathcal{F}'$. On montre facilement que a s'étend en un foncteur. Si $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ est un morphisme à valeurs dans un faisceau \mathcal{G} , on en déduit un morphisme $\mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{G}'$. Comme \mathcal{G} est un faisceau, on a $\mathcal{G} \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}'$, d'où on déduit un morphisme $\mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{G}$ par lequel φ se factorise. Ceci montre que a vérifie la propriété attendue. \square

On utilise la faisceautisation pour définir l'image inverse faisceautique :

2.6.12 Définition. L'image inverse d'un faisceau $\mathcal{F} \in F(X)$ par une application continue $f : Y \rightarrow X$ est le faisceau associé au préfaisceau $f^{-1}(\mathcal{F})$ défini précédemment. On la note encore $f^{-1}(\mathcal{F})$.

2.6.13 Proposition (Adjonction (f^{-1}, f_*)). Si $f : X \rightarrow Y$ est continue, on a une bijection

$$\text{Hom}_{F(X)}(f^{-1}\mathcal{G}, \mathcal{F}) = \text{Hom}_{F(Y)}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F})$$

fonctorielle en les faisceaux $\mathcal{F} \in F(X)$ et $\mathcal{G} \in F(Y)$. \square

2.6.14 Exercice. Démontrez cette proposition.

2.6.15 Exercice. Soit X un espace topologique. Étant donné un ensemble E possédant au moins deux éléments, on définit le *préfaisceau constant de valeur E* en posant $\mathcal{F}(U) = E$ pour tout ouvert U , et en prenant toutes les restrictions égales à l'identité de E . Donnez une condition nécessaire et suffisante pour que \mathcal{F} soit un faisceau. Dans le cas général, décrivez le faisceau associé \mathcal{F}' , que l'on appelle le *faisceau constant de valeur E* .

2.6.16 Exercice. On construit quatre catégories dont les objets sont les paires (X, \mathcal{F}) composées d'un espace topologique et un faisceau d'ensembles dessus. Les morphismes entre (X, \mathcal{F}) et (Y, \mathcal{G}) sont les paires (f, φ) où $f : X \rightarrow Y$ est une application continue et φ est un certain morphisme de faisceaux. Les quatre catégories diffèrent par le morphisme φ .

(1) Dans C_1 , on prend pour $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow f^{-1}\mathcal{G}$ un morphisme de faisceaux sur X . Dans C_2 , on prend pour $\varphi : f_*\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ un morphisme de faisceaux sur Y . Justifiez qu'on obtient bien des catégories, en décrivant la composition naturelle des morphismes dans chacune. Montrez que C_1 et C_2 ne sont pas équivalentes (*suggestion : regardez les ensembles $\text{Hom}_{C_i}((X, \mathcal{F}), (Y, \mathcal{G}))$ lorsque $X = \emptyset$*).

(2) Dans C_3 , on prend pour $\varphi : f^{-1}\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F}$ un morphisme de faisceaux sur X . Dans C_4 , on prend pour $\varphi : \mathcal{G} \rightarrow f_*\mathcal{F}$ un morphisme de faisceaux sur Y . Décrivez la composition naturelle des morphismes dans ces catégories. Montrez que C_3 et C_4 sont isomorphes.

Lorsque \mathcal{F}, \mathcal{G} représentent des faisceaux de fonctions (de n'importe quelle sorte) sur X, Y , la functorialité naturelle est *contravariante*, puisque $f : X \rightarrow Y$ fait correspondre à une fonction u sur Y la fonction $u \circ f$ sur X . C'est donc la situation (2).

2.7 Définition des schémas et des morphismes de schémas

2.7.1 Définition. On appelle *espace localement annelé* ou *espace annelé en anneaux locaux* un couple (X, \mathcal{O}_X) composé d'un espace topologique et un faisceau d'anneaux dont les fibres $\mathcal{O}_{X,x}$ sont des anneaux locaux. On note souvent X au lieu de (X, \mathcal{O}_X) . On appelle *morphisme d'espaces localement annelés* un couple $(f, f^\#)$ composé d'une application continue $f : X \rightarrow Y$ et d'un morphisme de faisceaux $f^\# : \mathcal{O}_Y \rightarrow f_*\mathcal{O}_X$ tel que pour tout $x \in X$ d'image $y = f(x)$, le morphisme naturel

$$\mathcal{O}_{Y,y} \xrightarrow{f_y^\#} (f_*\mathcal{O}_X)_y \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x}$$

est un morphisme d'anneaux locaux. On note souvent $f : X \rightarrow Y$ au lieu de $(f, f^\#)$.

Le morphisme de faisceaux $f^\# : \mathcal{O}_Y \rightarrow f_*\mathcal{O}_X$ est souvent appelé le *comorphisme* de f . On prendra garde au fait que, contrairement à ce que la terminologie et la notation peut laisser croire, *il n'est pas déterminé par f* .

Si U est un ouvert de X et $i : U \rightarrow X$ est l'inclusion, l'espace U muni du faisceau $\mathcal{O}_U := \mathcal{O}_X|_U = i^{-1}\mathcal{O}_X$ (voir 2.6.2) est un espace localement annelé. Si $f : X \rightarrow Y$ est un morphisme, $V \subset Y$ un ouvert, $U \subset X$ sa préimage, on a de même un morphisme d'espaces localement annelés induit $f|_U : U \rightarrow V$.

2.7.2 Définition. On appelle *schéma* un espace localement annelé (X, \mathcal{O}_X) qui possède un recouvrement ouvert $X = \cup U_i$ tel que les espaces localement annelés (U_i, \mathcal{O}_{U_i}) sont isomorphes à des schémas affines. Si X, Y sont deux schémas, un *morphisme de schémas* est un morphisme d'espaces annelés $f : X \rightarrow Y$. Le faisceau \mathcal{O}_X est appelé *faisceau de fonctions* ou *faisceau structural* du schéma X . L'espace topologique sous-jacent au schéma X est parfois noté $|X|$ et appelé le *support* de X .

Écrivons explicitement comment s'effectue la composition d'un morphisme $f : X \rightarrow Y$ avec un morphisme $g : Y \rightarrow Z$ (voir aussi l'exercice 2.6.16). On considère le comorphisme $f^\# : \mathcal{O}_Y \rightarrow f_*\mathcal{O}_X$ et son image directe $g_*f^\# : g_*\mathcal{O}_Y \rightarrow g_*f_*\mathcal{O}_X$. Alors, le morphisme composé $X \rightarrow Z$ est le morphisme $(h, h^\#)$ où $h = g \circ f$ est la composée des applications continues, et $h^\# = g_*f^\# \circ f^\#$:

$$\mathcal{O}_Z \xrightarrow{g^\#} g_*\mathcal{O}_Y \xrightarrow{g_*f^\#} g_*f_*\mathcal{O}_X = h_*\mathcal{O}_X.$$

2.7.3 Les schémas affines. Un schéma affine est évidemment un schéma. La catégorie des schémas affines est définie comme une sous-catégorie pleine de la catégorie des schémas. On peut (enfin) compléter la définition du foncteur spectre :

$$\text{Spec} : \{\text{anneaux}\} \longrightarrow \{\text{schémas affines}\},$$

déjà défini sur les objets, en décrivant son action sur les morphismes. Si $\varphi : A \rightarrow B$ est un morphisme d'anneaux, on a défini une application continue $f = \text{Spec}(\varphi) : Y = \text{Spec}(B) \rightarrow X = \text{Spec}(A)$ et nous devons lui associer un morphisme de faisceaux $f^\# : \mathcal{O}_X \rightarrow f_*\mathcal{O}_Y$ pour en faire un morphisme de schémas. On sait qu'il suffit de définir $f^\#$ sur les ouverts principaux $U = D(f)$, $f \in A$. Pour un tel ouvert, on a $f^{-1}(U) = \{y = [q] \in Y; q \cap A \not\cong f\} = \{y = [q] \in Y; q \ni f\} = D(f)$ où l'on note encore f l'image de f dans B , pour simplifier. On aura donc $f_*\mathcal{O}_Y(U) = \mathcal{O}_Y(f^{-1}(U)) = \mathcal{O}_Y(D(f)) = B_f$ et on peut définir $f^\#(U) : A_f \rightarrow B_f$ comme étant le morphisme d'anneaux naturel déduit de $\varphi : A \rightarrow B$ par passage aux localisés. On vérifie que ces constructions font de $f^\#$ un morphisme de faisceaux, et que Spec devient un foncteur comme désiré.

2.7.4 Exercice. Montrez que le foncteur *sections globales du faisceau de fonctions* $X \mapsto \Gamma(X, \mathcal{O}_X) := \mathcal{O}_X(X)$ et le foncteur spectre $A \mapsto \text{Spec}(A)$ sont des équivalences de catégories inverses :

$$\{\text{schémas affines}\} \xrightleftharpoons[\text{Spec}]{\Gamma} \{\text{anneaux}\}.$$

On a ainsi complété le diagramme de 1.3.

2.7.5 Exercice. Soit $X = \text{Spec}(A)$ un schéma affine et U l'ouvert $D(f)$ pour $f \in A$. Montrez que $U = (U, \mathcal{O}_{X|U}) \simeq \text{Spec}(A_f)$.

Nous allons donner les premiers exemples de schémas non affines.

2.7.6 Sous-schémas ouverts. Soit X un schéma. Si $i : U \subset X$ est un ouvert de l'espace topologique sous-jacent à X , l'espace annelé (U, \mathcal{O}_U) avec $\mathcal{O}_U := \mathcal{O}_{X|U} = i^{-1}\mathcal{O}_X$, est un schéma (voir 2.6.2 pour la restriction d'un faisceau à un ouvert). En effet, soit $x \in U$ un point. Soit $V = \text{Spec}(A)$ un ouvert affine de X contenant x . Comme les ouverts distingués de V forment une base de sa topologie, il existe $f \in A$ tel que $W = D(f) \subset U$ contient x . Alors $(W, \mathcal{O}_W) = (W, \mathcal{O}_{X|W}) = (W, \mathcal{O}_{U|W})$ est un schéma affine et on a ainsi recouvert U par des schémas affines. On dit que la structure de schéma sur U est *induite* par celle de X .

2.7.7 Définition. Un *sous-schéma ouvert* de X est un ouvert $U \subset X$ muni de sa structure de schéma induit. Une *immersion ouverte* est un morphisme de schémas $f : X' \rightarrow X$ qui se factorise en

$$X' \xrightarrow{g} U \xrightarrow{i} X$$

où g est un isomorphisme et i est l'inclusion d'un sous-schéma ouvert dans X .

2.7.8 Proposition. Soit $i : U \subset X$ un sous-schéma ouvert de X . Soit $f : Y \rightarrow X$ un morphisme de schémas tel que $f(|Y|) \subset |U|$. Alors, il existe un unique morphisme de schémas $g : Y \rightarrow U$ tel que $f = i \circ g$.

Démonstration : Comme U est ouvert, l'application $g : |Y| \rightarrow |U|$ définie par $g(y) = f(y)$ est continue et vérifie $f = i \circ g$. Par l'adjonction (f^{-1}, f_*) , le morphisme de faisceaux $f^\# : \mathcal{O}_X \rightarrow f_*\mathcal{O}_Y$ détermine un morphisme $g^{-1}i^{-1}\mathcal{O}_X = f^{-1}\mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_Y$. Par l'adjonction (g^{-1}, g_*) , on obtient un morphisme $\mathcal{O}_U = i^{-1}\mathcal{O}_X \rightarrow g_*\mathcal{O}_Y$ que nous notons $g^\#$. Il est facile de vérifier que la paire $(g, g^\#)$ définit un morphisme de schémas. \square

2.7.9 Exemple. Soit $X = \mathbb{A}_k^2 = \text{Spec}(k[x, y])$ le plan affine sur un corps k . Montrons que le sous-schéma ouvert $U = X \setminus \{0\}$, complémentaire de l'origine $\{0\} = V(x, y)$, n'est pas affine. Calculons les fonctions globales sur U . D'après la propriété de faisceau, une fonction $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ est déterminée par ses restrictions $f|_{D(x)}$ et $f|_{D(y)}$ qui coïncident sur $D(xy)$. Or $\mathcal{O}_X(D(x)) = k[x, y, 1/x]$ et $\mathcal{O}_X(D(y)) = k[x, y, 1/y]$, et les deux applications de restriction vers $\mathcal{O}_X(D(xy)) = k[x, y, 1/x, 1/y]$ sont les inclusions. Ainsi f est un élément de l'intersection $k[x, y, 1/x] \cap k[x, y, 1/y]$ prise dans $k[x, y, 1/x, 1/y]$, i.e. $f \in k[x, y]$. En conclusion la restriction $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow \Gamma(U, \mathcal{O}_U)$ est un isomorphisme. Si U était affine, en passant aux spectres on obtiendrait que l'inclusion $U \rightarrow X$ est un isomorphisme. Donc U n'est pas affine.

2.7.10 Exercice. Soit X un schéma et $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ une fonction régulière globale. Montrez que l'ensemble $X_f = \{x \in X, f(x) \neq 0\}$ est un ouvert de X .

3 Recollement et produits fibrés

Dans cette partie, nous introduisons quelques propriétés et attributs des schémas. Nous donnons aussi quelques constructions et des premiers exemples, mais l'accent est surtout mis sur la présentation de concepts qui permettront de décrire des exemples plus concrets dans la partie suivante.

3.1 Recollement

En topologie, le procédé de *recollement* (*gluing* ou *glueing* en anglais) consiste à de donner des espaces topologiques X_i indicés par un ensemble I , et des ouverts $X_{i,j} \subset X_i$ pour chaque paire d'indices i, j que l'on recolle au moyen d'homéomorphismes convenables $\varphi_{i,j} : X_{i,j} \simeq X_{j,i}$ pour former un nouvel espace topologique X contenant les X_i comme ouverts. La construction réalise X comme un quotient de la somme disjointe $\coprod X_i$ par une relation d'équivalence ; il s'agit donc d'un cas particulier de la notion d'espace topologique quotient. Ce procédé est familier par exemple pour fabriquer la droite projective complexe comme réunion de deux copies de \mathbb{C} recollées le long de leurs ouverts \mathbb{C}^* . Nous décrivons ici sa formulation dans le cadre des schémas.

3.1.1 Théorème. Supposons donnés :

- une famille de schémas $\{X_i\}_{i \in I}$,
- des familles d'ouverts $X_{i,j} \subset X_i$ pour $i, j \in I$,
- des isomorphismes de schémas $\varphi_{i,j} : X_{i,j} \xrightarrow{\sim} X_{j,i}$ pour $i, j \in I$,

satisfaisant les conditions :

- $X_{i,i} = X_i$ et $\varphi_{i,i} = \text{id}$ pour tout i ,
- $\varphi_{j,i} = \varphi_{i,j}^{-1}$,
- $\varphi_{i,j}(X_{i,j} \cap X_{i,k}) = X_{j,i} \cap X_{j,k}$ et $(\varphi_{j,k} \circ \varphi_{i,j})|_{X_{i,j} \cap X_{i,k}} = \varphi_{i,k}|_{X_{i,j} \cap X_{i,k}}$ pour tous i, j, k .

Alors il existe un unique schéma X possédant un recouvrement par des ouverts $U_i \subset X$ isomorphes aux X_i , de telle manière que les intersections $U_i \cap U_j$ sont isomorphes aux $X_{i,j}$ et que les applications identiques $U_i \cap U_j \rightarrow U_j \cap U_i$ s'identifient aux isomorphismes $\varphi_{i,j}$. Il est appelé le recollement des X_i le long des ouverts $X_{i,j}$, ou recollement des X_i le long des isomorphismes $\varphi_{i,j}$.

3.1.2 Exemples. Voici deux exemples simples.

(1) (Décollement) Soit X un schéma et (X_i) un recouvrement ouvert de X (chaque sous-espace ouvert de l'espace topologique $|X|$ détermine un sous-schéma ouvert $X_i \subset X$, i.e. X_i est en particulier un schéma). Considérons les ouverts $X_{i,j} := X_i \cap X_j$. On a $X_{j,i} = X_j \cap X_i = X_{i,j}$ et on peut noter $\varphi_{i,j} : X_{i,j} \xrightarrow{\sim} X_{j,i}$ le morphisme identité. La donnée $(X_i, X_{i,j}, \varphi_{i,j})$ est obtenue en quelque sorte en « décollant » X . Le recollement des X_i le long des $\varphi_{i,j}$ est le schéma initial X .

(2) Dans le cas où tous les $X_{i,j}$ sont vides, on obtient la *somme disjointe* (ou *réunion disjointe*) des X_i , notée $X := \coprod_{i \in I} X_i$. On construit X de la manière suivante. L'espace topologique sous-jacent est la somme (ou réunion) disjointe des X_i . Ses éléments sont des paires (i, x) avec $x \in X_i$, et ses ouverts sont les parties de la forme $U := \coprod_{i \in I} U_i$ où chaque U_i est un ouvert de X_i . On dispose de morphismes d'inclusion $f_i : X_i \rightarrow X$ qui sont des applications continues ouvertes et fermées. On munit X du faisceau d'anneaux $\mathcal{O} = \prod_{i \in I} (f_i)_* \mathcal{O}_{X_i}$. (L'idée intuitive est qu'une fonction sur une somme disjointe d'espaces X_i est une collection de fonctions sur chacun des X_i .) Pour chaque i , notons $\mathcal{U}_i = (U_{i,j})$ un recouvrement de X_i par des ouverts affines, comme dans la définition 2.7.2. À l'aide de f_i , on peut voir $U_{i,j}$ comme un ouvert de X . On voit facilement que la réunion $\mathcal{U} = \cup \mathcal{U}_i$ est un recouvrement de (X, \mathcal{O}) par des ouverts affines. Donc X est un schéma.

Le cas simple de la somme disjointe renferme déjà quelques subtilités que l'on voit sur deux exemples proposés en exercice.

3.1.3 Exercice. (1) Montrez que $\text{Spec}(A_1) \amalg \cdots \amalg \text{Spec}(A_n) \simeq \text{Spec}(A_1 \times \cdots \times A_n)$.

(2) Soit k un corps. Soit $X = \coprod_{i \in \mathbb{N}} X_i$ une somme disjointe dénombrable de k -points $X_i = \text{Spec}(k)$. Calculez $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$. Montrez que X n'est pas un schéma affine. Montrez qu'il existe un morphisme $X \rightarrow \text{Spec}(k^{\mathbb{N}})$ qui n'est pas surjectif.

3.1.4 Preuve de 3.1.1 : Nous allons expliquer la construction de X et laisser en exercice la vérification des propriétés annoncées. On note X' la somme disjointe des X_i ; ses éléments sont des paires (i, x) avec $x \in X_i$. On munit X' de la relation définie par $(i, x_i) \sim (j, x_j)$ si et seulement si $x_j = \varphi_{i,j}(x_i)$. Les trois conditions de compatibilité assurent que la relation est réflexive, symétrique et transitive i.e. une relation d'équivalence. On note X le quotient de X' par cette relation d'équivalence et $\pi : X' \rightarrow X$ l'application quotient. On munit X de la topologie quotient, i.e. une partie

$U \subset X$ est déclarée ouverte si et seulement si $\pi^{-1}(U) \subset X'$ est ouvert. Il reste à munir X d'un faisceau de fonctions \mathcal{O}_X . Le candidat naturel est le faisceau des fonctions sur X' qui sont invariantes pour la relation d'équivalence ; nous allons formaliser ceci précisément. Dans le cadre ensembliste, une relation d'équivalence est une certaine partie $R \subset X' \times X'$. Cette donnée est équivalente à celle de deux applications $s, t : R \rightarrow X'$ telles que $x_1 \sim x_2$ si et seulement s'il existe $r \in R$ tel que $x_1 = s(r)$, $x_2 = t(r)$. Une fonction $f : X' \rightarrow Z$ est invariante pour la relation d'équivalence ssi $f \circ s = f \circ t$, ce qui s'écrit encore $s^\# f = t^\# f$. Ainsi formulées, ces idées s'adaptent sans problème. La relation d'équivalence sur X' est l'ensemble $R = \coprod X_{i,j}$. Le morphisme $s : R \rightarrow X'$ est donné par les inclusions évidentes $X_{i,j} \hookrightarrow X'$, et on a un morphisme de faisceaux $s^\# : \mathcal{O}_{X'} \rightarrow s_* \mathcal{O}_R$ qui fait de s un morphisme de schémas. De même $t : R \rightarrow X'$ est donné par les morphismes $X_{i,j} \xrightarrow{\varphi_{i,j}} X_{j,i} \hookrightarrow X'$. On pose :

$$\mathcal{O}_X(U) = \{f \in \mathcal{O}_{X'}(U); s^\#(f) = t^\#(f)\}.$$

Pour finir, on vérifie que X est un schéma et qu'il satisfait les propriétés attendues. Signalons que la construction du faisceau \mathcal{O}_X peut être formulée d'une manière différente, susceptible d'apporter un éclairage complémentaire, dans la proposition 3.10 du livre de Görtz et Wedhorn [GW]. \square

3.1.5 Remarques. (1) Il est bien sûr suffisant de se donner des $X_{i,j}$ et des $\varphi_{i,j}$ pour $i \neq j$, mais nous avons préféré inclure les données $i = j$ pour mettre en évidence le fait que les trois conditions de compatibilité correspondent aux trois propriétés de la relation d'équivalence qui définit le recollement.

(2) En topologie, il n'est pas nécessaire que les parties $X_{i,j}$ soient ouvertes pour faire fonctionner la construction et obtenir un recollement. En revanche, en géométrie algébrique, si les $X_{i,j}$ ne sont pas ouverts, l'espace annelé obtenu par recollement est très loin d'être un schéma en général.

(3) Soient $(X_i, \varphi_{i,j} : X_{i,j} \rightarrow X_{j,i})$ et $(Y_i, \psi_{i,j} : Y_{i,j} \rightarrow Y_{j,i})$ deux collections de données comme dans le théorème 3.1.1. Soient X, Y les schémas obtenus par recollement. Soient $f_i : X_i \rightarrow Y_i$ des morphismes tels que $f_i(X_{i,j}) \subset Y_{i,j}$ et $\psi_{i,j} \circ f_i = f_j \circ \varphi_{i,j}$ sur $X_{i,j}$, pour tous i, j . Alors les f_i se recollent en un morphisme $f : X \rightarrow Y$. Un cas particulier intéressant est celui où tous les Y_i sont égaux à Y .

(4) La donnée des schémas X_i , des ouverts $X_{i,j}$ et des isomorphismes $\varphi_{i,j}$ peut sembler lourde à manipuler. En fait, dans la plupart des situations concrètes, ces objets sont souvent « naturels » au point où la vérification des conditions de compatibilité est à peu près triviale. Comme il est écrit dans [EH], § I.2.4 : *In these and indeed in almost all applications, we don't really need to give the maps $\psi_{\alpha\beta}$ explicitly : we are actually given a topological space $|X|$ and a family of open subsets $|X_\alpha|$, each endowed with the structure of an affine scheme — that is, with a structure sheaf \mathcal{O}_{X_α} — in such a way that $\mathcal{O}_{X_\alpha}(X_\alpha \cap X_\beta)$ is naturally identified with $\mathcal{O}_{X_\beta}(X_\alpha \cap X_\beta)$. For example, they might both be given as subsets of a fixed set.* Nous allons tout de suite illustrer cette observation.

3.1.6 Exercice. (Voir exercice [EH], I-44) Soit k un corps. On note $X_1 = \text{Spec}(k[s])$ et $X_2 = \text{Spec}(k[t])$ deux copies de la droite affine, et $U_1 = D(s)$, $U_2 = D(t)$ les ouverts complémentaires de l'origine.

(1) On appelle *droite projective sur k* et on note \mathbb{P}_k^1 le recollement de X_1 et X_2 le long de l'isomorphisme $U_1 \simeq U_2$ donné par le morphisme d'anneaux $k[s, s^{-1}] \rightarrow k[t, t^{-1}]$, $s \mapsto t^{-1}$. Ensemblistement, c'est une droite affine complétée par un point à l'infini. Montrez que $\Gamma(\mathbb{P}_k^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^1}) = k$.

(2) On appelle *droite affine avec origine dédoublée* et on note D le recollement de X_1 et X_2 le long de l'isomorphisme $U_1 \simeq U_2$ donné par le morphisme d'anneaux $k[s, s^{-1}] \rightarrow k[t, t^{-1}]$, $s \mapsto t$. Montrez que $\Gamma(D, \mathcal{O}_D) = k[s]$.

Introduction à la Géométrie Algébrique. Le langage des schémas

Cours du 4 octobre 2016

3.2 Schémas relatifs et foncteur de points

Lorsqu'on étudie les variétés algébriques sur un corps de base k , les éléments de ce corps jouent le rôle de constantes et les morphismes entre variétés sont les k -morphisms. Concrètement, dans le langage des schémas ceci signifie que les objets qu'on étudie sont des morphismes $s_X : X \rightarrow \text{Spec}(k)$ et que les morphismes entre X et Y sont les morphismes $f : X \rightarrow Y$ tels que $s_Y \circ f = s_X$. (Dans le cas affine ceci signifie simplement que X est spectre d'un anneau A qui est une k -algèbre, et que les morphismes considérés sont les morphismes de k -algèbres $A \rightarrow B$.) Plus généralement, il est souvent commode de travailler avec des schémas sur un schéma de base fixé S .

3.2.1 Définition. Soit S un schéma. On appelle *catégorie des schémas au-dessus de S* et on note Sch/S la catégorie dont les objets sont les schémas X équipés d'un morphisme $s_X : X \rightarrow S$, et dont les morphismes sont définis par $\text{Hom}_{\text{Sch}/S}(X, Y) = \{f : X \rightarrow Y \text{ tel que } s_Y \circ f = s_X\}$.

Un objet de Sch/S est parfois noté simplement X/S . Un morphisme entre X/S et Y/S est parfois appelé S -morphisme, et on note $\text{Hom}_S(X, Y)$ au lieu de $\text{Hom}_{\text{Sch}/S}(X, Y)$. Par construction, le schéma S est un objet terminal de Sch/S . Lorsque $S = \text{Spec}(A)$, on parle aussi de la catégorie Sch/A des A -schémas, on note $\text{Hom}_A(X, Y)$ au lieu de $\text{Hom}_S(X, Y)$, etc. Si X est un A -schéma et $A \rightarrow B$ est un morphisme d'anneaux, on note parfois abusivement $X \otimes_A B$ au lieu de $X \times_{\text{Spec}(A)} \text{Spec}(B)$.

3.2.2 Points d'un schéma. Nous allons voir comment la notion habituelle, naïve de « point » prend une place très importante dans le monde des schémas.

3.2.3 Lemme. Soient X un schéma. Pour tout corps K , on a une bijection entre l'ensemble des morphismes $\text{Spec}(K) \rightarrow X$ et l'ensemble des paires (x, i) composés d'un point $x \in |X|$ et d'un morphisme de corps $i : \kappa(x) \rightarrow K$.

Démonstration : L'ensemble sous-jacent à $\text{Spec}(K)$ est un point que nous noterons t . Soit $f : \text{Spec}(K) \rightarrow X$ un morphisme et $x = f(t)$. Soit $U = \text{Spec}(A) \subset X$ un ouvert affine contenant x , avec $x = [p]$. D'après 2.7.8, on dispose d'un morphisme $g : \text{Spec}(K) \rightarrow U$ par lequel f se factorise. Comme $g(t) = x$, le morphisme d'anneaux correspondant $\varphi : A \rightarrow K$ vérifie $\varphi^{-1}(O) = p$ donc induit des morphismes $A_p \rightarrow K$ puis $A_p/pA_p \rightarrow K$, i.e. $\kappa(x) \rightarrow K$. Réciproquement, étant donné $x \in |X|$ et $i : \kappa(x) \rightarrow K$ on peut construire un morphisme $f : \text{Spec}(K) \rightarrow X$ de la manière suivante. On choisit $U = \text{Spec}(A)$ tel que $x = [p]$. En passant au spectre, les morphismes d'anneaux $A \rightarrow A_p \rightarrow A_p/pA_p = \kappa(x) \rightarrow K$ donnent un morphisme de schémas $\text{Spec}(K) \rightarrow \text{Spec}(A) = U \subset X$. Ce morphisme ne dépend pas du choix de U , car si U' est un autre voisinage ouvert affine, on peut en choisir un troisième $V \subset U \cap U'$ et utiliser les compatibilités des morphismes de restriction. Pour finir on montre que les deux constructions sont inverses l'une de l'autre. \square

3.2.4 Exercice. Soit k un corps et $A = k[t_1, \dots, t_n]/(f_1, \dots, f_r)$ une k -algèbre de type fini. Soit K/k une extension de corps. Montrez que l'ensemble des K -points de $X = \text{Spec}(A)$ est en bijection avec l'ensemble des solutions dans K du système $f_1 = \dots = f_r = 0$, c'est-à-dire l'ensemble des n -uplets $(x_1, \dots, x_n) \in K^n$ tels que $f_1(x_1, \dots, x_n) = \dots = f_r(x_1, \dots, x_n) = 0$.

Le lemme précédent montre que les morphismes $\text{Spec}(K) \rightarrow X$ depuis le spectre d'un corps permettent de reconstituer l'ensemble des points de l'espace topologique $|X|$. Si on regarde attentivement la preuve, on voit qu'elle démontre plus généralement que pour tout anneau *local* \mathcal{O} , on a une bijection entre l'ensemble des morphismes $\text{Spec}(\mathcal{O}) \rightarrow X$ et l'ensemble des paires (x, i) composés d'un point $x \in |X|$ et d'un morphisme d'anneaux locaux $i : \mathcal{O}_{X,x} \rightarrow \mathcal{O}$. Ainsi, les morphismes $\text{Spec}(\mathcal{O}) \rightarrow X$ permettent en quelque sorte de reconstituer les voisinages des points dans $|X|$. Il est intéressant d'élargir encore le point de vue pour reconstituer encore plus d'informations sur X .

3.2.5 Définition. Un *point de X à valeurs dans un anneau A* ou *A -point de X* est un morphisme de schémas $\text{Spec}(A) \rightarrow X$. Plus généralement, un *point de X à valeurs dans un schéma T* ou *T -point de X* est un morphisme de schémas $T \rightarrow X$. Si X est un S -schéma, un point de X/S à valeurs dans un S -schéma T est un morphisme de S -schémas $T \rightarrow X$. On note $h_X(T) = \text{Hom}_S(T, X)$ l'ensemble des T -points de X/S . On appelle *foncteur des points de X/S* le foncteur $h_X : (\text{Sch}/S)^\circ \rightarrow \text{Ens}$ ainsi défini.

Le lemme de Yoneda dit que X/S est déterminé par son foncteur de points. Il s'agit en fait d'un énoncé très général, dans une catégorie arbitraire.

3.2.6 Lemme de Yoneda. Soit C une catégorie. Pour tout $X \in C$, on note $h_X : C^\circ \rightarrow \text{Ens}$ le foncteur défini par $h_X(T) = \text{Hom}_C(T, X)$. Alors le foncteur $X \mapsto h_X$, de C dans la catégorie des foncteurs contravariants de C dans Ens , est pleinement fidèle.

La démonstration est formelle est peu difficile. On peut la trouver dans [Le] ou dans [Mac]. Comme elle n'apporte pas beaucoup de compréhension, nous ne la donnerons pas. Nous verrons sur les exemples que décrire le foncteur de points d'un S -schéma S revient en général à donner une propriété universelle dont il est solution.

3.3 L'espace affine $\mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^n$

3.3.1 Définition. On appelle *espace affine de dimension n sur \mathbb{Z}* le schéma $\mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^n = \text{Spec}(\mathbb{Z}[t_1, \dots, t_n])$ où t_1, \dots, t_n sont des indéterminées. Ce schéma possède n fonctions régulières globales distinguées t_1, \dots, t_n .

Nous allons donner une description du foncteur de points de $\mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^n$. Plus généralement voici une description du foncteur de points d'un schéma affine $\text{Spec}(A)$.

3.3.2 Théorème. Soit A un anneau et T un schéma. L'application qui à $f : T \rightarrow \text{Spec}(A)$ associe le morphisme $A \rightarrow \Gamma(T, \mathcal{O}_T)$ obtenu en prenant les sections globales de $f^\sharp : \mathcal{O}_{\text{Spec}(A)} \rightarrow f_*\mathcal{O}_T$ définit une bijection :

$$\text{Hom}_{\text{Sch}}(T, \text{Spec}(A)) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\text{Ann}}(A, \Gamma(T, \mathcal{O}_T)).$$

Cette bijection est fonctorielle en A et T .

On peut interpréter cet énoncé comme l'existence d'un adjoint pour l'inclusion de la catégorie des schémas affines dans celle de tous les schémas (prenez garde au fait qu'ici les foncteurs sont contravariants ce qui nécessite d'être soigneux dans la lecture de la définition donnée dans 2.6.7).

Démonstration : Construisons une application en sens inverse. Soit $\varphi : A \rightarrow \mathcal{O}_T(T)$ un morphisme d'anneaux. Pour tout ouvert affine $U = \text{Spec}(B)$ dans T , la composée $A \rightarrow \mathcal{O}_T(T) \xrightarrow{\text{res}} \mathcal{O}_T(U) = B$ définit en passant aux spectres un morphisme de schémas $f_U : U \rightarrow \text{Spec}(A)$. Si $V = \text{Spec}(C)$ est un autre ouvert affine, et $W = \text{Spec}(D)$ est un ouvert affine inclus dans $U \cap V$, la propriété de faisceau de \mathcal{O}_T fournit un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \text{res}_U^T & \rightarrow & \mathcal{O}_T(U) = B & \xrightarrow{\text{res}_W^U} & \mathcal{O}_T(W) = D. \\
 A & \longrightarrow & \mathcal{O}_T(T) & & & & \\
 & & \text{res}_V^T & \rightarrow & \mathcal{O}_T(V) = C & \xrightarrow{\text{res}_W^V} &
 \end{array}$$

En passant aux spectres, ceci montre que f_U et f_V coïncident sur W . Comme ceci est vrai pour tous les ouverts affines W et que ceux-ci recouvrent $U \cap V$, on voit que f_U et f_V coïncident sur $U \cap V$. Ils se recollent donc en un morphisme $f : T \rightarrow \text{Spec}(A)$ que nous noterons $\Delta(\varphi)$.

Il nous faut maintenant démontrer que ces deux constructions sont inverses l'une de l'autre. Soit $f : T \rightarrow \text{Spec}(A)$ un morphisme de schémas, $\varphi = \Gamma(f^\#) : A \rightarrow \mathcal{O}_T(T)$ le morphisme d'anneaux induit, et $f' = \Delta(\varphi) : T \rightarrow \text{Spec}(A)$ construit comme précédemment. Pour montrer que $f = f'$ il suffit de le faire sur chaque ouvert $U = \text{Spec}(B)$ d'un recouvrement de T . Or $f|_U$ et $f'|_U$ sont deux morphismes entre schémas affines, donc il suffit de montrer que les morphismes d'anneaux associés sont égaux. Or le morphisme d'anneaux associé à $f|_U$ est $\text{res}_U^T \circ \varphi : A \rightarrow \Gamma(T, \mathcal{O}_T) \rightarrow \Gamma(U, \mathcal{O}_T)$, et il en va de même pour f' , comme la construction de $f(\varphi)$ le montre. Nous laissons à la lectrice la vérification du fait que $\Gamma(\Delta(\varphi)^\#) = \varphi$, en donnant un indice : recouvrir T par des ouverts affines U_i , $i \in I$ puis utiliser d'une part le fait que $\Gamma(\Delta(\varphi)^\#|_{U_i}) = \text{res}_{U_i} \circ \varphi$ et d'autre part le fait que $\mathcal{O}_T(T)$ est l'égalisateur des deux flèches $\prod \mathcal{O}_T(U_i) \rightrightarrows \prod \mathcal{O}_T(U_{i,j})$, c'est-à-dire l'ensemble des collections (s_i) telles que $s_i|_{U_{i,j}} = s_j|_{U_{i,j}}$ pour tous i, j .

Pour finir, il faut démontrer que cette bijection est fonctorielle en A et X . Ceci ne présente pas de vraie difficulté et nous laissons l'exercice au lecteur. \square

3.3.3 Remarque. En prenant $A = \mathbb{Z}$ dans 3.3.2, on voit que tout schéma possède un et un seul morphisme vers $\text{Spec}(\mathbb{Z})$. On dit que $\text{Spec}(\mathbb{Z})$ est un *objet terminal* (ou *final*) de la catégorie des schémas.

3.3.4 Corollaire. Soit $\mathcal{H}om_{\text{Sch}}(X, \mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^n)$ le faisceau sur X dont les sections sur un ouvert U sont les morphismes de schémas $U \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^n$. On a des isomorphismes fonctoriels en X :

$$\text{Hom}_{\text{Sch}}(X, \mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^n) \xrightarrow{\sim} \Gamma(X, \mathcal{O}_X)^n \quad \text{et} \quad \mathcal{H}om_{\text{Sch}}(X, \mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^n) \xrightarrow{\sim} (\mathcal{O}_X)^n.$$

En particulier, les fonctions sur X , définies précédemment comme les sections du faisceau \mathcal{O}_X , peuvent également être vues comme morphismes de X vers la droite affine. \square

Démonstration : Le premier isomorphisme provient du théorème précédent. Comme il est valable pour tout ouvert $U \subset X$, il donne l'isomorphisme de faisceaux indiqué. \square

Reformulons ce résultat comme une propriété universelle : pour tout schéma X et tout n -uplet de fonctions régulières $(f_1, \dots, f_n) \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)^n$, il existe un unique morphisme de schémas $f : X \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^n$ tel que $f^\#(t_i) = f_i$ pour tout $i = 1, \dots, n$.

3.3.5 Exercice. Décrivez les différents types de points de $X = \mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^1$, la droite affine sur \mathbb{Z} , comme dans [EH], § II.4.3, exercice II-37.

3.4 L'espace projectif $\mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^n$

On construit l'espace projectif $\mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^n$ par le procédé de recollement. Pour cela, considérons des indéterminées t_0, \dots, t_n et l'anneau $K = \mathbb{Z}[t_0, \dots, t_n, \frac{1}{t_0 \dots t_n}]$. Pour tout entier $i \in \{0, \dots, n\}$, les n éléments $t_0/t_i, \dots, t_{i-1}/t_i, t_{i+1}/t_i, \dots, t_n/t_i$ sont algébriquement indépendants sur \mathbb{Z} . Ainsi l'anneau

$$A_i = \mathbb{Z} \left[\frac{t_0}{t_i}, \dots, \frac{t_n}{t_i} \right]$$

est isomorphe à un anneau de polynômes sur \mathbb{Z} , donc le schéma $X_i = \text{Spec}(A_i)$ est un espace affine de dimension n au-dessus de $\text{Spec}(\mathbb{Z})$. Pour tout $j \neq i$, le schéma

$$X_{i,j} = D \left(\frac{t_j}{t_i} \right) = \text{Spec} \left(\mathbb{Z} \left[\frac{t_0}{t_i}, \dots, \frac{t_n}{t_i}, \frac{t_j}{t_i} \right] \right)$$

est un ouvert principal de X_i . De l'isomorphisme d'anneaux

$$u_{i,j} : \mathbb{Z} \left[\frac{t_0}{t_j}, \dots, \frac{t_n}{t_j}, \frac{t_j}{t_i} \right] \longrightarrow \mathbb{Z} \left[\frac{t_0}{t_i}, \dots, \frac{t_n}{t_i}, \frac{t_j}{t_i} \right]$$

donné par l'égalité comme sous-anneaux de K , on déduit un isomorphisme de schémas :

$$\varphi_{i,j} = \text{Spec}(u_{i,j}) : X_{i,j} \longrightarrow X_{j,i}.$$

Le fait que les $u_{i,j}$ soient des morphismes identiques dans un anneau ambiant K fait que toutes les conditions de compatibilité nécessaires au recollement sont automatiques. Par exemple, la condition $(\varphi_{j,k} \circ \varphi_{i,j})|_{X_{i,j} \cap X_{i,k}} = \varphi_{i,k}|_{X_{i,j} \cap X_{i,k}}$ revient à dire que les trois anneaux

$$\mathbb{Z} \left[\frac{t_0}{t_i}, \dots, \frac{t_n}{t_i}, \frac{t_j}{t_i}, \frac{t_k}{t_i} \right], \quad \mathbb{Z} \left[\frac{t_0}{t_j}, \dots, \frac{t_n}{t_j}, \frac{t_j}{t_i}, \frac{t_k}{t_i} \right], \quad \mathbb{Z} \left[\frac{t_0}{t_k}, \dots, \frac{t_n}{t_k}, \frac{t_k}{t_i}, \frac{t_j}{t_i} \right]$$

sont égaux. On en déduit que les X_i se recollent en un schéma que l'on note $X = \mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^n$.

Nous décrirons plus loin le foncteur de points, ou la propriété universelle, de l'espace projectif $\mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^n$.

3.4.1 Exercice. Soit X le plan affine avec origine dédoublée, obtenu en recollant $X_1 = \mathbb{A}_k^2$ avec $X_2 = \mathbb{A}_k^2$ le long de leur ouvert commun $U_1 = U_2 = \mathbb{A}_k^2 \setminus \{0\}$ (avec isomorphisme de recollement égal à l'identité). Montrez qu'il existe dans X deux ouverts affines dont l'intersection n'est pas affine.

3.5 Produits fibrés

3.5.1 Un aperçu sur la dimension.

3.5.2 Définition. Soit A un anneau. On appelle *dimension de Krull* de A et on note $\dim(A)$ le supremum des longueurs r de chaînes $p_0 \subsetneq p_1 \subsetneq \cdots \subsetneq p_r$ d'idéaux premiers de A .

Soit X un espace topologique. On appelle *dimension combinatoire* de X et on note $\dim(X)$ le supremum des longueurs r de chaînes $Y_0 \supsetneq Y_1 \supsetneq \cdots \supsetneq Y_r$ de fermés irréductibles de X .

La théorie de la dimension des anneaux noethériens est une partie très importante et subtile de l'algèbre commutative. Nous nous contentons d'en citer sans preuve quelques résultats marquants.

3.5.3 Proposition. *Soit A un anneau noethérien.*

- (1) *Si A est local, alors $\dim(A) < \infty$.*
- (2) *On a $\dim(A) = \sup \{\dim(A_p), p \subset A \text{ premier}\}$.*
- (3) *Si A est une algèbre intègre de type fini sur un corps k , alors $r = \dim(A) < \infty$ est égal au degré de transcendance sur k du corps de fractions de A . De plus, toutes les chaînes maximales de premiers sont de longueur r .*
- (4) *L'anneau A possède un nombre fini d'idéaux premiers minimaux.*
- (5) *Si A est un corps alors $\dim(A) = 0$. Si $A = \mathbb{Z}$ alors $\dim(A) = 1$. Si t est une indéterminée, on a $\dim(A[t]) = \dim(A) + 1$.*
- (6) *Il existe un anneau noethérien de dimension infinie.*

Démonstration : Dans le livre de Eisenbud [Ei], ces résultats sont discutés dans l'introduction du chapitre 8 (notamment dans la section 8.1 qui est très intéressante), puis démontrés au fur et à mesure du chapitre. Par exemple (1) est conséquence de cor. 10.7, (3) est le th. A dans la section 13.1, (4) est le th. 3.1, (5) est cor. 10.13. Enfin pour (6) on peut trouver un exemple dans [Na], appendice A1, exemple 1 et reproduit dans [Ei], exer. 9.6 ou ici. \square

3.5.4 Produit de schémas. Le produit de variétés est une opération fondamentale ; en géométrie différentielle, c'est lui qui permet de définir la variété \mathbb{R}^n à partir de \mathbb{R} . En géométrie algébrique, il serait bienvenu qu'il permette de définir l'espace affine \mathbb{A}_k^n à partir de \mathbb{A}_k^1 . Malheureusement, en ce qui concerne les espaces topologiques ce n'est pas du tout le cas. Par exemple, l'espace $|\mathbb{A}_k^2|$ est beaucoup plus gros que $|\mathbb{A}_k^1| \times |\mathbb{A}_k^1|$. En effet, supposant le corps k algébriquement clos pour simplifier, on a $|\mathbb{A}_k^1| = k \cup \{\eta_{\mathbb{A}^1}\}$ où $\eta_{\mathbb{A}^1}$ est le point générique, alors que $|\mathbb{A}_k^2|$ comprend k^2 (points de dimension 0), les points génériques de courbes irréductibles planes (points de dimension 1), et un point générique $\eta_{\mathbb{A}^2}$. (Nous renvoyons à 2.1.3 pour la description de \mathbb{A}_k^2 .) Il y a une application continue naturelle $|\mathbb{A}_k^2| \longrightarrow |\mathbb{A}_k^1| \times |\mathbb{A}_k^1|$ décrite ainsi :

- le point fermé $(a, b) \in k^2$ est envoyé sur le couple (a, b) ,
- le point générique η_C d'une courbe verticale $C = \{a\} \times \mathbb{A}^1(k)$ est envoyé sur $(a, \eta_{\mathbb{A}^1})$, le point générique η_C d'une courbe horizontale $C = \mathbb{A}^1(k) \times \{b\}$ est envoyé sur $(\eta_{\mathbb{A}^1}, b)$, et le point générique η_C d'une courbe « transverse » est envoyé sur $(\eta_{\mathbb{A}^1}, \eta_{\mathbb{A}^1})$,
- le point générique $\eta_{\mathbb{A}^2}$ est envoyé sur $(\eta_{\mathbb{A}^1}, \eta_{\mathbb{A}^1})$.

On voit que les courbes transverses contribuent à grossir excessivement la fibre au-dessus de $(\eta_{\mathbb{A}^1}, \eta_{\mathbb{A}^1})$. En fait la bonne définition du produit est la définition *catégorique*, c'est celle que nous adoptons dans la catégorie des schémas.

3.5.5 Définition. Dans une catégorie C , le *produit* de deux objets X, Y est un objet Z muni de deux morphismes $p_1 : Z \rightarrow X$ et $p_2 : Z \rightarrow Y$ tel que pour toute paire de morphismes $u : W \rightarrow X$ et $v : W \rightarrow Y$, il existe un unique morphisme $w : W \rightarrow Z$ tel que $u = p_1 w$ et $v = p_2 w$.

3.5.6 Exercice. Démontrez que le produit $\mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^1 \times \mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^1$ est égal à $\mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^2$.

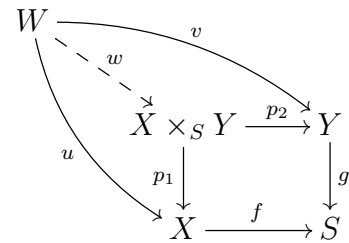
3.5.7 Produit fibré de schémas. Le résultat de l'exercice ci-dessus met en évidence un phénomène curieux : on a $\dim(\mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^2) = 3$ alors que $\dim(\mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^1) + \dim(\mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^1) = 4$ (rappelons-nous que $\dim(A[t]) = \dim(A) + 1$ pour A noethérien, voir 3.5.3). Ceci provient du fait que le schéma $\text{Spec}(\mathbb{Z})$ est de dimension 1. Si on pose $\dim^*(X) = \dim(X) - \dim(\text{Spec}(\mathbb{Z})) = \dim(X) - 1$, on obtient $\dim^*(\mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^n) = n$ et la relation

$$\dim^*(\mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^{n+m}) = \dim^*(\mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^n) + \dim^*(\mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^m)$$

à lieu. Pour comprendre pourquoi la définition de \dim^* est naturelle, il suffit de mettre $\text{Spec}(\mathbb{Z})$ à sa juste place, qui est celle d'objet terminal de la catégorie des schémas. (Rappelons qu'un *objet terminal* dans une catégorie C est un objet $T \in C$ tel que tout objet X possède un unique morphisme $X \rightarrow T$.) La catégorie des espaces topologiques et celle des variétés différentielles ont un objet terminal qui est le point ; c'est parce qu'il est de dimension 0 qu'il ne perturbe pas la relation $\dim(X \times Y) = \dim(X) + \dim(Y)$.

Dans une catégorie qui possède un objet terminal, le produit est un cas particulier de produit fibré. Le produit fibré porte bien son nom : c'est un produit pour des objets *fibrés au-dessus d'une base* S , et c'est pour mesurer la dimension des fibres que l'invariant \dim^* est pertinent.

3.5.8 Définition. Dans une catégorie C , le *produit fibré* de deux morphismes $f : X \rightarrow S$ et $g : Y \rightarrow S$ est un objet Z muni de deux morphismes $p_1 : Z \rightarrow X$ et $p_2 : Z \rightarrow Y$ tels que $f p_1 = g p_2$, avec la propriété suivante : pour toute paire de morphismes $u : W \rightarrow X$ et $v : W \rightarrow Y$ tels que $f u = g v$, il existe un unique morphisme $w : W \rightarrow Z$ tel que $u = p_1 w$ et $v = p_2 w$. On dit que u et v sont les *composantes* de w et on note $w = (u, v)$. Lorsqu'il existe, le produit fibré est unique à unique isomorphisme près et il est noté $X \times_{f,S,g} Y$ ou simplement $X \times_S Y$.



Par exemple, dans la catégorie des ensembles le produit fibré est l'ensemble $\{(x, y); f(x) = g(y)\}$ muni des deux projections naturelles.

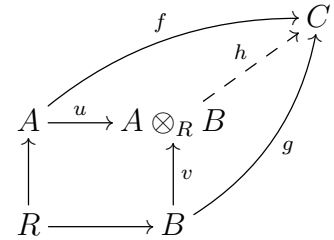
Dans la catégorie des schémas, le produit fibré existe et nous allons le construire par recollement à partir du cas affine. Pour cela, on a besoin du *produit tensoriel d'algèbres* dont nous rappelons sans preuve la définition et une description sommaire.

3.5.9 Proposition. Soit R un anneau.

(1) Soient M, N deux R -modules. Il existe un R -module $M \otimes_R N$ et une application R -bilinéaire $b : M \times N \rightarrow M \otimes_R N$ avec la propriété universelle suivante : pour tout R -module P et toute application R -bilinéaire $u : M \times N \rightarrow P$, il existe un unique morphisme de R -modules $u' : M \otimes_R N \rightarrow P$ tel que $u = u' \circ b$. Le couple $(M \otimes_R N, u)$ est appelé le produit tensoriel des modules M et N . Ses éléments sont des sommes finies de tenseurs élémentaires $m \otimes n = u(m, n)$.

(2) Soient A, B deux R -algèbres. Muni de la multiplication obtenue en posant $(a \otimes b) \cdot (a' \otimes b') = aa' \otimes bb'$ et en étendant par bilinéarité, le R -module $A \otimes_R B$ est une R -algèbre de neutre multiplicatif $1 \otimes 1$.

Il est muni de deux morphismes de R -algèbres $u : A \rightarrow A \otimes_R B$, $a \mapsto a \otimes 1$ et $v : B \rightarrow A \otimes_R B$, $b \mapsto 1 \otimes b$. Le triplet $(A \otimes_R B, u, v)$ vérifie la propriété universelle suivante : pour toute R -algèbre C et pour tout couple de morphismes de R -algèbres $f : A \rightarrow C$, $g : B \rightarrow C$, il existe un unique morphisme de R -algèbres $h : A \otimes_R B \rightarrow C$ tel que $f = h \circ u$ et $g = h \circ v$. Le triplet $(A \otimes_R B, u, v)$ est appelé produit tensoriel des algèbres A et B .



Démonstration : Voir [Ei] ou [Mat]. □

On peut noter que dans bien des situations, le produit tensoriel $A \otimes_R B$ peut être identifié à une algèbre connue, ce qui en donne une description plus commode que la description abstraite. Par exemple, si X et Y sont des indéterminées ou des familles d'indéterminées, en observant que $R[X, Y]$ vérifie la propriété universelle du produit tensoriel d'algèbres on voit que $R[X] \otimes_R R[Y] \simeq R[X, Y]$.

3.5.10 Théorème. *Le produit fibré $X \times_S Y$ de deux morphismes $f : X \rightarrow S$ et $g : Y \rightarrow S$ existe dans la catégorie des schémas.*

Démonstration : Premier cas : $X = \text{Spec}(A)$, $Y = \text{Spec}(B)$, $S = \text{Spec}(R)$ tous trois affines. Dans ce cas, se donner des morphismes $u : W \rightarrow X$ et $v : W \rightarrow Y$ tels que $fu = gv$ est équivalent à se donner des morphismes d'anneaux $u' : A \rightarrow \Gamma(W, \mathcal{O}_W)$ et $v' : B \rightarrow \Gamma(W, \mathcal{O}_W)$ tels que $u'f' = v'g'$, d'après le théorème 3.3.2. Comme la somme amalgamée de A et B le long de R dans la catégorie des anneaux commutatifs unitaires est leur produit tensoriel (c'est la propriété universelle donnée ci-dessus), on en déduit qu'il existe un unique morphisme d'anneaux $w' : A \otimes_R B \rightarrow \Gamma(W, \mathcal{O}_W)$ par lequel u' et v' se factorisent. Au morphisme w' est associé (par 3.3.2 encore) un morphisme de schémas $w : W \rightarrow \text{Spec}(A \otimes_R B)$. Ceci montre que $X \times_S Y = \text{Spec}(A \otimes_R B)$.

Nous terminerons la démonstration au prochain cours. □

Introduction à la Géométrie Algébrique. Le langage des schémas

Cours du 11 octobre 2016

Démonstration : Deuxième cas : seul S est affine. Choisissons des recouvrements ouverts affines $X = \cup X_i$ et $Y = \cup Y_k$ et notons $X_{i,j} = X_i \cap X_j$, $Y_{k,l} = Y_k \cap Y_l$. D'après le premier cas, les produits fibrés $Z_{i,k} := X_i \times_S Y_k$ existent. Notons $Z = Z_{i,j,k,l}$ le sous-schéma ouvert $p_1^{-1}(X_{i,j}) \cap p_2^{-1}(Y_{k,l})$ dans $Z_{i,k} = X_i \times_S Y_k$, où $p_1 : Z_{i,k} \rightarrow X_i$ et $p_2 : Z_{i,k} \rightarrow Y_k$ sont les projections. Utilisant la proposition 2.7.8, on vérifie immédiatement que Z possède la propriété universelle du produit fibré $X_{i,j} \times_S Y_{k,l}$. Ceci réalise ce produit fibré comme un ouvert de $Z_{i,k}$ et la même construction permet de le voir comme un ouvert de $Z_{i,l}$, $Z_{j,k}$ et $Z_{j,l}$. On peut alors recoller les schémas $Z_{i,k}$ le long des ouverts $Z_{i,j,k,l}$ pour former un schéma $X \times_S Y$. (Il s'agit d'un recollement ordinaire dans lequel l'ensemble d'indices de la famille de schémas à recoller est un produit cartésien de deux ensembles.) Vérifions que c'est bien le produit fibré attendu. Étant donné $u : W \rightarrow X$ et $v : W \rightarrow Y$ tels que $fu = gv$, on considère les ouverts $W_{i,k} = u^{-1}(X_i) \cap v^{-1}(Y_k)$ dans W . On construit des morphismes $W_{i,k} \rightarrow X_i \times_S Y_k$ qui se recollent en un morphisme $W \rightarrow X \times_S Y$.

Troisième cas : cas général. Soit $S = \cup S_i$ un recouvrement de S par des ouverts affines. Soient $X_i = f^{-1}(S_i)$ et $Y_i = g^{-1}(S_i)$ qui sont ouverts dans X et Y . Par restriction, on dispose de morphismes $f_i : X_i \rightarrow S_i$ et $g_i : Y_i \rightarrow S_i$. D'après le deuxième cas, les produits fibrés $X_i \times_{S_i} Y_i$ existent. Il n'est pas difficile de voir que les produits fibrés $X_{i,j} \times_{S_{i,j}} Y_{i,j}$ existent également et se réalisent comme des ouverts dans $X_i \times_{S_i} Y_i$ et dans $X_j \times_{S_j} Y_j$. Ces derniers se recollent donc pour former un schéma $X \times_S Y$ pour lequel on vérifie comme précédemment la propriété de produit fibré. \square

Observons que comme $\text{Spec}(\mathbb{Z})$ est un objet terminal pour la catégorie des schémas (cf 3.3.3), en prenant $S = \text{Spec}(\mathbb{Z})$ dans le théorème on obtient l'existence de produits absolus $X \times Y$ dans Sch .

Nous voici en mesure de définir l'espace affine relatif de dimension n , en termes de son foncteur de points comme dans le corollaire 3.3.4, puis de démontrer son existence comme schéma.

3.5.11 Proposition. *Soit S un schéma et n un entier. Il existe un S -schéma noté \mathbb{A}_S^n et appelé espace affine relatif sur S de dimension n , muni de n fonctions régulières globales t_1, \dots, t_n , ayant la propriété universelle suivante : pour tout S -schéma T , l'application qui à un S -morphisme $f : T \rightarrow \mathbb{A}_S^n$ associe le n -uplet de fonctions $(f^\sharp(t_1), \dots, f^\sharp(t_n))$ induit une bijection fonctorielle en T :*

$$\text{Hom}_S(T, \mathbb{A}_S^n) \xrightarrow{\sim} \Gamma(T, \mathcal{O}_T)^n.$$

Démonstration : Considérons $X := \mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^n \times S$ vu comme un S -schéma à l'aide de la deuxième projection $\mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^n \times S \rightarrow S$. Il suffit de démontrer que X satisfait la propriété universelle annoncée. La propriété universelle du produit qui définit X fournit :

$$\text{Hom}_S(T, \mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^n \times S) = \{ \text{couples } (u : T \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^n, v : T \rightarrow S) \text{ tels que } v = s_T \}$$

où $s_T : T \rightarrow S$ est le morphisme de structure qui fait de T un S -schéma. Ainsi v est entièrement déterminé par T , et on en déduit que

$$\mathrm{Hom}_S(T, \mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^n \times S) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(T, \mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^n) = \Gamma(T, \mathcal{O}_T)^n$$

d'après la propriété universelle de $\mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^n$. □

3.5.12 Exercice. Démontrez que si A est un anneau quelconque, on a $\mathbb{A}_A^n = \mathrm{Spec}(A[t_1, \dots, t_n])$. Démontrez que si S est un schéma quelconque, on peut construire \mathbb{A}_S^n en choisissant un recouvrement de S par des ouverts affines $S_i = \mathrm{Spec}(A_i)$ et en recollant les schémas $\mathbb{A}_{A_i}^n$ le long d'isomorphismes convenables (et dont l'existence est donnée par une certaine propriété universelle).

3.5.13 Exercice. Soient X/S et Y/S deux S -schémas. Montrez qu'il existe une application naturelle $|X \times_S Y| \rightarrow |X| \times_{|S|} |Y|$ et qu'elle est surjective.

3.5.14 Exercice. Soit S un schéma et $S' \rightarrow S$ un morphisme.

- (1) Définissez un foncteur *changement de base* $\mathrm{Sch}/S \rightarrow \mathrm{Sch}/S'$, $X \mapsto X_{S'} := X \times_S S'$.
- (2) Montrez que le composé des changements de base par $S' \rightarrow S$ et $S'' \rightarrow S'$ est isomorphe au changement de base par $S'' \rightarrow S$.
- (2) Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de S -schémas. Montrez que si f est une immersion ouverte, alors pour tout $S' \rightarrow S$, le morphisme $f_{S'} : X_{S'} \rightarrow Y_{S'}$ est une immersion ouverte. On dit que la propriété d'être une immersion est *stable par changement de base*.

3.5.15 Fibres, intersections, diagonales, égalisateurs. L'existence de produits fibrés de schémas a pour conséquence que certains objets habituels en géométrie ont un sens naturel comme schémas. Nous donnons quatre exemples.

- (1) Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de schémas. Soit $y \in Y$ un point vu comme un morphisme de schémas $\mathrm{Spec}(\kappa(y)) \rightarrow Y$, cf 3.2.3. La *fibre de f en y* , notée $f^{-1}(y)$ ou X_y , est par définition le schéma $X \times_Y \mathrm{Spec}(\kappa(y))$.
- (2) Soient Y, Z deux sous-schémas ouverts d'un schéma X . L'*intersection de Y et Z dans X* , notée $Y \cap Z$, est par définition le schéma $Y \times_X Z$. (Nous n'avons défini pour l'instant que les sous-schémas ouverts mais cette définition sera valable également pour les sous-schémas fermés ou localement fermés.)
- (3) Soit $f : X \rightarrow S$ un morphisme de schémas. La *diagonale relative de X/S* ou *diagonale du S -schéma X* est par définition le morphisme $\Delta_{X/S} : X \rightarrow X \times_S X$ dont les deux composantes sont $\mathrm{id} : X \rightarrow X$.
- (4) Soient $f, g : X \rightarrow Y$ deux morphismes de schémas de mêmes source et but. Soit $(f, g) : X \rightarrow Y \times Y$ le morphisme de composantes f et g . Soit $\Delta : Y \rightarrow Y \times Y$ la diagonale de Y . L'*égalisateur de f et g* est par définition le schéma $X \times_{(f,g), Y \times Y, \Delta} Y$.

3.5.16 Exercice. (1) On considère le morphisme d'élévation à la puissance n -ième dans la droite affine complexe, plus précisément le morphisme $f : \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^1 \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^1$ donné par le morphisme de \mathbb{C} -algèbres $\mathbb{C}[t] \rightarrow \mathbb{C}[t]$ qui envoie t sur t^n . Calculez la fibre au sens des schémas au-dessus d'un point fermé.

(2) Dans le plan affine complexe $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$, calculez l'intersection au sens des schémas de la parabole d'équation $y = x^2$ et d'une droite horizontale d'équation $y = a$, $a \in \mathbb{C}$.

(3) Calculez la diagonale relative du \mathbb{C} -schéma $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^1$. Calculez la diagonale relative de l'immersion ouverte donnée par un ouvert affine principal $D(f) \hookrightarrow \text{Spec}(A)$. Montrez que la diagonale relative d'un monomorphisme de schémas est un isomorphisme.

4 Modules sur les schémas

Le foncteur Spectre permet de plonger la catégorie des anneaux dans celle des schémas. De même, on peut plonger la catégorie des modules sur un anneau dans une catégorie de modules sur les schémas, et les modules sur les schémas jouent un rôle aussi fondamental que le rôle joué par les modules sur les anneaux.

4.1 Modules sur les espaces annelés

4.1.1 Noyaux, images, quotients, etc. Dans la présentation des faisceaux, pour simplifier nous avons surtout considéré le cas de faisceaux d'*ensembles*. Ce que nous avons dit était aussi valable pour des faisceaux de groupes abéliens ou d'anneaux. Certaines constructions de la catégorie des groupes ou de la catégorie des anneaux (comme les noyaux, images, quotients) ont un analogue pour les faisceaux. L'idée générale est la suivante : on définit un préfaisceau en appliquant cette construction pour chaque ouvert U , puis on passe au faisceau associé si nécessaire. Voici quelques exemples. On fixe un espace topologique X .

(produit) Soit $\{\mathcal{F}_i\}_{i \in I}$ une famille de faisceaux. Le préfaisceau \mathcal{P} défini par $\mathcal{P}(U) = \prod_{i \in I} \mathcal{F}_i(U)$ est un faisceau. On l'appelle le *faisceau produit* des \mathcal{F}_i et on le note $\prod_{i \in I} \mathcal{F}_i$.

(somme) Soit $\{\mathcal{F}_i\}_{i \in I}$ une famille de faisceaux de groupes abéliens. Le préfaisceau \mathcal{S}_0 défini par $\mathcal{S}_0(U) = \bigoplus_{i \in I} \mathcal{F}_i(U)$ n'est pas un faisceau en général. On note \mathcal{S} le faisceau associé, on l'appelle le *faisceau somme directe* des \mathcal{F}_i et on le note $\bigoplus_{i \in I} \mathcal{F}_i$.

(noyau) Soit $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ un morphisme de faisceaux de groupes abéliens. Le préfaisceau \mathcal{K} défini par $\mathcal{K}(U) = \ker(\varphi(U))$ est un faisceau. On l'appelle le *noyau de φ* et on le note $\ker(\varphi)$.

(image) le préfaisceau \mathcal{I}_0 défini par $\mathcal{I}_0(U) = \text{im}(\varphi(U))$ n'est pas un faisceau en général. On note \mathcal{I} le faisceau associé à \mathcal{I}_0 , on l'appelle l'*image de φ* et on le note $\text{im}(\varphi)$.

(conoyau) le préfaisceau \mathcal{C}_0 défini par $\mathcal{C}_0(U) = \text{coker}(\varphi(U))$ n'est pas un faisceau en général. On note \mathcal{C} le faisceau associé à \mathcal{C}_0 , on l'appelle le *conoyau de φ* et on le note $\text{coker}(\varphi)$.

Dans la suite, il arrivera que certaines constructions du même genre apparaissent sans être détaillées explicitement, dans le cas de faisceaux de groupes, d'anneaux, de modules, d'idéaux...

Passons maintenant aux modules. Soit (X, \mathcal{O}_X) un espace annelé.

4.1.2 Définition. On appelle *faisceau de \mathcal{O}_X -modules* ou simplement *\mathcal{O}_X -module* un faisceau de groupes abéliens \mathcal{F} sur X muni d'un morphisme de faisceaux $\mathcal{O}_X \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ satisfaisant les axiomes d'un module sur un anneau. Autrement dit, pour tout ouvert $U \subset X$ le groupe abélien $\mathcal{F}(U)$ est muni d'une structure de $\mathcal{O}_X(U)$ -module de telle sorte que la loi externe pour les applications de restriction $\mathcal{F}(V) \rightarrow \mathcal{F}(U)$ est compatible aux applications $\mathcal{O}_X(V) \rightarrow \mathcal{O}_X(U)$, pour toute inclusion d'ouverts $U \subset V$. Un *morphisme de \mathcal{O}_X -modules* est un morphisme de faisceaux $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ tel que $\varphi(U)$ est un morphisme de $\mathcal{O}_X(U)$ -modules pour tout U . On note $\text{Mod}(\mathcal{O}_X)$ la catégorie des \mathcal{O}_X -modules.

Le noyau, le conoyau, l'image d'un morphisme de \mathcal{O}_X -modules est un \mathcal{O}_X -module. La notion de sous-module est immédiate. Le quotient d'un \mathcal{O}_X -module par un sous- \mathcal{O}_X -module est un \mathcal{O}_X -module. Une somme directe, ou un produit direct de \mathcal{O}_X -modules est un \mathcal{O}_X -module.

Si \mathcal{F} et \mathcal{G} sont deux \mathcal{O}_X -modules, alors le faisceau associé au préfaisceau $U \mapsto \mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{G}(U)$ est un \mathcal{O}_X -module appelé *produit tensoriel de \mathcal{F} et \mathcal{G}* et noté $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$. Le préfaisceau $U \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{O}_U}(\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}|_U)$ des morphismes locaux entre \mathcal{F} et \mathcal{G} est un faisceau de \mathcal{O}_X -modules appelé *faisceau des morphismes entre \mathcal{F} et \mathcal{G}* et noté $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$. Pour un ouvert $U \subset X$ fixé (par exemple $U = X$), on prendra garde de ne pas confondre les objets suivants :

$$\begin{aligned} & \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_U}(\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}|_U) \text{ qui est un faisceau,} \\ & \text{Hom}_{\mathcal{O}_U}(\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}|_U) \text{ qui est un ensemble de morphismes de faisceaux,} \\ & \text{Hom}_{\mathcal{O}_X(U)}(\mathcal{F}(U), \mathcal{G}(U)) \text{ qui est un ensemble de morphismes de modules.} \end{aligned}$$

Les deux premiers sont reliés par le fait que $\Gamma(U, \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_U}(\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}|_U)) = \text{Hom}_{\mathcal{O}_U}(\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}|_U)$. Les deux derniers sont reliés par le morphisme de $\mathcal{O}_X(U)$ -modules :

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{O}_U}(\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}|_U) & \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}_X(U)}(\mathcal{F}(U), \mathcal{G}(U)). \\ \varphi & \longmapsto \varphi(U) \end{aligned}$$

Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme d'espaces annelés. Si \mathcal{F} est un \mathcal{O}_X -module, le faisceau $f_*\mathcal{F}$ est naturellement un $f_*\mathcal{O}_X$ -module et le morphisme $f^\sharp : \mathcal{O}_Y \rightarrow f_*\mathcal{O}_X$ permet de le voir comme un \mathcal{O}_Y -module. Si \mathcal{G} est un \mathcal{O}_Y -module, le faisceau $f^{-1}\mathcal{G}$ est naturellement un $f^{-1}\mathcal{O}_Y$ -module. Le morphisme $f^{-1}\mathcal{O}_Y \rightarrow \mathcal{O}_X$ déduit de f^\sharp par adjonction permet de définir le \mathcal{O}_X -module $f^*\mathcal{G} := f^{-1}\mathcal{G} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X$. On a ainsi défini des foncteurs image directe $f_* : \text{Mod}(\mathcal{O}_X) \rightarrow \text{Mod}(\mathcal{O}_Y)$ et image inverse $f^* : \text{Mod}(\mathcal{O}_Y) \rightarrow \text{Mod}(\mathcal{O}_X)$.

4.1.3 Proposition (Adjonction (f^*, f_*)). Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme d'espaces annelés. Alors on a une bijection canonique, fonctorielle en $\mathcal{F} \in \text{Mod}(X)$ et $\mathcal{G} \in \text{Mod}(Y)$:

$$\text{Hom}_{\text{Mod}(X)}(f^*\mathcal{G}, \mathcal{F}) = \text{Hom}_{\text{Mod}(Y)}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F}).$$

Démonstration : Exercice. Indication : utiliser l'adjonction (f^{-1}, f_*) des faisceaux. □

4.1.4 Exercice. Soient X un schéma et $x \in |X|$ un point vu comme un morphisme $x : \text{Spec}(k) \rightarrow X$ où $k = \kappa(x)$ est le corps résiduel. On s'intéresse aux adjonctions (x^{-1}, x_*) entre catégories de faisceaux d'ensembles, et (x^*, x_*) entre catégories de faisceaux de modules.

(1) Décrivez les foncteurs $x_* : F(\text{Spec}(k)) \rightarrow F(X)$ lorsque F est la catégorie des faisceau d'ensembles ou de groupes abéliens. Décrivez le foncteur $x_* : \text{Mod}(\text{Spec}(k)) \rightarrow \text{Mod}(X)$. Dans tous les cas on appelle $x_*\mathcal{F}$ un *faisceau gratte-ciel* en x .

(2) Soit \mathcal{F} un faisceau d'ensembles ou de groupes abéliens sur X . Montrez que l'image inverse $x^{-1}\mathcal{F}$ est (le faisceau sur $\text{Spec}(k)$ associé à) la fibre \mathcal{F}_x .

(2) Soit \mathcal{F} un faisceau de \mathcal{O}_X -modules. Décrivez l'image inverse $x^*\mathcal{F}$. Le k -espace vectoriel $\mathcal{F}(x) = \Gamma(\text{Spec}(k), x^*\mathcal{F})$ est encore appelé *fibre de \mathcal{F} en x* .

4.1.5 Exercice. Démontrez les faits suivants. Soient X un schéma et $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}$ des \mathcal{O}_X -modules.

(1) (Adjonction $(\otimes, \mathcal{H}om)$) Il existe un isomorphisme canonique

$$\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}, \mathcal{H}) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{G}, \mathcal{H})).$$

(2) (Dual et $\mathcal{H}om$) Il existe un morphisme canonique $\mathcal{F}^\vee \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ qui est un isomorphisme si \mathcal{F} est localement libre de rang fini.

(3) Il existe un morphisme canonique $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{H})$ qui est un isomorphisme si \mathcal{F} ou \mathcal{H} est localement libre de rang fini.

Soient $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de schémas, \mathcal{F} un \mathcal{O}_X -module et \mathcal{G}, \mathcal{H} des \mathcal{O}_Y -modules.

(4) (Formule de projection) Il existe un morphisme canonique $f_*\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{G} \rightarrow f_*(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} f^*\mathcal{G})$. Si \mathcal{G} est localement libre, ce morphisme est un isomorphisme.

(5) (f^* et $\mathcal{H}om$) Il existe un morphisme canonique $f^*\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{G}, \mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(f^*\mathcal{G}, f^*\mathcal{H})$ qui est un isomorphisme si \mathcal{G} est localement libre de rang fini.

(6) (f^* et dual, cas particulier de (5) où $\mathcal{H} = \mathcal{O}_Y$.) Il existe un morphisme canonique $f^*(\mathcal{G}^\vee) \rightarrow (f^*\mathcal{G})^\vee$ qui est un isomorphisme si \mathcal{G} est localement libre de rang fini.

4.2 Modules quasi-cohérents sur les schémas

Pour tout anneau A , un module M définit un \mathcal{O}_X -module sur $X = \text{Spec}(A)$ par le même procédé naturel que celui qui nous a permis de définir le faisceau de fonctions \mathcal{O}_X . Pour tout $f \in A$, on note classiquement $M[1/f]$ ou M_f le localisé de M par rapport à la partie multiplicative $S = \{1, f, f^2, \dots\}$. C'est un A_f -module.

4.2.1 Proposition. Sur $X = \text{Spec}(A)$, les données suivantes :

(1) $\mathcal{F}(D(f)) = M_f$ pour tout $f \in A$,

(2) $\text{res}_{D(g), D(f)} : M_g \rightarrow M_f$ égal à l'application naturelle, pour toute inclusion $D(f) \subset D(g)$,

définissent un \mathcal{B} -faisceau. On note $\mathcal{F} = \widetilde{M}$ le faisceau qu'il détermine. La fibre de ce faisceau en un point $x = [p]$ est le A_p -module $\mathcal{F} = M_p$. Tout morphisme de A -modules $u : M \rightarrow N$ définit un morphisme de \mathcal{O}_X -modules $\widetilde{u} : \widetilde{M} \rightarrow \widetilde{N}$.

Démonstration : La preuve est la même que celle de 2.5.1. □

4.2.2 Proposition. Soit A un anneau et M, N deux A -modules. Les applications

$$\mathrm{Hom}_A(M, N) \xrightleftharpoons[\Gamma]{u \rightarrow \tilde{u}} \mathrm{Hom}_X(\tilde{M}, \tilde{N})$$

sont des bijections inverses l'une de l'autre. De

Démonstration : Soit $u : M \rightarrow N$ un morphisme de A -modules et $\varphi = \tilde{u}$. L'égalité $u = \Gamma(\varphi)$ découle de la définition. Soit $\varphi : \tilde{M} \rightarrow \tilde{N}$ un morphisme de \mathcal{O}_X -modules et $u = \Gamma(\varphi) = \varphi(X)$. Par compatibilité de φ aux restrictions, pour tout ouvert principal $U = D(f)$, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\varphi(X)} & N \\ \downarrow & & \downarrow \\ M_f & \xrightarrow{\varphi(U)} & N_f. \end{array}$$

Ceci montre que $\varphi(U)(m) = u(m)$ pour tout $m \in M$. Comme $\varphi(U)$ est un morphisme de A_f -modules, on a alors $\varphi(U)(m/f^n) = u(m)/f^n$ pour tous $m \in M, n \geq 0$. Ceci montre que $\varphi = \tilde{u}$. \square

4.2.3 Proposition. Si $\cdots \rightarrow M \rightarrow M' \rightarrow M'' \rightarrow \cdots$ est une suite exacte de A -modules, alors $\cdots \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F}'' \rightarrow \cdots$ est une suite exacte de \mathcal{O}_X -modules, où $\mathcal{F} = \tilde{M}$ etc. En particulier, le foncteur tilde préserve les noyaux, les conoyaux et les images : le noyau du tilde est le tilde du noyau, etc.

Démonstration : Soit $\cdots \rightarrow M \xrightarrow{u} M' \xrightarrow{v} M'' \rightarrow \cdots$ une suite exacte de A -modules. Soit $x = [p]$ un point de X . Comme la localisation des modules par rapport à une partie multiplicative est un foncteur exact (voir [Mat], th. 4.5), on déduit une suite exacte $\cdots \rightarrow M_p \rightarrow M'_p \rightarrow M''_p \rightarrow \cdots$. Comme $M_p = \mathcal{F}_x$, cette suite se réécrit $\cdots \rightarrow \mathcal{F}_x \xrightarrow{u} \mathcal{F}'_x \xrightarrow{v} \mathcal{F}''_x \rightarrow \cdots$. Or le germe en un point du noyau d'un morphisme de faisceaux de modules est le noyau du morphisme sur les germes, en symboles : $\ker(\varphi_x) = \ker(\varphi)_x$ pour un morphisme $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$. La même propriété vaut pour les images de morphismes. Il s'ensuit que l'inclusion de faisceaux $\mathrm{im}(u) \rightarrow \ker(v)$ est un isomorphisme sur les fibres, donc un isomorphisme, donc la suite $\cdots \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F}'' \rightarrow \cdots$ est exacte. \square

4.2.4 Remarque. Considérons deux catégories C, D où la notion de suite exacte a un sens. Si un foncteur $F : C \rightarrow D$ transforme suites exactes en suites exactes, on dit que c'est un foncteur *exact*. Comme toute suite exacte $\cdots \rightarrow M \xrightarrow{u} M' \xrightarrow{u'} M'' \xrightarrow{u''} \cdots$ peut être décomposée en suites exactes courtes

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \ker(u) & \longrightarrow & M & \longrightarrow & \mathrm{im}(u) \longrightarrow 0 \\ 0 & \longrightarrow & \ker(u') & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & \mathrm{im}(u') \longrightarrow 0 \\ 0 & \longrightarrow & \ker(u'') & \longrightarrow & M'' & \longrightarrow & \mathrm{im}(u'') \longrightarrow 0, \end{array}$$

il suffit de montrer que F transforme suites exactes courtes en suites exactes courtes.

4.2.5 Exercice. Soit A un anneau et $X = \mathrm{Spec}(A)$. Montrez que le foncteur tilde préserve les sommes directes arbitraires.

Introduction à la Géométrie Algébrique. Le langage des schémas

Cours du 18 octobre 2016

Sur un schéma affine $X = \text{Spec}(A)$, les \mathcal{O}_X -modules qui sont intéressants en géométrie algébrique sont les modules $\mathcal{F} = \widetilde{M}$ définis par un module sur un anneau. Tous ne sont pas de cette forme :

4.2.6 Exemple. Soit A un anneau de valuation discrète, comme le localisé de \mathbb{Z} en un idéal premier (p) , ou un localisé d'un anneau de polynômes $k[x]$ en un idéal premier (f) , ou l'anneau des entiers p -adiques, ou un anneau de séries formelles à une variable $k[[x]]$ (avec k un corps). L'espace topologique $X = \text{Spec}(A)$ possède deux points, un point fermé correspondant à l'idéal maximal m et un point ouvert η correspondant à l'idéal premier (0) . Notons $U = \{\eta\}$. On définit un sousfaisceau $\mathcal{S} \subset \mathcal{O}_X$ en posant $\mathcal{S}(X) = 0$ et $\mathcal{S}(U) = \mathcal{O}_X(U) = \text{Frac}(A)$. S'il existe un A -module M tel que $\mathcal{S} = \widetilde{M}$, on a $M = \Gamma(X, \widetilde{M}) = \Gamma(X, \mathcal{S}) = 0$ donc $\mathcal{S} = \widetilde{M} = 0$, contradiction.

Or les A -modules vérifient une propriété qui, bien que stupide, se transfère du côté des \mathcal{O}_X -modules en une propriété qui ne l'est pas : ils sont engendrés par leurs éléments. Plus précisément, ils peuvent être définis par générateurs et relations, ce qui signifie que pour tout A -module M il existe une suite exacte :

$$A^{(J)} \longrightarrow A^{(I)} \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

où $A^{(I)}, A^{(J)}$ sont les modules libres sur des ensembles de base I, J . Par exemple, si $A = k[x, y]$ et $M = k[x, y]/(f, g)$ où $f, g \in A$ sont deux polynômes, alors M possède la présentation

$$A^2 \xrightarrow{u} A \xrightarrow{v} M \longrightarrow 0$$

où u est l'application A -linéaire de matrice $(f \ g) \in M_{1,2}(A)$, c'est-à-dire $u(a, b) = af + bg$ et v est le morphisme de quotient. Une autre manière de le dire est que tout module est conoyau d'un morphisme entre modules libres. Ceci implique que sur $X = \text{Spec}(A)$, le module $\mathcal{F} = \widetilde{M}$ peut être défini par générateurs et relations. C'est cette propriété qui est à l'origine de la définition des modules quasi-cohérents.

4.2.7 Définition. Soit X un espace annelé. On dit qu'un \mathcal{O}_X -module est *quasi-cohérent* si tout point $x \in X$ possède un voisinage ouvert U sur lequel $\mathcal{F}|_U$ peut être défini par générateurs et relations, i.e. il existe une suite exacte $\mathcal{O}_U^{(J)} \longrightarrow \mathcal{O}_U^{(I)} \longrightarrow \mathcal{F}|_U \longrightarrow 0$. On note $\text{Qcoh}(\mathcal{O}_X)$ la catégorie des \mathcal{O}_X -modules quasi-cohérents.

Le fait que ce soit une bonne notion dans le cadre des schémas sera confirmé par la propriété que sur un schéma affine, tout module quasi-cohérent est de la forme \widetilde{M} . Nous allons démontrer ceci et en même temps quelques compléments.

4.2.8 Théorème. Soient X un schéma et \mathcal{F} un \mathcal{O}_X -module. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (1) Pour tout ouvert affine $U = \text{Spec}(A)$ il existe un A -module M tel que $\mathcal{F}|_U \simeq \widetilde{M}$.
- (2) Il existe un recouvrement ouvert affine $\{U_i = \text{Spec}(A_i)\}$ et des A_i -modules M_i tels que $\mathcal{F}|_{U_i} \simeq \widetilde{M}_i$.
- (3) Le \mathcal{O}_X -module \mathcal{F} est quasi-cohérent.
- (4) Pour tout ouvert affine $U = \text{Spec}(A)$ et pour tout $f \in A$, le morphisme $\Gamma(U, \mathcal{F})_f \rightarrow \Gamma(D(f), \mathcal{F})$ est un isomorphisme.

Démonstration : D'abord un commentaire sur le point (4) : le morphisme proposé provient du morphisme de restriction $\Gamma(U, \mathcal{F}) \rightarrow \Gamma(D(f), \mathcal{F})$ via la propriété universelle, puisque clairement l'élément f induit sur le module $\Gamma(D(f), \mathcal{F})$ un morphisme bijectif. Nous passons à la démonstration.

(1) \Rightarrow (2) est clair.

(2) \Rightarrow (3). Par hypothèse, il existe un recouvrement ouvert affine $\{U_i = \text{Spec}(A_i)\}$ tel que $\mathcal{F}|_{U_i} \simeq \widetilde{M}_i$ pour tout i . Soit $A_i^{(J)} \rightarrow A_i^{(I)} \rightarrow M_i \rightarrow 0$ une présentation de M_i . Comme le foncteur tilde : $\text{Mod}(A) \rightarrow \text{Mod}(\mathcal{O}_X)$, $M \mapsto \widetilde{M}$ est exact (proposition 4.2.3) et préserve les sommes directes (exercice 4.2.5), on en déduit que la suite $\mathcal{O}_{U_i}^{(J)} \rightarrow \mathcal{O}_{U_i}^{(I)} \rightarrow \mathcal{F}|_{U_i} \rightarrow 0$ est exacte, donc \mathcal{F} est quasi-cohérent.

(3) \Rightarrow (4). Si $\mathcal{F}|_U$ est de la forme \widetilde{M} , les deux membres sont égaux à M_f et l'énoncé est clair. Nous utiliserons ce fait ci-dessous. Quitte à changer X en U , on peut supposer $U = X = \text{Spec}(A)$ affine. Par l'hypothèse (3) il existe un recouvrement ouvert par des ouverts (que l'on peut supposer) principaux $U_i = D(f_i)$ et des présentations par générateurs et relations :

$$\widetilde{A}_{f_i}^{(J)} \xrightarrow{\widetilde{u}_i} \widetilde{A}_{f_i}^{(I)} \longrightarrow \mathcal{F}|_{U_i} \longrightarrow 0.$$

Comme X est quasi-compact, on peut supposer les U_i en nombre fini. Comme le foncteur tilde est pleinement fidèle (prop. 4.2.2), chaque morphisme \widetilde{u}_i est défini par un certain morphisme de A_{f_i} -modules $u_i : A_{f_i}^{(J)} \rightarrow A_{f_i}^{(I)}$. Comme tilde préserve les conoyaux (voir 4.2.3), on en déduit que $\mathcal{F}|_{U_i} = \text{coker}(\widetilde{u}_i) = \text{coker}(u_i)^\sim$. Compte tenu de notre observation initiale ceci montre que $\mathcal{F}|_{U_i}$ vérifie la propriété (4) attendue. Le même argument montre que les restrictions de \mathcal{F} aux ouverts $U_i \cap U_j = D(f_i f_j)$ vérifient la propriété (4). Nous allons conclure en utilisant la propriété de faisceau. Celle-ci affirme que l'on a une suite exacte $\Gamma(X, \mathcal{F}) \rightarrow \prod \Gamma(U_i, \mathcal{F}) \rightarrow \prod \Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{F})$. Comme les ensembles d'indices des produits sont *finis*, le morphisme naturel $(\prod \Gamma(U_i, \mathcal{F}))_f \rightarrow \prod \Gamma(U_i, \mathcal{F})_f$ est un isomorphisme ainsi que son analogue sur les $U_i \cap U_j$. On peut donc localiser en f cette suite exacte, ce qui donne le premier rang du diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & \Gamma(X, \mathcal{F})_f & \longrightarrow & \prod_i \Gamma(U_i, \mathcal{F})_f & \longrightarrow & \prod_{i,j} \Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{F})_f \\ & & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma \\ 0 & \longrightarrow & \Gamma(D(f), \mathcal{F}) & \longrightarrow & \prod_i \Gamma(D(f) \cap U_i, \mathcal{F}) & \longrightarrow & \prod_{i,j} \Gamma(D(f) \cap U_i \cap U_j, \mathcal{F}) \end{array}$$

D'après ce que nous avons démontré auparavant, les applications β et γ sont des isomorphismes. L'application α identifie alors $\ker(\beta)$ et $\ker(\gamma)$, d'où (4).

(4) \Rightarrow (1). Posons $M = \Gamma(U, \mathcal{F})$. La restriction des sections induit un morphisme de \mathcal{O}_U -modules $\widetilde{M} \rightarrow \mathcal{F}|_U$. La propriété (4) affirme que c'est un isomorphisme sur tous les ouverts principaux $D(f) \subset U$, c'est donc un isomorphisme de faisceaux. \square

4.2.9 Corollaire. Soit $X = \text{Spec}(A)$ un schéma affine. Les foncteurs

$$\text{Mod}(A) \begin{array}{c} \xrightarrow{M \mapsto \widetilde{M}} \\ \xleftarrow{\Gamma} \end{array} \text{Qcoh}(\mathcal{O}_X)$$

sont des équivalences de catégories exactes, quasi-inverses l'une de l'autre.

On renvoie à 2.3.11 pour un rappel sur la notion de quasi-inverse.

Démonstration : Le foncteur $M \mapsto \widetilde{M}$ est pleinement fidèle par 4.2.2 et essentiellement surjectif par 4.2.8. Il est clair que $\mathcal{F} \mapsto \Gamma(X, \mathcal{F})$ est un quasi-inverse. Nous avons déjà vu que $M \mapsto \widetilde{M}$ est exact. Un résultat général de théorie des catégories dit qu'un quasi-inverse d'un foncteur exact est exact, mais démontrons tout de même directement que Γ est exact. Soit donc $0 \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'' \rightarrow 0$ une suite exacte de \mathcal{O}_X -modules quasi-cohérents. Notons $M = \Gamma(X, \mathcal{F})$, etc. On voit directement en utilisant les définitions que la suite $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M''$ est exacte. Notons $Q = M/M'$, on a donc une injection $Q \hookrightarrow M''$. Montrons que le module $C = M''/Q$ est nul. Pour tout $x = [p] \in X$, la suite $0 \rightarrow \mathcal{F}'_x \rightarrow \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{F}''_x \rightarrow 0$ est exacte. Puisque $\mathcal{F}_x = M_p$ (etc.), ce implique que $Q_p \rightarrow M''_p$ est un isomorphisme, et ceci pour tout p . Alors $C_p = (M''/Q)_p \simeq M''_p/Q_p = 0$ pour tout p . Mais un module C dont tous les localisés C_p sont nuls est nul (car si $x \in C$ est non nul, son annulateur $\text{Ann}(x)$ est un idéal distinct de A , donc inclus dans un idéal maximal p , et x reste non nul dans C_p . Voir [Mat], th. 4.6). Nous avons montré que $C = 0$, donc $Q \rightarrow M''$ est un isomorphisme et la suite $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ est exacte. \square

4.2.10 Corollaire. Soit X un schéma. Alors le noyau, le conoyau, l'image d'un morphisme de \mathcal{O}_X -modules quasi-cohérents sont quasi-cohérents.

Démonstration : Ces propriétés sont locales sur X donc on peut supposer que X est affine. Dans ce cas le résultat provient des équivalences de catégories exactes de 4.2.9. \square

4.2.11 Proposition. Soient $X = \text{Spec}(A)$, $Y = \text{Spec}(B)$ deux schémas affines et $f : Y \rightarrow X$ le morphisme défini par un morphisme d'anneaux $\varphi : A \rightarrow B$.

(1) Si N est un B -module, ${}_A N$ est N vu comme A -module via φ , et $\mathcal{G} = \widetilde{N}$, alors $f_* \mathcal{G} = \widetilde{{}_A N}$.

(2) Si M est un A -module et $\mathcal{F} = \widetilde{M}$, alors $f^* \mathcal{F} = \widetilde{M \otimes_A B}$.

Démonstration : On utilisera librement le fait suivant : si $s \in A$ et $U = D(s) \subset X$ est un ouvert principal, alors $f^{-1}(U) = D(s \cdot 1_B) = D(s)$. On notera parfois $D_X(s) \subset X$ et $D_Y(s) \subset Y$ pour distinguer ces deux objets.

(1) Il suffit de montrer l'égalité des modules de sections sur un ouvert principal $U = D_X(s)$. Or $(f_* \mathcal{G})(D(s)) = \mathcal{G}(f^{-1}(D(s))) = \mathcal{G}(D(s)) = N_s = ({}_A N)_s$ ce qui est licite puisque $s \in A$.

(2) Nous utiliserons le fait suivant, qui est un raffinement de 4.2.2 et que l'on prouve de la même manière : (\star) si $X = \text{Spec}(A)$ est un schéma affine et \mathcal{F}, \mathcal{G} sont deux faisceaux de \mathcal{O}_X -modules avec $\mathcal{F} = \widetilde{M}$ quasi-cohérent, alors l'application $\Gamma : \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \rightarrow \text{Hom}_A(M, \Gamma(X, \mathcal{G}))$, qui envoie un morphisme de faisceaux φ sur le morphisme $\varphi(X)$, est une bijection (fonctorielle en \mathcal{F} et \mathcal{G}).

Revenons aux notations de la proposition. Pour tout \mathcal{O}_Y -module \mathcal{G} , notons $N = \Gamma(Y, \mathcal{G})$ qui est un B -module, et ${}_A N$ qui est N vu comme A -module. On a :

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(f^* \mathcal{F}, \mathcal{G}) &= \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, f_* \mathcal{G}) \text{ par adjonction,} \\ &= \mathrm{Hom}_A(M, {}_A N) \text{ d'après } (\star), \\ &= \mathrm{Hom}_B(M \otimes_A B, N) \text{ d'après [Mat], App. A, formula 9 avec } P = B, \\ &= \mathrm{Hom}_A(\widetilde{M \otimes_A B}, \mathcal{G}) \text{ d'après } (\star). \end{aligned}$$

Comme ces égalités sont des isomorphismes fonctoriels en \mathcal{G} , le lemme de Yoneda fournit un isomorphisme canonique $f^* \mathcal{F} \simeq \widetilde{M \otimes_A B}$. \square

4.2.12 Remarque. On peut essayer de démontrer la formule $f^* \mathcal{F} = \widetilde{M \otimes_A B}$ directement en calculant $f^* \mathcal{F}$ à l'aide des définitions. Hartshorne (chap. II, prop. 5.2) dit que c'est immédiat, et je n'en suis pas aussi sûr... Voici comment faire ce calcul par étapes.

Étape 1. Le faisceau $f^* \mathcal{F}$ est le faisceau associé au préfaisceau défini par :

$$\mathcal{P}(V) = \varinjlim_{U \supset f(V)} \mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{O}_Y(V)$$

où apparaît la composée $\mathcal{O}_X(U) \xrightarrow{f^\#} \mathcal{O}_Y(f^{-1}U) \xrightarrow{\mathrm{res}} \mathcal{O}_Y(V)$. En effet, on dispose d'un morphisme naturel $\mathcal{P} \rightarrow f^* \mathcal{F}$ qui est un isomorphisme sur les fibres en $y \in Y$, toutes deux naturellement isomorphes à $\mathcal{F}_{f(y)} \otimes_{\mathcal{O}_{X, f(y)}} \mathcal{O}_{Y, y}$, voir 2.6.4. Dans la suite on pose $\mathcal{H} = \widetilde{M \otimes_A B}$.

Étape 2. Il suffit de construire un isomorphisme de \mathcal{B} -préfaisceaux $\mathcal{P} \simeq \mathcal{H}$ i.e. des isomorphismes $\mathcal{P}(V) \simeq \mathcal{H}(V)$ fonctoriels en l'ouvert principal $V = D(s)$, $s \in B$. En effet, si on dispose d'un tel isomorphisme, alors \mathcal{P} est un \mathcal{B} -faisceau donc le faisceau qui lui est associé est égal à \mathcal{H} .

Étape 3. Dans le calcul de la limite inductive qui définit $\mathcal{P}(V)$ avec V principal, nous pouvons nous limiter aux ouverts U qui sont quasi-compacts, i.e. réunions finies $U = D(s_1) \cup \dots \cup D(s_r)$ avec $s_1, \dots, s_r \in A$. En effet, il est équivalent de dire que $U \supset f(V)$ ou que $f^{-1}(U) \supset V$. En recouvrant U par des ouverts principaux $D(s_i)$ et en utilisant la quasi-compacité de V , on voit que U contient un ouvert quasi-compact $D(s_1) \cup \dots \cup D(s_r)$ qui recouvre $f(V)$. Dans la suite, pour tout uplet $\underline{s} = (s_1, \dots, s_r)$, nous noterons $D(\underline{s}) := D(s_1) \cup \dots \cup D(s_r)$ et $M_{\underline{s}} := \mathcal{F}(D(\underline{s})) = \ker(\prod_i M_{s_i} \rightrightarrows \prod_{i,j} M_{s_i s_j})$. On prendra garde au fait que $D(\underline{s})$ n'est pas nécessairement principal.

Étape 4. Pour tout ouvert quasi-compact $U = D(\underline{s}) \supset f(V)$ où $V = D(t)$, on a :

$$\mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{O}_Y(V) = (M \otimes_A B)_t.$$

En effet, $U \supset f(V) \iff f^{-1}(U) \supset V \iff D(t) \subset f^{-1}(D(\underline{s})) = D(\underline{s} \cdot 1_B) \iff V(s_1, \dots, s_r) \subset V(t)$ où la dernière équivalence est obtenue par passage au complémentaire. Ceci est équivalent à dire que $t \in \sqrt{J}$ où $J := s_1 B + \dots + s_r B$, c'est-à-dire qu'il existe un entier $N \geq 1$ tel que $t^N \in J$. On voit qu'en passant au localisé B_t , les s_i engendrent l'idéal unité de B_t . En considérant une partition de l'unité associée, on voit comme dans la preuve de 2.5.1 que le morphisme $M \otimes_A B_t \rightarrow M_{\underline{s}} \otimes_{A_{\underline{s}}} B_t$

induit par le morphisme $M \rightarrow M_{\underline{s}}$ est un isomorphisme. Comme $M \otimes_A B_t = (M \otimes_A B)_t$, on obtient le résultat annoncé.

Étape 5. On peut conclure le calcul :

$$\mathcal{P}(V) = \varinjlim_{U=D(\underline{s}) \supset f(V)} \mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{O}_Y(V) = \varinjlim_{U=D(\underline{s}) \supset f(V)} (M \otimes_A B)_t = (M \otimes_A B)_t = \mathcal{H}(V).$$

Une dernière méthode est possible pour établir la formule $f^* \mathcal{F} = \widetilde{M \otimes_A B}$. Nous la donnons dans l'exercice 4.2.15 après deux exercices préliminaires.

4.2.13 Exercice. Soient $X = \text{Spec}(A)$ un schéma affine, M un A -module, \mathcal{F} un faisceau de \mathcal{O}_X -modules.

- (1) Démontrer que le foncteur de sections globales $\Gamma : \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\widetilde{M}, \mathcal{F}) \rightarrow \text{Hom}_A(M, \Gamma(X, \mathcal{F}))$ est une bijection fonctorielle en M et \mathcal{F} . (*Indication : adapter la preuve de la prop. 4.2.2 du cours.*)
- (2) Dédisez-en que le foncteur $i : \text{Qcoh}(\mathcal{O}_X) \rightarrow \text{Mod}(\mathcal{O}_X)$ d'inclusion de la catégorie des \mathcal{O}_X -modules quasi-cohérents comme sous-catégorie pleine de la catégorie de tous les \mathcal{O}_X -modules possède un adjoint à droite, donné par le foncteur $\mathcal{F} \mapsto \Gamma(\widetilde{X}, \mathcal{F})$.

4.2.14 Exercice. Soient X un espace annelé et \mathcal{F}, \mathcal{G} deux faisceaux de \mathcal{O}_X -modules. Soit $x \in X$ un point. Montrez qu'on a un isomorphisme de $\mathcal{O}_{X,x}$ -modules $\mathcal{F}_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \mathcal{G}_x \xrightarrow{\sim} (\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G})_x$.

(*Indications.* (i) Pour construire ce morphisme, prenez les germes dans l'application bilinéaire universelle $\mathcal{F} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$. (ii) Le produit tensoriel commute aux limites inductives, voir [Mat], Appendice A, Th. A1.)

4.2.15 Exercice. Soient $f : Y = \text{Spec}(B) \rightarrow X = \text{Spec}(A)$ un morphisme de schémas affines, M un A -module, et $\mathcal{F} = \widetilde{M}$.

- (1) En partant du morphisme d'adjonction $\mathcal{F} \rightarrow f_* f^* \mathcal{F}$ et en prenant les sections globales, construisez un morphisme $M \otimes_A B \rightarrow \Gamma(Y, f^* \mathcal{F})$.
- (2) En utilisant l'exercice 4.2.13, déduisez-en un morphisme $\varphi : \widetilde{M \otimes_A B} \rightarrow f^* \mathcal{F}$.
- (3) En utilisant l'exercice 4.2.14, montrez que φ est un isomorphisme sur les fibres en tous les points $x \in X$, donc un isomorphisme de faisceaux.

4.3 Idéaux quasi-cohérents, sous-schémas

Nous passons maintenant à la définition des sous-schémas fermés. Cette définition doit satisfaire la contrainte naturelle suivante : si $X = \text{Spec}(A)$, les sous-schémas fermés sont les schémas de la forme $V(I) = \text{Spec}(A/I)$, associés aux idéaux $I \subset A$. On veut que des idéaux différents donnent lieu à des sous-schémas différents, pour pouvoir (par exemple) distinguer dans le plan affine $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2 = \text{Spec}(\mathbb{C}[x, y])$: d'une part l'origine $\{0\}$ définie par l'idéal (x, y) et d'autre part l'intersection schématique de la parabole $\{y = x^2\}$ avec la droite $\{y = 0\}$, définie par l'idéal (y, x^2) . (On renvoie à 1.3 pour cette discussion.) Voici la notion « globale ».

4.3.1 Définition. Soit X un schéma. On appelle *idéal quasi-cohérent sur X* un sous- \mathcal{O}_X -module quasi-cohérent de \mathcal{O}_X .

4.3.2 Lemme. Soit X un schéma et $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_X$ un idéal quasi-cohérent de \mathcal{O}_X . Notons :

$$Y = \{x \in X; \mathcal{I}_x \neq \mathcal{O}_{X,x}\} \text{ muni de la topologie induite de celle de } X, \text{ et} \\ \mathcal{O}_Y = i^{-1}(\mathcal{O}_X/\mathcal{I}) \text{ où } i : Y \rightarrow X \text{ est l'inclusion.}$$

Alors Y est fermé dans X et (Y, \mathcal{O}_Y) est un schéma que l'on note $V(\mathcal{I})$. Si $X = \text{Spec}(A)$ et $\mathcal{I} = \tilde{I}$, alors $(Y, \mathcal{O}_Y) = \text{Spec}(A/I)$.

Démonstration : Les assertions à démontrer sont locales sur X , donc quitte à se restreindre à un ouvert affine on peut supposer que X est affine. En d'autres termes, seule la dernière phrase est à démontrer. On a $Y = \{x = [p]; I_p \neq A_p\} = \{x = [p]; I_p \subset pA_p\} = \{x = [p]; I \subset p\}$ qui est égal au fermé $V(I)$ comme sous-espace de X . Sur ce fermé, notons $\mathcal{Q}_Y = \widetilde{A/I}$ le faisceau de \mathcal{O}_Y -modules obtenu par l'opération tilde sur $Y = \text{Spec}(A/I)$. Notons $\mathcal{Q}_X = \mathcal{O}_X/\mathcal{I}$ qui est un faisceau de \mathcal{O}_X -modules. D'après 4.2.9 et 4.2.10, le faisceau \mathcal{Q}_X est quasi-cohérent, égal à au faisceau $\widetilde{A/I}$ obtenu par l'opération tilde sur $X = \text{Spec}(A)$. (Ici A/I est vu comme A -module.) Pour terminer la preuve, il suffit de montrer que $i^{-1}\mathcal{Q}_X = \mathcal{Q}_Y$. La stratégie est semblable à celle de la remarque 4.2.12.

Étape 1. Le faisceau $i^{-1}\mathcal{Q}_X$ est associé au préfaisceau \mathcal{P} défini par $\mathcal{P}(V) = \varinjlim_{U \supset V} \mathcal{Q}_X(U)$ pour V ouvert de Y , où la limite est sur les ouverts U de X contenant V .

Étape 2. Il suffit de démontrer que $\mathcal{P}(Y) = \mathcal{Q}_Y(Y)$. En effet, on sait qu'il suffit de montrer que $\mathcal{P}(V) = \mathcal{Q}_Y(V)$ pour tous les ouverts principaux $V \subset Y$, car dans ce cas \mathcal{P} est un \mathcal{B} -faisceau de faisceau associé \mathcal{Q}_Y , comme souhaité. Or un ouvert principal de Y est de la forme $V = D_Y(g) = \text{Spec}((A/I)_g)$ où l'on identifie un élément $g \in A$ et son image dans A/I . Comme $(A/I)_g = A_g/I_g$, on voit que quitte à remplacer X par $X' = D_X(g)$ et Y par $Y' = D_Y(g) = Y \cap D_X(g)$, on se ramène à démontrer que $\mathcal{P}(V) = \mathcal{Q}_Y(V)$ lorsque $V = Y$.

Étape 3. On peut se limiter dans la limite inductive aux ouverts quasi-compacts $U = D(\underline{s}) := D(s_1) \cup \dots \cup D(s_r)$ avec $\underline{s} = (s_1, \dots, s_r)$ un uplet d'éléments de A . En effet, on peut toujours recouvrir un ouvert $U \supset Y$ par des ouverts principaux $D(s_i)$ et en utilisant la quasi-compacité de Y , on voit que U contient un ouvert quasi-compact $D(s_1) \cup \dots \cup D(s_r)$ qui recouvre Y .

Étape 4. Fin du calcul. On observe que $D(\underline{s}) \supset Y$ si et seulement si $D(\underline{s} \cdot 1_{A/I}) = D(\underline{s}) \cap Y = Y$ ce qui signifie que l'idéal engendré par \underline{s} dans A/I est l'idéal unité. En utilisant une partition de l'unité pour les s_i dans A/I , on montre comme dans la preuve de 2.5.1 que le morphisme $A/I \rightarrow \mathcal{Q}_X(D(\underline{s})) = \ker(\prod_i (A/I)_{s_i} \rightrightarrows \prod_{i,j} (A/I)_{s_i s_j})$ est un isomorphisme. Il s'ensuit que :

$$\mathcal{P}(Y) = \varinjlim_{D(\underline{s}) \supset Y} \mathcal{Q}_X(D(\underline{s})) = \varinjlim_{D(\underline{s}) \supset Y} A/I = A/I = \mathcal{Q}_Y(Y).$$

On a terminé. □

4.3.3 Définition. On appelle *sous-schéma fermé* de X le schéma $V(\mathcal{I})$ défini par un idéal quasi-cohérent \mathcal{I} dans le lemme précédent. Une *immersion fermée* est un morphisme de schémas $f : X' \rightarrow X$ qui se factorise en

$$X' \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{i} X$$

où g est un isomorphisme et i est l'inclusion d'un sous-schéma fermé dans X .

4.3.4 Définition. Un *sous-schéma* de X est un sous-schéma fermé d'un sous-schéma ouvert de X . La terminologie *sous-schéma localement fermé* est parfois utilisée aussi. Une *immersion* est un morphisme de schémas $f : X' \rightarrow X$ qui se factorise en

$$X' \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{i} X$$

où g est un isomorphisme et i est l'inclusion d'un sous-schéma Z dans X .

4.3.5 Exercice. Montrez qu'un sous-schéma ouvert d'un sous-schéma fermé de X est un sous-schéma de X . Déduisez-en qu'un sous-schéma d'un sous-schéma de X est un sous-schéma de X , et que la composée de deux immersions est une immersion. *Commentaire* : très souvent, un sous-schéma fermé d'un sous-schéma ouvert est un sous-schéma ouvert d'un sous-schéma fermé, mais il existe des exemples (un peu pathologiques) où ce n'est pas le cas (et la lectrice curieuse peut trouver un exemple ici). C'est pour cela que la définition de sous-schéma est ainsi faite.

4.3.6 Exercice. Montrez qu'une immersion est un monomorphisme de schémas. (Traitez séparément les immersions fermées et les immersions ouvertes.)

4.3.7 Sous-schémas de support donné. Nous avons vu qu'un sous-schéma ouvert $U \subset X$ est déterminé par son support. La situation est très différente pour les sous-schémas fermés $Y \subset X$. Plus précisément, dans le cas affine on a les conditions équivalentes :

- (1) $Y = V(I) = V(J)$ ensemblistement,
- (2) pour $p \subset A$ premier, $p \supset I \iff p \supset J$,
- (3) $\sqrt{I} = \sqrt{J}$.

En revanche, l'égalité des *sous-schémas* $Y = V(I)$ et $Z = V(J)$ implique :

$$I = \ker(\Gamma(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y)) = \ker(\Gamma(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow \Gamma(Z, \mathcal{O}_Z)) = J.$$

(Notez qu'un morphisme de schémas $f : V \rightarrow W$ induit un morphisme d'anneaux $\Gamma(W, \mathcal{O}_W) \rightarrow \Gamma(V, \mathcal{O}_V)$ obtenu en prenant les sections globales dans le comorphisme $f^\sharp : \mathcal{O}_W \rightarrow f_*\mathcal{O}_V$.) En particulier, les idéaux I^n pour $n \geq 1$ définissent des sous-schémas fermés de même support ; il en va de même pour deux idéaux I, J tels que $I^n \subset J \subset I^m$ pour $m, n \geq 1$. Ceci est lié au fait que si on ne se souvient d'une fonction régulière $f \in A$ que ses valeurs $\{f(x) \in \kappa(x), x \in X\}$, alors l'annulation des $f(x)^n$ est équivalente à celle des $f(x)^m$. La fonction elle-même, information plus subtile que la collection de ses valeurs, diffère.

4.3.8 Exercice. Soit $X = \mathbb{A}_k^1 = \text{Spec}(k[t])$ la droite affine sur un corps et $x = \{t = 0\}$ l'origine. Trouvez tous les sous-schémas fermés de support $\{x\}$. Pour chaque tel sous-schéma $i : Y \hookrightarrow X$, et chaque fonction $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$, décrivez ce que signifie l'annulation de f sur Y .

4.3.9 Exercice. (1) Dans un espace topologique X , soit Z une partie localement fermée i.e. une partie qui est intersection d'un ouvert et d'un fermé. On considère l'ensemble \mathcal{E} des paires composées d'un fermé F et d'un ouvert U tels que $Z = F \cap U$.

- (i) Montrez que l'adhérence $F_{\min} = \overline{Z}$ est le plus petit fermé F qui appartient à une paire $(F, U) \in \mathcal{E}$.
- (ii) Montrez que la frontière $\partial Z = \overline{Z} \setminus Z$ est fermée dans X et que $U_{\max} = X \setminus \partial Z$ est le plus grand ouvert U qui appartient à une paire $(F, U) \in \mathcal{E}$.

(iii) Montrez que pour tout $(F, U) \in \mathcal{E}$ on a $Z = F \cap U = F_{\min} \cap U = F \cap U_{\max}$. En particulier (F_{\min}, U_{\max}) appartient à \mathcal{E} .

(2) Soit $Z \hookrightarrow X$ un sous-schéma et $f : Z \rightarrow X$ le morphisme d'immersion. Soit $\partial Z = \overline{Z} \setminus Z$ et $U = X \setminus \partial Z$. Montrez que Z est un sous-schéma fermé de U . Montrez que les conditions suivantes sont équivalentes : (i) f est une immersion fermée, (ii) $U = X$, (iii) $|Z|$ est fermé dans $|X|$.

4.4 Algèbres quasi-cohérentes

4.4.1 Définition. Soit S un schéma. On appelle *faisceau d'algèbres sur S* ou \mathcal{O}_S -algèbre un faisceau d'anneaux \mathcal{A} sur S muni d'un morphisme d'anneaux $\mathcal{O}_S \rightarrow \mathcal{A}$. On appelle \mathcal{O}_S -algèbre *quasi-cohérente* un faisceau d'algèbres qui est quasi-cohérent comme faisceau de modules.

Par exemple, si $f : X \rightarrow S$ est un S -schéma, alors $\mathcal{A}(X) := f_*\mathcal{O}_X$ est naturellement une \mathcal{O}_S -algèbre à l'aide du morphisme $f^\sharp : \mathcal{O}_S \rightarrow f_*\mathcal{O}_X$. De plus, si $g : Y \rightarrow S$ est un second S -schéma et $h : X \rightarrow Y$ un S -morphisme, le morphisme $\mathcal{O}_Y \rightarrow h_*\mathcal{O}_X$ fournit par application de g_* un morphisme $\mathcal{A}(Y) \rightarrow \mathcal{A}(X)$. On obtient ainsi un foncteur contravariant $\mathcal{A} : \text{Sch}/S \rightarrow \{\mathcal{O}_S\text{-algèbres}\}$. On peut montrer que sous des conditions assez faibles sur f (par ex. quasi-compacité plus séparation), l'algèbre $\mathcal{A}(X)$ est quasi-cohérente. Ce résultat implique par exemple que si X est un sous-schéma fermé d'un espace affine \mathbb{A}_S^n ou d'un espace projectif \mathbb{P}_S^n , alors $\mathcal{A}(X)$ est quasi-cohérente.

4.4.2 Exercice. Montrez que sur un schéma affine $X = \text{Spec}(A)$, le produit tensoriel de deux modules quasi-cohérents $\mathcal{F} = \widetilde{M}$ et $\mathcal{G} = \widetilde{N}$ est le module $\widetilde{M \otimes_A N}$. Déduez-en que $B \mapsto \widetilde{B}$ définit une équivalence entre la catégorie des A -algèbres et la catégorie des \mathcal{O}_X -algèbres quasi-cohérentes.

Introduction à la Géométrie Algébrique. Le langage des schémas

Cours du 25 octobre 2016

4.4.3 Proposition. *Soit \mathcal{A} une algèbre quasi-cohérente sur S . Alors il existe un S -schéma $Y = \text{Spec}(\mathcal{A})$ tel que $\mathcal{A}(Y) = \mathcal{A}$ avec la propriété universelle suivante : le foncteur \mathcal{A} induit une bijection*

$$\text{Hom}_S(X, \text{Spec}(\mathcal{A})) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathcal{O}_S\text{-Alg}}(\mathcal{A}, \mathcal{A}(X))$$

fonctorielle en X et en \mathcal{A} .

Démonstration : Si $S = \text{Spec}(R)$ est affine, on a $\mathcal{A} = \tilde{A}$ pour une certaine R -algèbre A . Dans ce cas on pose $Y = \text{Spec}(A)$ et le résultat se déduit facilement de 3.3.2. Dans le cas général, on peut recouvrir S par des ouverts affines $U_i = \text{Spec}(R_i)$, on a $\mathcal{A}|_{U_i} = \tilde{A}_i$ pour une certaine R_i -algèbre A_i et on pose $Y_i = \text{Spec}(A_i)$. L'ouvert $Y_{i,j}$ préimage de $U_i \cap U_j$ dans Y_i vérifie la propriété universelle du schéma $\text{Spec}(\mathcal{A}|_{U_i \cap U_j})$. Par symétrie il en va de même de $Y_{j,i}$ et on a donc un isomorphisme canonique $\varphi_{i,j} : Y_{i,j} \xrightarrow{\sim} Y_{j,i}$. On note Y le S -schéma obtenu par recollement des Y_i le long des $Y_{i,j}$. La vérification de la propriété universelle est immédiate car la bijection annoncée peut se tester localement : plus précisément, si l'on note α, β les deux applications en sens inverses entre les deux ensembles Hom , on peut tester les égalités $\alpha(\beta(f)) = f$ et $\beta(\alpha(g)) = g$ localement sur chaque U_i . \square

4.4.4 Définition. Le S -schéma $\text{Spec}(\mathcal{A})$, aussi noté parfois $\text{Spec}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{A})$, est appelé *spectre relatif* de l'algèbre quasi-cohérente \mathcal{A} .

4.4.5 Remarque. La formation de $\text{Spec}(\mathcal{A})$ commute au changement de base sur S , au sens où pour tout morphisme de schémas $u : S' \rightarrow S$ il existe un isomorphisme canonique de S' -schémas

$$\text{Spec}(\mathcal{A}) \times_S S' \xrightarrow{\sim} \text{Spec}(u^* \mathcal{A}).$$

En effet, pour montrer cela il suffit de montrer que les S' -schémas $\text{Spec}(\mathcal{A}) \times_S S'$ et $\text{Spec}(u^* \mathcal{A})$ sont solution du même problème universel. (C'est une manière de voir le lemme de Yoneda.) Or pour tout S' -schéma $f' : X' \rightarrow S'$ on a des bijections canoniques :

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{S'}(X', \text{Spec}(u^* \mathcal{A})) &= \text{Hom}_{\mathcal{O}_{S'}\text{-Alg}}(u^* \mathcal{A}, \mathcal{A}'(X')) \\ &= \text{Hom}_{\mathcal{O}_S\text{-Alg}}(\mathcal{A}, u_* \mathcal{A}'(X')) \text{ par adjonction,} \\ &= \text{Hom}_{\mathcal{O}_S\text{-Alg}}(\mathcal{A}, \mathcal{A}(X')) \text{ en posant } f = u \circ f' : X' \rightarrow S, \\ &= \text{Hom}_S(X', \text{Spec}(\mathcal{A})) \\ &= \text{Hom}_{S'}(X', \text{Spec}(\mathcal{A}) \times_S S'). \end{aligned}$$

Ceci conclut l'argument.

4.4.6 Exercice (exemple 1). Soit X un schéma et \mathcal{I} un idéal quasi-cohérent. On veut montrer que le sous-schéma fermé $V(\mathcal{I})$ est isomorphe à $\text{Spec}(\mathcal{O}_X/\mathcal{I})$.

(1) En utilisant la propriété universelle de $\text{Spec}(\mathcal{O}_X/\mathcal{I})$ (prop. 4.4.3), construisez un morphisme de X -schémas $f : V(\mathcal{I}) \rightarrow \text{Spec}(\mathcal{O}_X/\mathcal{I})$.

(2) On note $Y = V(\mathcal{I})$ et $i : Y \hookrightarrow X$ l'immersion fermée. Démontrez que le morphisme $i^\sharp : \mathcal{O}_X \rightarrow i_*\mathcal{O}_Y$ induit un isomorphisme $\mathcal{O}_X/\mathcal{I} \xrightarrow{\sim} i_*\mathcal{O}_Y$. Déduisez-en que f est un isomorphisme.

4.4.7 Exercice (exemple 2). Soit S un schéma. Définissez la \mathcal{O}_S -algèbre $\mathcal{O}_S[t_1, \dots, t_n]$ des polynômes en t_1, \dots, t_n et montrez que son spectre est l'espace affine \mathbb{A}_S^n . Pour tout r -uplet de sections globales $f_1, \dots, f_r \in \Gamma(S, \mathcal{O}_S)[t_1, \dots, t_n]$, expliquez comment définir une algèbre quasi-cohérente $\mathcal{A} = \mathcal{O}_S[t_1, \dots, t_n]/(f_1, \dots, f_r)$. Décrivez la propriété universelle du S -schéma $\mu_{n,S} := \text{Spec}(\mathcal{O}_S[t]/(t^n - 1))$.

4.4.8 Fibrés vectoriels (exemple 3). On renvoie à [Ei], Annexe 2, pour des rappels sur l'algèbre symétrique. Soit R un anneau et M un R -module. On note $M^{\otimes n}$ la n -ième puissance tensorielle de M . On appelle *algèbre tensorielle de M* la R -algèbre graduée $T(M) = \bigoplus_{n \geq 0} T^n(M)$ où $T^n(M) = M^{\otimes n}$, le produit dans $T(M)$ étant défini par $(x_1 \otimes \dots \otimes x_r)(y_1 \otimes \dots \otimes y_s) = x_1 \otimes \dots \otimes x_r \otimes y_1 \otimes \dots \otimes y_s$. On appelle *algèbre symétrique de M* l'algèbre graduée $\text{Sym}(M) = \bigoplus_{n \geq 0} \text{Sym}^n(M)$ quotient de $T(M)$ par l'idéal bilatère engendré par les relations $x \otimes y - y \otimes x$ avec $x, y \in M$. C'est la plus grande algèbre quotient de $T(M)$ qui soit commutative. Le R -module $\text{Sym}^n(M)$ est l'image de $T^n(M)$; on a :

$$\begin{aligned} \text{Sym}^0(M) &= T^0(M) = R, \\ \text{Sym}^1(M) &= T^1(M) = M, \\ \text{Sym}^2(M) &= T^2(M)/(x \otimes y - y \otimes x; x, y \in M). \end{aligned}$$

L'algèbre $\text{Sym}(M)$ est graduée avec $\text{Sym}^n(M)$ égal à l'image de $T^n(M)$. On dispose d'un morphisme de R -modules injectif $i : M = \text{Sym}^1(M) \hookrightarrow \text{Sym}(M)$. De plus $S(M)$ vérifie la propriété universelle suivante : l'application qui à un morphisme de R -algèbres $\varphi : \text{Sym}(M) \rightarrow A$ associe sa restriction $\varphi \circ i : M \rightarrow A$ est une bijection $\text{Hom}_{R\text{-Alg}}(\text{Sym}(M), R) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{R\text{-Mod}}(M, A)$ fonctorielle en M et A . Une autre manière de le dire est que le foncteur S est adjoint à gauche du foncteur d'oubli, qui à A associe le module sous-jacent, de la catégorie des R -algèbres commutatives dans la catégorie des R -modules.

4.4.9 Exemple. Si M est libre de rang n avec pour base t_1, \dots, t_n , alors $T(M) = R\{t_1, \dots, t_n\}$ est l'algèbre des polynômes non commutatifs en les t_i et $\text{Sym}(M) = R[t_1, \dots, t_n]$ est l'algèbre des polynômes commutatifs en les t_i . Le morphisme $M \hookrightarrow \text{Sym}(M)$ identifie M aux polynômes homogènes de degré 1. On retrouve la propriété universelle des anneaux de polynômes.

Si S est un espace annelé et \mathcal{F} est un faisceau de \mathcal{O}_S -modules, on peut définir le faisceau *algèbre symétrique* $\text{Sym}(\mathcal{F})$ en suivant la construction précédente et en faisceautisant aux endroits où c'est nécessaire. Pour tout faisceau de \mathcal{O}_S -algèbres \mathcal{A} , on a une bijection :

$$\text{Hom}_{\mathcal{O}_S\text{-Alg}}(\text{Sym}(\mathcal{F}), \mathcal{A}) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathcal{O}_S\text{-Mod}}(\mathcal{F}, \mathcal{A}).$$

On peut vérifier que si \mathcal{F} est un \mathcal{O}_S -module quasi-cohérent, alors son algèbre symétrique $\text{Sym}(\mathcal{F})$ est une \mathcal{O}_S -algèbre quasi-cohérente. Nous allons voir que le S -schéma $\mathbb{V}(\mathcal{F}) := \text{Spec}(\text{Sym}(\mathcal{F}))$ vérifie une propriété universelle très simple. Cette propriété mettra en jeu le \mathcal{O}_S -module *dual* de \mathcal{F} , qui est défini par $\mathcal{F}^\vee := \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_S\text{-Mod}}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_S)$.

4.4.10 Proposition. Soient S un schéma et \mathcal{F} un \mathcal{O}_S -module quasi-cohérent. Pour tout S -schéma $f : T \rightarrow S$, on pose $\mathcal{F}_T = f^*\mathcal{F}$. On a une bijection, fonctorielle en T/S et \mathcal{F} :

$$\mathrm{Hom}_S(T, \mathbb{V}(\mathcal{F})) \xrightarrow{\sim} \Gamma(T, (\mathcal{F}_T)^\vee).$$

Démonstration : On calcule :

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_S(T, \mathbb{V}(\mathcal{F})) &= \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S\text{-Alg}}(\mathrm{Sym}(\mathcal{F}), f_*\mathcal{O}_T) \text{ par la propriété universelle du spectre, voir 4.4.3,} \\ &= \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S\text{-Mod}}(\mathcal{F}, f_*\mathcal{O}_T) \text{ par la propriété universelle de l'algèbre symétrique,} \\ &= \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_T\text{-Mod}}(f^*\mathcal{F}, \mathcal{O}_T) \text{ par adjonction,} \\ &= \Gamma(T, (\mathcal{F}_T)^\vee) \text{ par définition du dual.} \end{aligned}$$

□

4.4.11 Définition. Soit X un schéma et r un entier. On dit qu'un \mathcal{O}_X -module \mathcal{F} est *localement libre de rang r* s'il existe un recouvrement de X par des ouverts U_i et des isomorphismes $\mathcal{F}|_{U_i} \simeq \mathcal{O}_{U_i}^{\oplus r}$. Le \mathcal{O}_X -module localement libre $\mathcal{O}_X^{\oplus r}$ est appelé *trivial* et on dit qu'un ouvert U_i comme ci-dessus *trivialise* \mathcal{F} . Un X -schéma de la forme $V(\mathcal{F})$ avec \mathcal{F} localement libre de rang r est appelé *fibré vectoriel de rang r* . Lorsque $r = 1$ on parle aussi de *fibré en droites*.

L'exemple 4.4.9 montre que pour un fibré vectoriel de rang r sur X , il existe un recouvrement par des ouverts U tels que $V \times_X U \simeq \mathbb{A}_U^r$. Les ouvrages [Har] (chap. 2, exercice 5.18) et [GW] (chapitre 11) expliquent comment cette définition des fibrés vectoriels est équivalente à la définition plus géométrique utilisée en géométrie et topologie différentielles.

4.4.12 Exercice. Soit \mathcal{F} un \mathcal{O}_X -module localement libre de rang r sur un schéma X . Montrez que le dual $\mathcal{F}^\vee = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_S\text{-Mod}}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_S)$ est encore localement libre de rang r .

4.4.13 Exemple. Soit $f : X \rightarrow S$ un S -schéma. Pour tout ouvert $U \subset X$, notons $\mathcal{D}(U)$ l'ensemble des \mathcal{O}_S -dérivations de $\mathcal{O}_X(U)$ i.e. l'ensemble des morphismes de groupes abéliens $D : \mathcal{O}_X(U) \rightarrow \mathcal{O}_X(U)$ telles que $D(fg) = fD(g) + gD(f)$ pour tous $f, g \in \mathcal{O}_X(U)$ et $D(af) = aD(f)$ pour toute fonction $a \in \mathcal{O}_S(V)$ définie sur un ouvert V contenant $f(U)$. Alors \mathcal{D} est un faisceau appelé le *faisceau des \mathcal{O}_S -dérivations de X/S* . Si X/S est de type fini alors \mathcal{D} est de type fini comme \mathcal{O}_X -module, et si de plus X/S est lisse de dimension relative r alors \mathcal{D} est localement libre de rang r . Le fibré vectoriel $\mathbb{T}_{X/S} = \mathbb{V}(\mathcal{D}^\vee) = \mathrm{Spec}(\mathrm{Sym}(\mathcal{D}^\vee))$ est appelé *fibré tangent de X/S* .

4.5 Faisceaux inversibles

Nous avons vu en 4.1 les notions générales de produit tensoriel et de faisceau $\mathcal{H}om$ pour les \mathcal{O}_X -modules. Nous ajoutons la définition du \mathcal{O}_X -module *dual* : il s'agit du faisceau $\mathcal{F}^\vee := \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X)$.

4.5.1 Lemme. Soient X un espace annelé et \mathcal{L} un \mathcal{O}_X -module localement libre de rang 1. Alors, le morphisme canonique :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^\vee \otimes \mathcal{L} &\longrightarrow \mathcal{O}_X \\ \varphi \otimes s &\longmapsto \varphi(s) \end{aligned}$$

est un isomorphisme.

Démonstration : Il suffit de montrer que ce morphisme est un isomorphisme sur un recouvrement ouvert de X . Soit U un ouvert qui trivialisent \mathcal{L} , donc il existe un isomorphisme $u : \mathcal{O}_U \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}|_U$. Notons $(u^\vee)^{-1} : \mathcal{O}_U \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}|_U^\vee$ l'isomorphisme obtenu en dualisant. Utilisant ces isomorphismes, le morphisme $\mathcal{L}^\vee \otimes \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{O}_X$ se réduit à l'isomorphisme $\mathcal{O}_U \otimes \mathcal{O}_U \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_U, s \otimes t \mapsto st$. \square

4.5.2 Définition. Un faisceau de \mathcal{O}_X -modules \mathcal{L} est appelé *faisceau inversible* s'il est localement libre de rang 1. Son *inverse* ou *dual* est le faisceau $\mathcal{L}^\vee = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}, \mathcal{O}_X)$. Le faisceau inversible trivial est le faisceau $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X$. Le *groupe de Picard* de X est l'ensemble des classes d'isomorphisme de faisceaux inversibles sur X , pointé par la classe d'isomorphisme du faisceau inversible trivial et muni de l'opération de produit tensoriel. Il est noté $\text{Pic}(X)$.

4.5.3 Remarque. Si $f : X \rightarrow Y$ est un morphisme d'espaces annelés, l'image inverse induit un morphisme de groupes $f^* : \text{Pic}(Y) \rightarrow \text{Pic}(X)$. En revanche, en général l'image directe $f_*\mathcal{L}$ d'un faisceau inversible n'est pas un faisceau inversible. Par exemple, pour un schéma X sur un corps k , l'image directe de \mathcal{O}_X par $X \rightarrow \text{Spec}(k)$ est l'espace vectoriel $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ qui est de dimension > 1 en général.

4.5.4 Exemple (retour sur l'espace projectif). Soit $P = \mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^n$ l'espace projectif sur \mathbb{Z} . Soient $A_i = \mathbb{Z}[t_0/t_i, \dots, t_n/t_i]$ et $A_{i,j} = A_i[t_i/t_j] = A_j[t_j/t_i] = A_{j,i}$. Fixons un entier d . Sur l'ouvert $P_i = \text{Spec}(A_i)$, on définit un faisceau inversible $\mathcal{F}_i = \widetilde{M}_i$ en posant $M_i = (t_i)^d A_i$, sous- A_i -module de $K = \mathbb{Z}[t_0, \dots, t_n, (t_0 \dots t_n)^{-1}]$. Si l'on affecte chaque t_i du poids 1, on voit que M_i est composé des éléments homogènes de degré d dans $\mathbb{Z}[t_0, \dots, t_n, (t_i)^{-1}]$. Sur les intersections $P_{i,j}$, on dispose d'isomorphismes $\varphi_{i,j} : \mathcal{F}_i|_{P_{i,j}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_j|_{P_{i,j}}$ donnés par la multiplication par $(t_j/t_i)^d$:

$$\begin{aligned} M_i &\longrightarrow M_j \\ x = (t_i)^d a &\longmapsto \left(\frac{t_j}{t_i}\right)^d x = (t_j)^d a. \end{aligned}$$

Les conditions de recollement sont satisfaites par les $\varphi_{i,j}$ (tout se vérifie dans K où c'est clair). On note $\mathcal{O}(d)$ le faisceau inversible obtenu en recollant les \mathcal{F}_i le long des $\varphi_{i,j}$. En particulier $\mathcal{O}(0) = \mathcal{O}_P$. Le faisceau $\mathcal{O}(1)$ est appelé *faisceau tordu de Serre*. On a les faits suivants :

- (1) $\mathcal{O}(n) \otimes \mathcal{O}(m) \simeq \mathcal{O}(n+m)$ i.e. l'application $\mathbb{Z} \rightarrow \text{Pic}(P), n \mapsto [\mathcal{O}(n)]$ est un morphisme de groupes.
- (2) $\Gamma(P, \mathcal{O}(d)) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}[t_0, \dots, t_n]_d, & \text{le module des polynômes homogènes de degré } d \text{ si } d \geq 0, \\ 0 & \text{si } d < 0. \end{cases}$

(À suivre.)

Introduction à la Géométrie Algébrique. Le langage des schémas

Cours du 15 novembre 2016

Il est important de noter que dans la construction de $\mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^n$, seuls les quotients t_i/t_j interviennent. Ceci a pour conséquence que l'objet important est le uplet (t_0, \dots, t_n) à multiplication scalaire simultanée par un élément de $\Gamma(\mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^n})^\times$ près. On note $(t_0 : \dots : t_n)$ cette classe d'équivalence et on l'appelle *système de coordonnées homogènes canonique* de $\mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^n$. De même que l'espace affine $\mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^n$ vient par construction avec des coordonnées canoniques (t_1, \dots, t_n) , l'espace projectif $\mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^n$ vient avec ces coordonnées homogènes. Dans les deux cas, ces coordonnées sont des sections d'un certain fibré en droites : le fibré trivial $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n}$ dans le cas de l'espace affine, et le fibré $\mathcal{O}(1)$ dans le cas de l'espace projectif. Si on préfère, on peut voir ces sections de fibrés comme des morphismes de schémas en utilisant la proposition 4.4.10 qui implique que les sections du \mathcal{O}_S -module \mathcal{F} correspondent aux sections du morphisme $\mathbb{V}(\mathcal{F}^\vee) \rightarrow S$. Ainsi les coordonnées de \mathbb{A}^n sont-elles des morphismes $\mathbb{A}^n \rightarrow \text{Spec}(\text{Sym}(\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n})) = \mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^n$, et les coordonnées homogènes de \mathbb{P}^n des morphismes $\mathbb{P}^n \rightarrow \text{Spec}(\text{Sym}(\mathcal{O}(1)^\vee))$.

4.5.5 Définition. Soient X un espace annelé, \mathcal{F} un \mathcal{O}_X -module, et $(s_i)_{i \in I}$ une famille de sections globales de \mathcal{F} . On dit que \mathcal{F} est *engendré par les s_i* si le morphisme naturel $\varphi : \mathcal{O}_X^{(I)} \rightarrow \mathcal{F}$, $\varphi(U)((a_i)_{i \in I}) = \sum a_i s_i|_U$ est surjectif.

En particulier, il résulte de ce qui précède que le faisceau inversible $\mathcal{O}(1)$ est engendré par les sections t_0, \dots, t_n puisque t_i engendre $\mathcal{O}(1)|_{P_i}$. On obtient donc un morphisme surjectif :

$$\phi : \mathcal{O}_P^{\oplus n+1} \longrightarrow \mathcal{O}(1).$$

Lorsqu'on change les coordonnées homogènes t_i en $u_i = \lambda t_i$ pour un $\lambda \in \Gamma(\mathbb{Z}, \mathcal{O}_{\mathbb{Z}})^\times$, le morphisme ϕ est multiplié par λ . C'est pourquoi dans la propriété universelle ci-dessous, c'est la classe de ϕ modulo les scalaires inversibles qui apparaît.

4.5.6 Théorème. Soit $f : X \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^n$ un morphisme de \mathbb{Z} -schémas. Alors $\mathcal{L} = f^*\mathcal{O}(1)$ est un faisceau inversible sur X et $\psi = f^*\phi : \mathcal{O}_X^{\oplus n+1} \rightarrow \mathcal{L}$ est un morphisme surjectif de \mathcal{O}_X -modules. De plus, l'application $f \mapsto (\mathcal{L}, \psi)$ induit une bijection fonctorielle en X :

$$\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(X, \mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^n) \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{l} (\mathcal{L}, \psi) \text{ avec } \mathcal{L} \text{ faisceau inversible sur } X \text{ et} \\ \psi : \mathcal{O}_X^{\oplus n+1} \longrightarrow \mathcal{L} \text{ surjection de } \mathcal{O}_X\text{-modules} \end{array} \right\} / \Gamma(X, \mathcal{O}_X)^\times.$$

Démonstration : Nous nous contenterons de montrer comment on construit une application en sens inverse, et renverrons à [EH], III.2.5 ou [GW], 13.33 pour une preuve complète. Soit (\mathcal{L}, ψ) un couple composé d'un faisceau inversible sur X et d'une surjection $\psi : \mathcal{O}_X^{\oplus n+1} \rightarrow \mathcal{L}$. Soit s_i l'image par ψ du i -ième vecteur de la base canonique de $\mathcal{O}_X^{\oplus n+1}$. Notons $\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \kappa(x)$ et pour chaque i posons

$$X_i = \{x \in X, (s_i)_x \neq 0 \text{ dans } \mathcal{L}(x)\}.$$

Il s'agit de l'ensemble des points x tels que s_i est un générateur de $\mathcal{L}(x)$, et aussi de \mathcal{L}_x , et donc (par Nakayama) de $\mathcal{L}|_U$ sur un petit voisinage ouvert U de x . On montre que X_i est un ouvert, et le fait que les sections s_i engendrent \mathcal{L} montre que les X_i recouvrent X . De plus, pour tous $j \neq i$, sur tout ouvert $U \subset X_i$ sur lequel \mathcal{L} est trivial, on peut écrire $s_j = f_{i,j,U} s_i$ pour une certaine fonction $f_{i,j,U} \in \Gamma(U, \mathcal{O}_U)$. Cette fonction est uniquement déterminée ; les $f_{i,j,U}$ se recollent en une fonction $f_{i,j}$ sur X_i . L'application $\mathbb{Z}[t_0/t_i, \dots, t_n/t_i] \rightarrow \Gamma(X_i, \mathcal{O}_X)$ qui envoie t_j/t_i sur $f_{i,j}$ définit un morphisme $f_i : U_i \rightarrow X_i$ où U_i est le i -ième ouvert standard de $\mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^n$. Les morphismes f_i se recollent en $f_{\mathbb{Z}} : X \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^n$ qui détermine à son tour un unique S -morphisme $f : X \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^n$. \square

4.5.7 Remarques. (1) On définit le S -espace projectif de dimension n par $\mathbb{P}_S^n := \mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^n \times S$. Il vérifie une propriété universelle dans la catégorie des S -schémas analogue à la propriété universelle $\mathbb{P}^n \mathbb{Z}$ dans la catégorie des \mathbb{Z} -schémas.

(2) Si E est un k -espace vectoriel de dimension finie, on a une bijection entre l'ensemble des hyperplans $F \subset E$ et l'ensemble des classes d'équivalence de surjections $u : E \rightarrow G$ où $\dim_k(G) = 1$, pour la relation $u \sim v$ ssi il existe $\lambda \in k^\times$ tel que $v = \lambda u$. Utilisant la variante faisceautique de ces faits, on montre que $\text{Hom}_S(X, \mathbb{P}_S^n) \xrightarrow{\sim} \{ \mathcal{H} \subset \mathcal{O}_X^{\oplus n+1} \text{ localement facteur direct de rang } n \}$. Les \mathcal{H} qui apparaissent ici correspondent à ce qu'il faut appeler des « hyperplans » de $\mathcal{O}_X^{\oplus n+1}$. On retrouve le fait que l'espace projectif classe les hyperplans (ou, c'est la même chose par dualité, les droites) d'un espace vectoriel.

(3) Proposons une reformulation de la propriété universelle. La première phrase du théorème implique que pour tout morphisme de S -schémas $f : X \rightarrow \mathbb{P}_S^n$, le faisceau $\mathcal{L} = f^* \mathcal{O}(1)$ est inversible et engendré par les sections $s_i = f^*(t_i)$ pour $i = 0, \dots, n$. (Pour tout morphisme $f : Y \rightarrow X$ et tout faisceau de \mathcal{O}_X -modules \mathcal{F} , on note $f^*(t)$ l'image d'une section locale t de \mathcal{F} par le morphisme d'adjonction $\mathcal{F} \rightarrow f_* f^* \mathcal{F}$.) De plus, si les t_i sont multipliées simultanément par une fonction inversible $\lambda \in \Gamma(\mathbb{P}_S^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_S^n}^\times)$, alors les s_i sont multipliées simultanément par la fonction inversible $f^\#(\lambda) \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)^\times$. Ceci démontre que la classe $\underline{s} = (s_0 : \dots : s_n)$ pour la relation induite par la multiplication scalaire diagonale par $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)^\times$, ne dépend que de la classe $\underline{t} = (t_0 : \dots : t_n)$, c'est-à-dire du système de coordonnées homogènes canonique. Il est naturel d'appeler un couple $(\mathcal{L}, \underline{s})$ composé d'un faisceau inversible et d'un uplet de sections globales qui l'engendrent, à multiplication par $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)^\times$ près, un *système de fonctions homogènes sur X* . Alors, le théorème se réécrit comme une bijection fonctorielle :

$$\text{Hom}_S(X, \mathbb{P}_S^n) \xrightarrow{\sim} \{ \text{systèmes } (\mathcal{L}, \underline{s}) \text{ de } n+1 \text{ fonctions homogènes sur } X \}.$$

Un système de fonctions homogènes sur X ne mérite le nom de *coordonnées* que s'il permet de repérer les points de manière aussi précise que ce qu'on attend habituellement de coordonnées. C'est le cas notamment lorsque le morphisme $X \rightarrow \mathbb{P}_S^n$ déterminé par $(\mathcal{L}, \underline{s})$ est une immersion. En géométrie algébrique projective, l'une des principales tâches est justement de trouver quand cette situation favorable se produit.

4.5.8 Remarque. Il est instructif de décrire le cas particulier des morphismes $X \rightarrow \mathbb{P}_S^n$ lorsque X est un schéma local, car il est très proche de la description classique des points de l'espace projectif. Lorsque $X = \text{Spec}(A)$ est affine, un morphisme surjectif $\psi : \mathcal{O}_X^{\oplus n+1} \twoheadrightarrow \mathcal{L}$ est déterminé par un morphisme surjectif de A -modules $A^{\oplus n+1} \twoheadrightarrow \Gamma(X, \mathcal{L})$. Celui-ci est à son tour déterminé par les $n+1$ images ℓ_0, \dots, ℓ_n des éléments de la base canonique de $A^{\oplus n+1}$. Si de plus A est un anneau local, alors

le seul ouvert de X contenant le point fermé est X lui-même, si bien que tout faisceau inversible est trivial. On a donc un isomorphisme $\Gamma(X, \mathcal{L}) \simeq A$ et notant t un générateur de $\Gamma(X, \mathcal{L})$, on peut écrire $\ell_i = a_i t$ avec $a_i \in A$. On observe que la classe $(a_0 : \dots : a_n)$ pour l'homothétie par A^\times ne dépend pas du choix du générateur. Enfin, le fait que ψ soit surjectif signifie qu'au moins un des a_i est inversible, donc les points de \mathbb{P}_S^n à valeurs dans A sont en bijection avec les « coordonnées homogènes » usuelles $(a_0 : \dots : a_n)$, qui sont des uplets avec au moins un a_i inversible à homothétie près.

5 Quelques propriétés, quelques exemples

5.1 Fermés irréductibles et points

Les fermés irréductibles jouent un rôle essentiel pour comprendre la topologie d'un schéma ; nous allons décrire leur relation avec les points. Soulignons le fait que les énoncés suivants sont purement topologiques : seul l'espace topologique sous-jacent entre en jeu. On rappelle que la notion d'espace irréductible possède différentes définitions équivalentes, voir exercice 1.3.3. La lectrice qui voudrait plus de détails sur la notion d'irréductibilité d'un espace topologique peut consulter Bourbaki, Algèbre Commutative, chap. II, § 4, no 1.

5.1.1 Définition. Soit X un espace topologique. On appelle *composante irréductible* de X un fermé irréductible maximal, i.e. un fermé irréductible Y tel que pour toute inclusion $Y \subset Y'$ avec Y' fermé irréductible, on a $Y' = Y$.

5.1.2 Proposition. *Tout espace topologique est recouvert par ses composantes irréductibles.*

Démonstration : Soit $x \in X$ et E l'ensemble des fermés irréductibles de X qui contiennent x . On a $E \neq \emptyset$ car $\{x\} \in E$. De plus, la relation d'inclusion est un ordre inductif sur E , c'est-à-dire que toute chaîne d'éléments de E possède une borne supérieure. D'après le lemme de Zorn, E possède un élément maximal Y qui est un fermé irréductible maximal. (Pour se rafraîchir les idées sur le lemme de Zorn, on peut consulter l'excellent livre de Paul Halmos [Hal].) \square

5.1.3 Lemme. *Soit $X = \text{Spec}(A)$ un schéma affine.*

- (1) *L'adhérence d'un point $x = [p]$ est le fermé irréductible $V(p)$.*
- (2) *Les fermés irréductibles de X sont les ensembles $V(p)$ avec p premier.*
- (3) *Pour tout fermé irréductible $F \subset X$, il existe un unique point $\eta = \eta_F \in X$ tel que $\overline{\{\eta\}} = F$, appelé point générique de F . Les applications $x \mapsto \overline{\{x\}}$ et $F \mapsto \eta_F$ définissent une bijection :*

$$\text{Spec}(A) \xleftarrow{1-1} \{\text{fermés irréductibles de } X\}.$$

- (4) *La bijection précédente est décroissante : si $x = [p]$ et $y = [q]$ sont deux points de X , on a $p \subset q$ si et seulement si $\overline{\{y\}} \subset \overline{\{x\}}$.*

(5) *Les points fermés de X sont les $x = [p]$ où p est un premier maximal.*

(6) *Les composantes irréductibles sont les fermés $V(p)$ où p est un premier minimal.*

(7) L'espace X est irréductible si et seulement si le nilradical de A est premier.

Démonstration : (1) On a $\overline{\{x\}} = \bigcap_{p \in V(I)} V(I) = \bigcap_{p \supset I} V(I) = V(p)$ en utilisant, pour la dernière égalité, le fait que $I \subset J$ entraîne $V(I) \supset V(J)$.

(2) Un point $x = [p]$ est irréductible, donc son adhérence $V(p)$ aussi. Réciproquement, soit $F = V(I)$ un fermé irréductible de X . Soit $\sqrt{I} = \{x \in A; \exists n \geq 1, x^n \in I\}$ l'idéal racine de I . On sait que $\sqrt{I} = \bigcap_{p \supset I} p$, donc $V(I) = V(\sqrt{I})$. Quitte à remplacer I par \sqrt{I} on peut donc supposer que I est un idéal radical. Supposons que I n'est pas premier, alors il existe $a, b \in A$ tels que $a, b \notin I$ mais $ab \in I$. Alors $V(I, a) \cup V(I, b) = V(I)$. Par ailleurs, on a $V(I, a) \subsetneq V(I)$ car sinon, tout idéal premier contenant I contient a , donc $I = \sqrt{I} = \bigcap_{p \supset I} p$ contient a , contradiction. De même, on a $V(I, b) \subsetneq V(I)$. Ceci montre que $V(I)$ n'est pas irréductible, contradiction. Donc I est premier.

(3) D'après le point (2), le fermé F est de la forme $V(p)$ donc $\eta = [p]$ convient. Soient p, q deux premiers tels que $F = V(p) = V(q)$. Alors $p \in V(q)$ donc $p \supset q$. De même $q \supset p$, donc $p = q$ ce qui montre l'unicité de η . La bijection annoncée est claire.

(4) Laissé à la lectrice.

(5), (6). Comme la bijection précédente est décroissante, elle fait correspondre éléments minimaux et éléments maximaux de part et d'autre. Donc les points fermés (i.e. les fermés irréductibles minimaux) correspondent aux premiers maximaux, et les composantes irréductibles (i.e. les fermés irréductibles maximaux) correspondent aux premiers minimaux.

(7) L'espace X est irréductible ssi il n'a qu'une composante irréductible, ssi A ne possède qu'un premier minimal p . Ceci signifie que le nilradical, qui est l'intersection de tous les premiers (les minimaux suffisent, bien sûr), est égal à p i.e. est un idéal premier. \square

L'énoncé 5.1.3(3) est valable pour un schéma quelconque :

5.1.4 Proposition. Soit X un schéma. Alors tout fermé $F \subset X$ possède un unique point générique η_F et les applications $x \mapsto \overline{\{x\}}$ et $F \mapsto \eta_F$ définissent une bijection :

$$|X| \xleftarrow{1-1} \{\text{fermés irréductibles de } X\}.$$

Démonstration : Nous nous contenterons de construire le point générique d'un fermé irréductible ; le reste est plus facile et laissé en exercice. Nous utiliserons le fait que pour tout ouvert $U \subset X$, l'application $F \mapsto F \cap U$ est une bijection de l'ensemble des fermés irréductibles de X qui rencontrent U vers l'ensemble des fermés irréductibles de U , dont l'inverse est $G \mapsto \overline{G}$. De plus cette bijection est compatible avec la restriction à un sous-ouvert, en un sens évident.

Soit $F \subset X$ un fermé irréductible. Alors par définition F est non vide ; soit $x \in F$ un point. Soit $U \subset X$ un voisinage ouvert affine de x dans X . D'après le résultat dans le cas affine (lemme 5.1.3(3)), le fermé irréductible $F \cap U$ possède un unique point générique η_U dans U . Soit $V \subset X$ un autre voisinage ouvert affine de x dans X . Alors, pour tout choix d'un troisième voisinage ouvert affine $W \subset U \cap V$ de x , on a $\eta_U = \eta_W = \eta_V$ d'après l'assertion d'unicité dans le cas affine. Donc $\eta_F := \eta_U$ ne dépend pas de U . \square

L'ensemble des fermés irréductibles de X est muni de la relation d'inclusion. Si on traduit cette relation sur X à l'aide de la bijection précédente, on tombe sur les notions générales de spécialisation et de générisation dans un espace topologique.

5.1.5 Définition. Soient X un espace topologique et x, y deux points tels que $\overline{\{y\}} \subset \overline{\{x\}}$, ou de manière équivalente $y \in \overline{\{x\}}$. On dit alors que y est une *spécialisation* de x , ou que x est une *générisation* de y . On dit aussi que x se *spécialise* sur y , et on note $x \rightsquigarrow y$.

5.1.6 Exercice. (1) Dans un espace topologique, montrez que tout fermé est stable par spécialisation et tout ouvert est stable par générisation.

(2) Soit $f : X \rightarrow Y$ une application continue entre espaces topologiques. Soient $x_1, x_2 \in X$. Montrez que $x_1 \rightsquigarrow x_2$ implique $f(x_1) \rightsquigarrow f(x_2)$.

5.2 Schémas réduits et intègres

5.2.1 Définition. On dit qu'un schéma X est *réduit* si pour tout ouvert $U \subset X$, l'anneau $\mathcal{O}_X(U)$ est réduit. On dit qu'un schéma est *irréductible* si l'espace topologique sous-jacent $|X|$ l'est. On dit qu'un schéma X est *intègre* si pour tout ouvert *non vide* $U \subset X$, l'anneau $\mathcal{O}_X(U)$ est intègre.

5.2.2 Exercice. Montrez que X est réduit ssi pour tout $x \in X$, l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$ est réduit.

Pour tout ouvert $U \subset X$, on note $\mathcal{N}_0(U)$ l'ensemble des fonctions nilpotentes de $\mathcal{O}_X(U)$ et $\mathcal{N}(U)$ l'ensemble des fonctions *localement* nilpotentes dans $\mathcal{O}_X(U)$. On appelle \mathcal{N}_0 le *préfaisceau nilradical* de \mathcal{O}_X et \mathcal{N} le *faisceau nilradical* de \mathcal{O}_X , à cause de l'exercice suivant.

5.2.3 Exercice. Montrez que :

- (1) $\mathcal{N}_0(U) = \mathcal{N}(U)$ pour tout U quasi-compact.
- (2) L'inclusion $i : \mathcal{N}_0 \hookrightarrow \mathcal{N}$ identifie \mathcal{N} au faisceau associé à \mathcal{N}_0 .
- (3) Le faisceau d'idéaux \mathcal{N} est quasi-cohérent.
- (4) Si X est noethérien, \mathcal{N}_0 est un faisceau.
- (5) Si $X = \coprod_{n \geq 0} \text{Spec}(k[t]/(t^n))$, pour un corps k , alors \mathcal{N}_0 n'est pas un faisceau.

L'exemple (5) montre que \mathcal{N}_0 n'est pas toujours un faisceau, contrairement à ce qui est affirmé dans [EH], page 25. On peut même fabriquer un exemple dans lequel X est affine, en prenant le spectre de $A = \prod_{n \geq 0} k[t]/(t^n)$ et en raisonnant de la même manière que dans l'exercice 5.3.6.

5.2.4 Proposition. Soit X un schéma et $F \subset |X|$ un fermé. Alors, il existe un plus petit sous-schéma fermé $Y \subset X$ de support F . C'est le seul sous-schéma fermé de X de support F qui soit réduit. Si $F = |X|$, ce sous-schéma fermé est le schéma réduit X_{red} , dont le faisceau d'idéaux est le nilradical \mathcal{N} .

Démonstration : Si $X = \text{Spec}(A)$ est affine, le fermé F est de la forme $V(I)$, pour un idéal $I \subset A$. De plus, on a vu en 4.3.7 que parmi tous les idéaux qui conviennent, il y en a un qui est maximal : c'est le seul qui soit *radical* i.e. tel que $I = \sqrt{I}$. Ceci signifie que le quotient A/I est réduit, c'est-à-dire que le schéma $V(I)$ est réduit. Si X est un schéma arbitraire, sur chaque ouvert affine U on dispose par ce qui précède d'un plus petit sous-schéma fermé Y_U de support $F \cap U$. Par unicité, les sous-schémas fermés Y_U coïncident sur les intersections $U \cap V$, donc se recollent en un unique sous-schéma fermé Y qui remplit les conditions demandées. \square

5.2.5 Proposition. *Un schéma est intègre si et seulement s'il est irréductible et réduit.*

Démonstration : Si X n'est pas réduit, il n'est pas intègre. S'il n'est pas irréductible, il existe deux ouverts non vides disjoints U, V . Dans ce cas $\mathcal{O}_X(U \cup V) = \mathcal{O}_X(U) \times \mathcal{O}_X(V)$ n'est pas intègre, donc X n'est pas intègre.

Réciproquement, supposons X irréductible et réduit. Soit U un ouvert non vide et $f, g \in \mathcal{O}_X(U)$ tels que $fg = 0$. Alors les fermés $Z_f = \{x \in U; f(x) = 0 \in \kappa(x)\}$ et Z_g recouvrent X (le fait que ce sont des fermés découle de 2.7.10). Par irréductibilité, l'un des deux égale X , par exemple Z_f . Ceci signifie que le germe f_x est dans l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{X,x}$, pour tout $x \in U$. Alors dans tout ouvert affine de U la fonction f est nilpotente, donc nulle sur U par hypothèse. \square

5.3 Schémas noethériens

Les propriétés de finitude d'un anneau noethérien ont pour conséquence des propriétés de finitude pour le spectre : par exemple, les chaînes de fermés irréductibles $Y_1 \subsetneq Y_2 \subsetneq Y_3 \subsetneq \dots$, qui correspondent aux chaînes d'idéaux premiers de l'anneau, sont de longueur finie. Sur un schéma général, il est clair que l'hypothèse de quasi-compacité est nécessaire pour conserver ces propriétés.

5.3.1 Définition. On dit qu'un schéma X est *localement noethérien* s'il possède un recouvrement par des ouverts affines dont les anneaux de fonctions sont noethériens. On dit qu'un schéma X est *noethérien* s'il est localement noethérien et quasi-compact.

5.3.2 Proposition. *Soit X un schéma. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (1) X est localement noethérien,
- (2) pour tout ouvert affine $U \subset X$, l'anneau $\mathcal{O}_X(U)$ est noethérien.

Démonstration : Seule l'implication (1) \Rightarrow (2) mérite un argument. Soit $U = \text{Spec}(A)$ ouvert affine et $\{I_k\}_{k \geq 0}$ une suite croissante d'idéaux de A . Utilisant le fait que X est localement noethérien et que tout localisé d'un anneau noethérien est noethérien, on voit que U peut être recouvert par des ouverts affines distingués $D(f)$ d'anneaux de fonctions A_f noethériens. De plus, par quasi-compacité de U on peut supposer ce recouvrement fini. Alors, pour tout f , la suite d'idéaux localisés $(I_k)_f$ est stationnaire, à partir d'un entier n que l'on peut supposer indépendant de f . Or, si I, J sont deux idéaux de A tels que $I_f = J_f$ pour tout f , alors $I = J$ (pour le voir, utiliser une partition de l'unité adaptée aux f^α pour un entier α bien choisi). Ceci montre que la suite I_k est stationnaire. Donc A est noethérien. \square

Voici un exemple de schéma noethérien.

5.3.3 Exemple. Soit k un corps. Un schéma est *localement de type fini sur k* s'il possède un recouvrement par des ouverts affines dont les anneaux de fonctions sont des k -algèbres de type fini. On dit que X est *de type fini sur k* s'il est localement de type fini et quasi-compact. Par exemple, un sous-schéma d'un espace affine \mathbb{A}_k^n ou d'un espace projectif \mathbb{P}_k^n est de type fini sur k .

La propriété noethérienne a un pendant topologico-combinatoire introduit dans l'exercice suivant.

5.3.4 Exercice. On dit qu'un espace topologique X est *noethérien* si toute chaîne décroissante $Y_0 \supset Y_1 \supset Y_2 \supset \dots$ de fermés est stationnaire.

(1) Soit X un espace noethérien. Montrez que (i) toute partie munie de la topologie induite est un espace noethérien (ii) X est quasi-compact (iii) X possède un nombre fini de composantes irréductibles (iv) toute composante irréductible contient un ouvert non vide de X .

(2) Montrez que le spectre d'un anneau noethérien est un espace topologique noethérien. Montrez que la réciproque est fautive en à l'aide d'un anneau non noethérien dont le spectre est ponctuel.

5.3.5 Proposition. *Tout sous-schéma d'un schéma (localement) noethérien est (localement) noethérien.*

Démonstration : Supposons X localement noethérien. Si $U \subset X$ est un sous-schéma ouvert, le fait que U est encore localement noethérien est clair. Si $Y \subset X$ est un sous-schéma fermé, c'est tout aussi clair. Le cas d'un sous-schéma quelconque s'en déduit. Supposons de plus X quasi-compact. Alors il est réunion d'un nombre fini d'ouverts affines dont le spectre est un espace noethérien, d'après 5.3.2 et 5.3.4(2). On en déduit que l'espace $|X|$ lui-même est noethérien. Alors tout sous-schéma a pour support un espace noethérien, donc quasi-compact, d'après 5.3.4(1). Ceci conclut. \square

5.3.6 Exercice. La proposition précédente implique que tout ouvert d'un schéma noethérien est quasi-compact. On peut construire un exemple de schéma affine (donc quasi-compact) qui possède des ouverts non quasi-compact de la manière suivante. Sur un corps k , on prend l'anneau produit $A = k^{\mathbb{N}}$. Montrez que $X = \text{Spec}(A)$ contient comme ouvert le schéma non quasi-compact $U = \coprod_{n \in \mathbb{N}} \text{Spec}(k)$, somme disjointe dénombrable de k -points. Retrouvez le fait que $U \neq X$ en expliquant pourquoi il existe un idéal premier de A qui n'est pas le noyau de l'une des projections naturelles $A \rightarrow k$.

5.4 Variétés classiques

5.4.1 Variétés abstraites et variétés quasi-projectives. Dans 1.2, pour simplifier nous n'avons parlé que d'ensembles algébriques affines, fermés dans l'espace affine $\mathbb{A}^n(k)$ sur un corps algébriquement clos. Les géomètres classiques étudiaient également les ensembles algébriques (quasi-)projectifs i.e. (localement) fermés dans l'espace projectif $\mathbb{P}^n(k)$. La notion de quasi-projectivité existe aussi pour les schémas : il s'agit des schémas qui sont sous-schémas d'un espace projectif. Le livre de A. WEIL, *Foundations of Algebraic Geometry* publié en 1946 a introduit les ensembles algébriques abstraits, que l'on peut définir comme des espaces topologiques X possédant un recouvrement ouvert par des ensembles algébriques affines X_i . Un morphisme $f : X \rightarrow Y$ entre deux tels ensembles est une application continue telle qu'il existe des recouvrements ouverts $X = \cup X_i$, $Y = \cup Y_j$ par des ensembles algébriques affines $X_i \subset \mathbb{A}^{n_i}(k)$ et $Y_j \subset \mathbb{A}^{m_j}(k)$, et des applications à composantes polynomiales $f_{i,j} : \mathbb{A}^{n_i}(k) \rightarrow \mathbb{A}^{m_j}(k)$ satisfaisant $f_{i,j}(X_i) \subset Y_j$ et $f|_{X_i} = f_{i,j}$.

La théorie des schémas englobe les variétés classiques. Dans le cas affine, c'est simplement parce qu'on dispose d'équivalences de catégories :

$$\left(\begin{array}{c} \text{ensembles} \\ \text{algébriques} \\ \text{affines sur } k \end{array} \right) \longleftrightarrow \left(\begin{array}{c} k\text{-algèbres} \\ \text{de type fini} \\ \text{réduites} \end{array} \right) \longleftrightarrow \left(\begin{array}{c} k\text{-schémas affines} \\ \text{de type fini} \\ \text{réduits} \end{array} \right)$$

où la première équivalence donnée par le Nullstellensatz de Hilbert (voir § 1.2) et la seconde est donnée par l'équivalence entre anneaux et schémas affines (exercice 2.7.4). Plus généralement, on a l'énoncé suivant. Pour en faciliter la lecture, rappelons que les variétés sont les ensembles algébriques irréductibles et que les schémas de type fini sur k ont été définis dans 5.3.3.

5.4.2 Théorème. *Soit k un corps algébriquement clos. Il existe un foncteur pleinement fidèle de la catégorie des ensembles algébriques (abstrait) sur k dans la catégorie des k -schémas, qui induit les équivalences de catégories suivantes :*

$$\begin{array}{ccc}
 \{\text{ensembles algébriques abstraits}\} & \xrightarrow{\sim} & \{k\text{-schémas de type fini réduits}\} \\
 \cup & & \cup \\
 \{\text{ensembles algébriques quasi-projectifs}\} & \xrightarrow{\sim} & \{k\text{-schémas quasi-projectifs réduits}\} \\
 \cup & & \cup \\
 \{\text{variétés algébriques quasi-projectives}\} & \xrightarrow{\sim} & \{k\text{-schémas quasi-projectifs intègres}\}
 \end{array}$$

Démonstration : Le Nullstellensatz de Hilbert affirme que tout ensemble algébrique affine X détermine une k -algèbre de type fini réduite $A = \Gamma(X)$ telle que $X = \text{Spm}(A)$. En particulier $X = \text{Spm}(A)$ détermine le schéma $X' = \text{Spec}(A)$. De plus, une inclusion ouverte d'ensembles algébriques affines $i : X_1 \rightarrow X_2$ induit un morphisme de k -algèbres $A_2 \simeq A_1$ et une immersion ouverte de schémas $i' : X'_1 \simeq X'_2$, telle que i est un isomorphisme si et seulement si i' est un isomorphisme. Si X est un ensemble algébrique abstrait quelconque, choisissons un recouvrement ouvert par des ensembles algébriques affines X_i , notons $X_{i,j} = X_i \cap X_j$ et soit $\varphi_{i,j} : X_{i,j} \rightarrow X_{j,i}$ l'identité de $X_i \cap X_j$. Par ce qui précède, ces données donnent naissance à une famille de schémas X'_i et de sous-schémas ouverts $X'_{i,j} \subset X'_i$ avec des isomorphismes $\varphi'_{i,j} : X'_{i,j} \rightarrow X'_{j,i}$ qui satisfont clairement les conditions de recollement. On note X' le schéma obtenu par recollement. Il n'est pas difficile de construire de même le morphisme de schémas $f' : X_1 \rightarrow X_2$ associé à un morphisme d'ensembles algébriques $f : X'_1 \rightarrow X'_2$. On a ainsi défini le foncteur annoncé. Le fait que ce foncteur soit pleinement fidèle provient du fait que la bijection $\text{Hom}(X_1, X_2) \simeq \text{Hom}(A_2, A_1) \simeq \text{Hom}(X'_1, X'_2)$ donnée par le Nullstellensatz pour X_1, X_2 affines, s'étend par recollement au cas d'ensembles algébriques quelconques. Le fait que l'image essentielle de ce foncteur soit égale à la sous-catégorie pleine des k -schémas de type fini réduits peut se prouver en construisant un foncteur inverse $X' \mapsto X$ par le même procédé que pour le foncteur direct, i.e. en définissant $X' \mapsto A = \Gamma(X', \mathcal{O}_{X'}) \mapsto X = \text{Spm}(A)$ dans le cas affine et en recollant. Le fait qu'ensembles algébriques quasi-projectifs et k -schémas quasi-projectifs réduits se correspondent provient essentiellement du fait que $(\mathbb{P}^n(k))' = \mathbb{P}^n_k$, i.e. le schéma associé à la variété algébrique classique $\mathbb{P}^n(k)$ est le schéma \mathbb{P}^n_k . Le fait que les variétés correspondent aux schémas intègres provient du fait qu'un schéma réduit est irréductible si et seulement s'il est intègre. \square

On notera que, comme on l'a déjà dit, l'inclusion $\text{Spm}(A) \hookrightarrow \text{Spec}(A)$ identifie $\text{Spm}(A)$ à l'ensemble des points fermés, ou fermés irréductibles minimaux, de $\text{Spec}(A)$. Plus généralement, un ensemble algébrique abstrait X peut se voir comme l'ensemble des points fermés du support $|X'|$ de son schéma associé ; et le support $|X'|$ d'un k -schéma de type fini réduit peut se voir comme l'ensemble des sous-variétés de la variété classique correspondante X .

5.4.3 Exercice. Soit k un corps algébriquement clos. On considère la variété algébrique classique $\mathbb{A}^1(k) \setminus \{0\} = k^*$, complémentaire du point origine 0 dans la droite affine sur k . Munie de la multiplication dans k^* , c'est un groupe algébrique qu'on l'appelle le *groupe multiplicatif* de k et qu'on note $\mathbb{G}_m(k)$.

- (1) La variété k^* est-elle réduite ? quasi-projective ? intègre ?
- (2) Décrivez le k -schéma de type fini $\mathbb{G}_{m,k}$ associé par l'équivalence de 5.4.2 à $\mathbb{G}_m(k)$.
- (3) Décrivez en termes schématiques les morphismes qui donnent la structure de « schéma en groupes », c'est-à-dire la multiplication $\mathbb{G}_{m,k} \times_{\text{Spec}(k)} \mathbb{G}_{m,k} \rightarrow \mathbb{G}_{m,k}$ et le morphisme qui donne la section neutre $\text{Spec}(k) \rightarrow \mathbb{G}_{m,k}$.
- (3) Pour tout n entier, calculez le morphisme d'élévation à la puissance n -ième, au sens de la multiplication itérée dans ce schéma en groupes.
- (4) Le noyau du morphisme de puissance n -ième, défini comme un égalisateur convenable (cf 3.5.15), est noté $\mu_{n,k}$ et appelé *schéma en groupes des racines n -ièmes de l'unité*. Donnez sa définition précisément et décrivez-le : quel est son espace topologique sous-jacent ? Est-il affine, irréductible, réduit ?

Introduction à la Géométrie Algébrique. Le langage des schémas

Cours du 22 novembre 2016

5.5 Schémas sur un corps non algébriquement clos

Nous allons donner des exemples de schémas sur un corps k qui illustrent trois caractéristiques de la situation où k possède une arithmétique intéressante, c'est-à-dire n'est pas algébriquement clos :

- la présence ou non de points rationnels,
- la possibilité que le schéma soit défini sur un certain sous-corps,
- le fait que certaines propriétés soient perdues par changement de base à une clôture algébrique, et la nécessité de considérer les propriétés *géométriques*.

On fixe donc un corps k . Tout k -schéma X est muni d'un morphisme $X \rightarrow \text{Spec}(k)$ appelé « morphisme de structure ». Les anneaux $\mathcal{O}_X(U)$ de fonctions régulières sur des ouverts, les anneaux locaux et les corps résiduels de points $x \in X$ sont des k -algèbres.

Un point rationnel du sous-schéma fermé de \mathbb{A}^n défini par des polynômes en n variables f_1, \dots, f_r doit correspondre à une solution $a = (a_1, \dots, a_r)$ dans k^r du système $f_1(x_1, \dots, x_n) = \dots = f_r(x_1, \dots, x_n) = 0$. Si on pose $A = k[x_1, \dots, x_n]/(f_1, \dots, f_r)$, une telle solution détermine un unique morphisme de k -algèbres $A \rightarrow k$ c'est-à-dire un unique morphisme $\text{Spec}(k) \rightarrow X = \text{Spec}(A)$. Si on veut considérer aussi les solutions $a \in l^r$ pour des extensions l/k , on est amené à la définition suivante.

5.5.1 Définition. Soit l/k une extension de corps. Un *point l -rationnel*, ou *l -point*, ou *point à valeurs dans l* , est un morphisme de k -schémas $\text{Spec}(l) \rightarrow X$. On dit parfois *point rationnel* au lieu de *point k -rationnel*. On note $X(l) = \text{Hom}_k(\text{Spec}(l), X)$ l'ensemble des points l -rationnels de X .

5.5.2 Remarques. (1) Sur un corps algébriquement clos, cette notation est cohérente avec les notations $\mathbb{A}^n(k)$ et $\mathbb{P}^n(k)$ que nous avons utilisées pour désigner l'espace affine et l'espace projectif en tant que variétés algébriques classiques, qui sont les ensembles de points k -rationnels des schémas \mathbb{A}_k^n et \mathbb{P}_k^n . (Et la notation évidemment redondante $\mathbb{A}_k^n(k)$ est simplifiée en $\mathbb{A}^n(k)$.)

(2) Pour toute extension de corps l/k , notons $X_l = X \otimes_k l = X \times_{\text{Spec}(k)} \text{Spec}(l)$ qui est naturellement un l -schéma. On a alors une bijection naturelle entre $X(l)$ et $X_l(l)$, i.e. entre points l -rationnels du k -schéma X et points rationnels du l -schéma X_l .

(3) Si l/k est une extension galoisienne, le groupe de Galois $G = \text{Gal}(l/k)$ agit à droite sur $X(l)$ de la manière suivante : à tout k -automorphisme $\sigma : l \rightarrow l$ est associé un morphisme $\text{Spec}(l) \rightarrow \text{Spec}(l)$ et on agit sur $\text{Hom}_k(\text{Spec}(l), X)$ par précomposition.

5.5.3 Proposition. Soit k un corps et X un k -schéma localement de type fini. Soit \bar{k} une clôture algébrique, et notons $G_l := \text{Gal}(l/k)$ le groupe des k -automorphismes d'une extension $k \subset l \subset \bar{k}$. Alors, l'ensemble $|X|_0$ des points fermés de X est dense et on a :

$$|X|_0 = \bigcup_{\substack{l/k \text{ finie} \\ \text{galoisienne}}} X(l)/G_l = X(\bar{k})/G_{\bar{k}}.$$

Autrement dit, les points fermés de X sont en bijection avec les orbites de $X(\bar{k})$ sous l'action du groupe de Galois.

Le symbole \cup qui apparaît désigne soit une réunion dans $X(\bar{k})/G_{\bar{k}}$ soit une limite inductive.

Démonstration : L'énoncé est local sur X donc on peut remplacer X par un ouvert affine et donc supposer $X = \text{Spec}(A)$ affine. Dire que l'ensemble des points fermés de X est dense revient à dire qu'un idéal $I \subset A$ qui est inclus dans tous les idéaux maximaux est nilpotent. Ceci découle du fait que les algèbres de type fini sur un corps sont des *anneaux de Jacobson*, i.e. tout premier est intersection d'idéaux maximaux (plus généralement, la propriété de Jacobson est stable par passage à une algèbre de type fini). Ce résultat est une forme forte du Nullstellensatz et on le trouve dans [Mat], th. 5.5 ou [Ei], th. 4.19.

Maintenant soit $x \in X$ un point fermé, i.e. $x = [m]$ avec m maximal. Alors le corps résiduel $l := \kappa(x) = A/m$ est une extension finie de k d'après [Mat], th. 5.4. Ceci détermine un l -point de X puis une orbite sous G_l . Réciproquement, considérons une orbite de $X(l)$ sous G_l . Elle est représentée par un morphisme de k -algèbres $\varphi : A \rightarrow l$. Le noyau $m = \ker(\varphi)$ est un idéal maximal de A , qui ne dépend pas du choix d'un élément dans l'orbite de φ puisque $\ker(\sigma\varphi) = \ker(\varphi)$. Il détermine un point fermé de X .

Enfin, le fait que tout \bar{k} -point de X se factorise par un l -point pour une extension finie l/k provient du fait que si $\varphi : A \rightarrow \bar{k}$ est un morphisme de k -algèbres, alors l'image est une k -algèbre intègre, algébrique et de type fini, donc un corps extension finie de k . On en déduit que l'ensemble $|X|_0$ se décrit aussi comme $X(\bar{k})/G_{\bar{k}}$. \square

5.5.4 Exemple. Le groupe de Galois de \mathbb{C}/\mathbb{R} est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et engendré par la conjugaison complexe. Dans le \mathbb{R} -schéma $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^1 = \text{Spec}(\mathbb{R}[t])$, le point déterminé par l'idéal maximal $(t^2 + 1)$ correspond à l'orbite du \mathbb{C} -point $\mathbb{R}[t] \rightarrow \mathbb{C}$, $t \mapsto i$. L'autre point de l'orbite est le \mathbb{C} -point $\mathbb{R}[t] \rightarrow \mathbb{C}$, $t \mapsto -i$.

5.5.5 Remarque. On trouvera une étude plus fine du lien entre le k -schéma X et le \bar{k} -schéma $X \otimes_k \bar{k}$ dans Mumford [Mu], II, § 4.

5.5.6 Exercice. (1) Soit k un corps algébriquement clos. Montrez que dans la catégorie des ensembles algébriques classiques, les produits existent, et que ensemblistement l'ensemble algébrique produit $X \times Y$ est le produit des ensembles algébriques X et Y . (On pourra commencer par le cas affine.)

(2) Montrez que l'équivalence de catégories du théorème 5.4.2 est compatible au produit.

(3) Montrez que si k n'est pas algébriquement clos, il est faux en général que l'ensemble des points fermés d'un schéma produit $X \times_{\text{Spec}(k)} Y$ est égal au produit des ensembles de points fermés de X et Y . (On pourra regarder le cas où $X = Y = \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^1$ dans [EH], II.2.)

5.5.7 Définition. Soit k un corps et X un k -schéma. On dit que X est *géométriquement réduit* (resp. *irréductible*, *intègre*, *connexe*) si $X \otimes_k \bar{k}$ est réduit (resp. irréductible, intègre, connexe).

Il est équivalent de demander que $X \otimes_k l$ soit réduit (irréductible, intègre, connexe) pour toute extension finie l/k . On montre facilement que si X est géométriquement *truc*, alors il est *truc*. Par

exemple, dans le cas géométriquement réduit, on se ramène au cas affine et le résultat découle du fait qu'on a une injection d'anneaux $A \hookrightarrow A \otimes_k \bar{k}$ donc A est réduit si $A \otimes_k \bar{k}$ l'est.

Nous sommes plutôt intéressés par des exemples qui montrent que les assertions réciproques ne sont pas vraies en général.

5.5.8 Exemples. (1) Soit k un corps non parfait et $a \in k$ un élément qui n'est pas une puissance p -ième. Soit $l = k[t]/(t^p - a)$ qui est un corps, extension purement inséparable de degré p de k . Posons $X = \text{Spec}(l)$. Alors X est réduit (et même intègre). Soit $\alpha \in l$ une racine p -ième de a , par exemple la classe de t . On a :

$$l \otimes_k l = l[t]/(t^p - a) = l[t]/((t - \alpha)^p).$$

Cet anneau n'est pas réduit, donc $X \otimes_k l = \text{Spec}(l \otimes_k l)$ non plus. De manière générale, ce sont les extensions inséparables de corps qui sont responsables de la perte du caractère réduit par extension de corps.

(2) Soit $k = \mathbb{Q}$ et X le sous-schéma fermé de $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^2$ d'équation $x^2 - 2y^2 = 0$. Alors X est intègre, mais comme $x^2 - 2y^2 = (x + \sqrt{2}y)(x - \sqrt{2}y)$, le schéma $X \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ n'est pas irréductible. De manière générale, ce sont les extensions séparables de corps qui sont responsables de la perte du caractère irréductible par extension de corps.

(3) Soit l/k une extension finie galoisienne non triviale de groupe de Galois G . On a un morphisme d'anneaux $u : l \otimes_k l \rightarrow \prod_{\sigma \in G} l$ défini sur les tenseurs irréductibles par $a \otimes b \mapsto (a\sigma(b))_{\sigma \in G}$. On peut voir que u est un isomorphisme d'au moins deux manières :

- on observe que u peut être vu comme une application linéaire entre deux l -espaces vectoriels de dimension $n = [l : k]$, puisque $u(a \otimes b) = au(1 \otimes b)$. Comme l/k est séparable, elle est monogène et on peut en choisir un générateur α . Alors $\{1 \otimes 1, 1 \otimes \alpha, \dots, 1 \otimes \alpha^{n-1}\}$ est une l -base de $l \otimes_k l$. Notons $G = \{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$. Le déterminant de u dans les bases convenables est le déterminant de Vandermonde $\det(\sigma_i(\alpha)^j) = \prod_{i < j} (\sigma_j(\alpha) - \sigma_i(\alpha))$. Il est non nul.
- si on choisit un polynôme $P \in k[t]$ dont l est le corps de décomposition, alors l est engendré par une racine β de P et ses conjugués $\sigma_i(\beta)$. Le morphisme u s'identifie au morphisme :

$$l \otimes_k l \simeq l[t]/(P(t)) \simeq \prod_{\sigma \in G} l[t]/(t - \sigma(\beta)) \simeq \prod_{\sigma \in G} l.$$

Considérons le k -schéma $X = \text{Spec}(l)$. Il résulte de ce qui précède que $X \otimes_k l = \text{Spec}(l \otimes_k l) = \coprod_{\sigma \in G} \text{Spec}(l)$. Ainsi X est connexe, mais pas géométriquement connexe. Ici aussi, les extensions séparables de corps causent la perte du caractère connexe par extension de corps.

5.5.9 Définition. Soit X un schéma sur un corps k . On dit que X peut être défini sur un sous-corps $k_0 \subset k$ s'il existe un k_0 -schéma X_0 et un isomorphisme de k -schémas $X \simeq X_0 \otimes_{k_0} k$.

Le k_0 -schéma X_0 , s'il existe, n'est pas unique en général. Voici un exemple.

5.5.10 Exemple. La droite projective complexe $X = \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ peut être définie sur \mathbb{R} d'au moins deux manières. Notons $X_0 \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ la conique projective plane réelle d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 0$. On a $X_0 \not\simeq \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ car la conique X_0 ne possède pas de point \mathbb{R} -rationnel. Il est clair que $X \simeq \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ et nous allons voir que l'on a aussi $X \simeq X_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. Ce fait classique provient de la paramétrisation des coniques ayant un point rationnel. Plus précisément, si P est un point rationnel d'une conique

projective plane C , les droites D_t passant par P sont paramétrées par les points $t = (u : v)$ d'une droite projective. Elles intersectent la conique en un unique point Q distinct de P , sauf la tangente en P pour laquelle on prend $Q = P$. Ceci fournit l'isomorphisme désiré. Explicitement, en prenant le point \mathbb{C} -rationnel $P = (i : 1 : 0)$ dans la conique $X_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, on obtient l'isomorphisme :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 &\longrightarrow X_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \\ (u : v) &\longmapsto (i(u^2 + v^2) : u^2 - v^2 : 2uv) \\ (y - ix : z) &\longleftarrow (x : y : z) \end{aligned}$$

La présence inévitable du i montre qu'un isomorphisme $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1 \rightarrow X_0$ peut être défini après changement de base à \mathbb{C} , alors qu'il n'en existe pas sur \mathbb{R} .

Introduction à la Géométrie Algébrique. Le langage des schémas

Cours du 29 novembre 2016

5.6 Schémas arithmétiques

Nous donnons deux exemples de schémas sur $\text{Spec}(\mathbb{Z})$ qui permettent d'avoir un bref aperçu sur :

- la manière dont la théorie algébrique des nombres se plonge dans le monde des schémas ;
- la notion de « famille d'objets » en géométrie algébrique et le rôle de la platitude.

5.6.1 Un anneau d'entiers algébriques. Considérons le corps de nombres $K = \mathbb{Q}(\sqrt{3})$, son anneau d'entiers $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ et le morphisme $f : X = \text{Spec}(\mathcal{O}_K) \rightarrow S = \text{Spec}(\mathbb{Z})$. En théorie algébrique des nombres, on cherche à comprendre comment les premiers $p \in \mathbb{Z}$ se décomposent dans \mathcal{O}_K , ce qui revient à étudier l'idéal $p\mathcal{O}_K$. Comme $\mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K = \mathcal{O}_K \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{F}_p$, on voit que ceci revient à étudier les fibres de f . L'invariant le plus important est le *discriminant* de K , défini en général par $\text{disc}(K) = (\det(\sigma_i(\alpha_j)))^2$, où $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ est une \mathbb{Z} -base de \mathcal{O}_K et $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ désignent les plongements $K \hookrightarrow \mathbb{C}$ (ou les éléments du groupe de Galois de K/\mathbb{Q} , dans le cas galoisien). Ici on prend $\{1, \sqrt{3}\}$ pour \mathbb{Z} -base et $\{\text{id}, \sigma : \sqrt{3} \mapsto -\sqrt{3}\}$ pour liste de plongements complexes. On obtient :

$$\text{disc}(K) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{3} & -\sqrt{3} \end{vmatrix}^2 = 12.$$

Comme dans 5.5.8(3), cette quantité mesure le défaut de bijectivité de l'application :

$$(\star) \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}[\sqrt{3}] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[\sqrt{3}] & \longrightarrow & \mathbb{Z}[\sqrt{3}] \times \mathbb{Z}[\sqrt{3}] \\ a \otimes b & \longmapsto & (ab, a\sigma b). \end{array}$$

En l'occurrence, après localisation en 12 c'est-à-dire après tensorisation par $\mathbb{Z}[1/12]$ celle-ci devient un isomorphisme. C'est ce fait qui est derrière la description géométrique des fibres de $X \rightarrow \text{Spec}(\mathbb{Z})$. Avant de donner cette description, signalons que $\mathbb{Z}[\sqrt{3}] \simeq \mathbb{Z}[X]/(X^2 - 3)$ et que $\text{disc}(K)$ peut aussi se calculer comme le discriminant du polynôme $X^2 - 3$. Il y a trois types de comportements possibles :

- (i) si $p \mid \text{disc}(K)$ i.e. $p = 2$ ou 3 , alors p devient carré dans \mathcal{O}_K . Précisément $2\mathcal{O}_K = (1 + \sqrt{3})^2$ et $3\mathcal{O}_K = (\sqrt{3})^2$. La fibre X_p est le spectre de $\mathbb{F}_p[X]/(X^2)$, c'est un point non réduit de corps résiduel \mathbb{F}_p .
- (ii) si $p > 3$ et 3 est un carré modulo p , le polynôme $X^2 - 3$ se factorise dans \mathbb{F}_p en produit de facteurs de degré 1. Par réciprocity quadratique, ce cas se produit lorsque p est congru à 1 ou 11 modulo 12. La fibre X_p est réunion de deux points réduits, \mathbb{F}_p -rationnels.
- (iii) si $p > 3$ et 3 n'est pas carré modulo p , le polynôme $X^2 - 3$ est irréductible dans \mathbb{F}_p . Par réciprocity quadratique, ce cas se produit lorsque p est congru à 5 ou 7 modulo 12. Ici la fibre X_p est composée d'un seul point \mathbb{F}_{p^2} -rationnel.

L'apparition d'éléments nilpotents dans la fibre dans le cas (i) est typique du comportement de ramification. La situation est géométriquement très différente de ce qu'il se produit dans les deux derniers cas. Les cas (ii) et (iii) présentent une différence arithmétique qui se manifeste dans les corps résiduels. En revanche leur géométrie est essentiellement la même, au sens où après une extension finie de la base destinée à s'affranchir des contraintes arithmétiques, les fibres sont des réunions de deux points réduits. C'est ce que montre l'application (\star).

5.6.2 Une famille de coniques. Soit $f = Y^2 - X^2 - 5$ et $X = \text{Spec}(\mathbb{Z}[X, Y]/(f))$. Nous ne développons pas la notion de *lissité* dans ce cours ; contentons-nous pour analyser cet exemple de dire que, comme en géométrie différentielle, le lieu où X est lisse sur \mathbb{Z} est l'ensemble des points x en lesquels la matrice jacobienne $J = (\partial f/\partial X, \partial f/\partial Y)$ est de rang maximum, c'est-à-dire ici 1, ce qui signifie que dans l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$, ou de manière équivalente dans le corps résiduel $\kappa(x)$, l'un des 1-mineurs de J est inversible. Notons $x = [q]$ un point quelconque de X et $s = f(x) = [p]$ où $p = q \cap \mathbb{Z}$. Dans notre exemple, la matrice $J = (2X, 2Y)$ est de rang 1 en $x = [q]$ si et seulement si l'idéal $(2X, 2Y)$ est inclus dans q . Il est équivalent de dire que $2 \in q$ ou que $(X, Y) \subset q$. Dans le deuxième cas, l'équation f implique que $5 \in q$. On peut résumer ainsi :

- la fibre de X en $p = 2$ est singulière, son équation $f = (Y + X + 1)^2$ est celle d'une droite double (d'épaisseur 2) dans $\mathbb{A}_{\mathbb{F}_2}^2$,
- la fibre de X en $p = 5$ est singulière, son équation $f = (Y - X)(Y + X)$ est celle de la réunion de deux droites avec une intersection transverse en $x = y = 0$ dans $\mathbb{A}_{\mathbb{F}_5}^2$,
- les autres fibres, y compris la fibre générique, sont des coniques lisses.

6 Morphismes

Dans cette section, nous définissons quelques grandes classes de morphismes de schémas reliées principalement à des propriétés de séparation, finitude et compacité. Pour des raisons de temps et de place, nous ne développerons pas l'étude des propriétés de régularité (platitude, lissité, non ramification, caractère étale). Avant de commencer, faisons deux remarques générales.

La première remarque concerne le lien avec le point de vue relatif, mis en avant par Grothendieck et aperçu lors de l'étude des produits fibrés et des exemples de schémas arithmétiques comme la famille de coniques 5.6.2. Son principe est de mettre l'accent sur les objets sur une base S , c'est-à-dire les morphismes $X \rightarrow S$, plutôt que sur les schémas individuels. La logique et le développement harmonieux de ce point de vue nécessitent de développer des analogues relatifs de certaines notions absolues des schémas (comme le caractère affine, la quasi-compacité...). Une règle simple sera vérifiée : un schéma X possèdera une propriété « absolue » si et seulement si le morphisme $X \rightarrow \text{Spec}(\mathbb{Z})$ possède la propriété « relative » correspondante.

La seconde remarque concerne les qualités de stabilité, ou de permanence, des différentes propriétés des morphismes. Nous donnons quatre exemples. Soit P une propriété que peut avoir ou non un morphisme de schémas.

- On dit que P est *stable par composition* si pour tout couple de morphismes $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow S$ qui possèdent P , la composée $g \circ f : X \rightarrow S$ possède P .
- On dit que P est *stable par changement de base* si pour tout morphisme $f : X \rightarrow S$ qui possède P , pour tout changement de base $S' \rightarrow S$, le morphisme $f' : X' \rightarrow S'$ possède P (ici $X' := X \times_S S'$ et f' est la projection).

- On dit que P est *stable par localisation à la source* si pour tout morphisme $f : X \rightarrow S$ qui possède P , et tout ouvert $X_i \subset X$, le morphisme $f|_{X_i} : X_i \rightarrow S$ possède P . On dit que P est *locale à la source* si pour tout morphisme $f : X \rightarrow S$, et pour tout recouvrement ouvert $\{X_i\}$ de X , le morphisme f possède P si et seulement si chaque restriction $f|_{X_i} : X_i \rightarrow S$ possède P .
- On dit que P est *stable par localisation au but* si pour tout morphisme $f : X \rightarrow S$ qui possède P , et tout ouvert $S_i \subset S$, le morphisme $f|_{f^{-1}(S_i)} : f^{-1}(S_i) \rightarrow S_i$ possède P . On dit que P est *locale au but* si pour tout morphisme $f : X \rightarrow S$, et pour tout recouvrement ouvert $\{S_i\}$ de S , le morphisme f possède P si et seulement si chaque restriction $f|_{f^{-1}(S_i)} : f^{-1}(S_i) \rightarrow S_i$ possède P .

Pour chacune des propriétés introduites dans cette section, on peut se poser la question de savoir si elle est stable par composition, changement de base, localisation à la source ou au but. Nous donnerons parfois un énoncé explicite, et parfois un énoncé sous forme d'exercice. Parfois aussi nous omettrons de poser la question, et la lectrice pourra se la poser pour elle-même.

6.1 Morphismes séparés

On peut consulter la page [https://fr.wikipedia.org/wiki/Axiome_de_séparation_\(topologie\)](https://fr.wikipedia.org/wiki/Axiome_de_séparation_(topologie)) pour un rappel sur les différents axiomes de séparation. Rappelons quelques propriétés d'un espace topologique séparé (*Hausdorff space* en anglais). Elles sont toutes équivalentes et peuvent servir de définition de la notion de séparation :

- (i) pour tous points distincts $x, y \in X$ il existe des voisinages ouverts disjoints $U \ni x$ et $V \ni y$,
- (ii) la diagonale Δ_X est fermée dans $X \times X$,
- (iii) pour tout espace topologique Y et toute application continue $f : Y \rightarrow X$, le graphe $\Gamma_f = \{(y, f(y)); y \in Y\}$ est fermé dans $X \times Y$,
- (iv) pour tout espace topologique Y et toute paire d'applications continues $f, g : Y \rightarrow X$, l'égalisateur $\text{egal}(f, g) = \{y \in Y; f(y) = g(y)\}$ est fermé dans Y .

La propriété (i) est la plus familière; c'est l'axiome T_2 . La démonstration du fait qu'elle est équivalente aux trois autres utilise le fait que la topologie sur $X \times X$ est la topologie produit, avec pour base d'ouverts les produits $U \times V$ d'ouverts de X . Ceci n'a pas lieu dans le monde des variétés algébriques ou des schémas (dans le plan \mathbb{A}_k^2 , l'ouvert complémentaire d'une courbe qui n'est ni horizontale ni verticale ne contient aucun ouvert produit non trivial). En conséquence, la caractérisation (i) de la séparation est pratiquement inutile pour les schémas. En revanche les autres caractérisations sont pertinentes; nous utiliserons (ii).

6.1.1 Lemme. *Soit $f : X \rightarrow S$ un morphisme de schémas et $\Delta_{X/S} : X \rightarrow X \times_S X$ la diagonale. Alors $\Delta_{X/S}$ est :*

- (1) *une immersion;*
- (2) *une immersion fermée si X et S sont affines.*

Démonstration : Démontrons d'abord (2). Si $X = \text{Spec}(A)$ et $S = \text{Spec}(R)$, la diagonale est déterminée par le morphisme d'anneaux $A \otimes_R A \rightarrow A$ qui envoie $a \otimes 1$ sur a et $1 \otimes a'$ sur a' . C'est

le morphisme de multiplication, qui est surjectif. Passons à (1). Soit $x \in X$. Soit U un voisinage ouvert affine de $f(x)$ et V un voisinage ouvert affine de x inclus dans $f^{-1}(U)$. Clairement l'image de la diagonale est incluse dans les ouverts de la forme $V \times_U V$. De plus $\Delta_{X/S|V} : V \rightarrow V \times_U V$ est une immersion fermée d'après le cas (2). Ceci conclut. \square

6.1.2 Définition. On dit qu'un morphisme de schémas $f : X \rightarrow S$ est *séparé* si la diagonale relative $\Delta_{X/S} : X \rightarrow X \times_S X$ est une immersion fermée. On dit aussi que X est un S -schéma séparé.

6.1.3 Proposition. *Les morphismes séparés sont stables par composition, changement de base, et localisation au but.*

Démonstration : Exercice. \square

6.1.4 Définition. On dit qu'une immersion ouverte $i : U \hookrightarrow X$ est *schématiquement dense dans X* si le morphisme de restriction des fonctions $i^\# : \mathcal{O}_X \rightarrow i_*\mathcal{O}_U$ est injectif.

6.1.5 Proposition. *Soit X un S -schéma séparé.*

(1) *Pour tout morphisme de S -schémas $f : Y \rightarrow X$, le morphisme graphe $\Gamma_f := (\text{id}, f) : Y \rightarrow Y \times_S X$ est une immersion fermée.*

(2) *Pour toute paire de S -morphisms $f, g : Y \rightarrow X$, l'égalisateur $\text{egal}(f, g) = Y \times_{(f,g), X \times_S X, \Delta} X$ est un sous-schéma fermé de Y .*

(3) *Pour toute paire de S -morphisms $f, g : Y \rightarrow X$ qui coïncident sur un ouvert schématiquement dense $U \subset Y$, on a $f = g$.*

Démonstration : (1) Le graphe $\Gamma_f : Y \rightarrow Y \times_S X$ s'obtient à partir de la diagonale $\Delta_{X/S} : X \rightarrow X \times_S X$ par changement de base par le morphisme $(f \times \text{id}) : Y \times_S X \rightarrow X \times_S X$. Le résultat découle donc du fait que les immersions fermées sont stables par changement de base.

(2) Par définition $\text{egal}(f, g)$ s'obtient par un changement de base de la diagonale.

(3) Soit i l'immersion fermée de $Z = \text{egal}(f, g)$ dans Y . Soit $j : U \hookrightarrow Y$ l'immersion ouverte. Par hypothèse j se factorise par un morphisme $k : U \rightarrow Z$ (qui est nécessairement une immersion), i.e. $j = ik$. Comme U est schématiquement dense (définition 6.1.4), le morphisme composé

$$\mathcal{O}_Y \xrightarrow{i^\#} i_*\mathcal{O}_Z \xrightarrow{i_*k^\#} j_*\mathcal{O}_U = i_*k_*\mathcal{O}_U$$

est injectif. On en déduit que $\mathcal{O}_Y \rightarrow i_*\mathcal{O}_Z$ est injectif, et comme il est surjectif c'est un isomorphisme de faisceaux. Donc $Z \simeq Y$, ce qui montre que $f = g$. \square

6.1.6 Exercice. Soit X la droite affine avec origine dédoublée, sur un corps de base k (voir 3.1.6). Montrez que X n'est pas séparé sur k . Donnez un exemple de deux morphismes de k -schémas $f, g : Y \rightarrow X$ qui sont distincts mais coïncident sur un ouvert schématiquement dense de Y .

Introduction à la Géométrie Algébrique. Le langage des schémas

Cours du 6 décembre 2016

6.2 Morphismes affines et quasi-compacts

6.2.1 Définition. On dit qu'un morphisme de schémas $f : X \rightarrow S$ est *affine* si la préimage de tout ouvert affine de S est un ouvert affine de X .

6.2.2 Proposition. *Les morphismes affines sont stables par composition, changement de base, et localisation au but.*

Démonstration : Exercice. □

Une immersion fermée est affine. Tout sous-schéma fermé de \mathbb{A}_S^n est affine sur S .

6.2.3 Exercice. Montrez que $f : X \rightarrow S$ est affine si et seulement s'il existe un recouvrement de S par des ouverts affines S_i tels que $f^{-1}(S_i)$ est affine pour tout i .

6.2.4 Exercice. Donnez un exemple d'immersion ouverte qui n'est pas affine.

On peut maintenant généraliser au cadre relatif l'équivalence de catégories entre anneaux et schémas affines.

6.2.5 Proposition. *Si $f : X \rightarrow S$ est un S -schéma affine, la \mathcal{O}_S -algèbre $\mathcal{A}(X) = f_*\mathcal{O}_X$ est quasi-cohérente. Si \mathcal{A} est une \mathcal{O}_S -algèbre quasi-cohérente, le S -schéma $\text{Spec}(\mathcal{A})$ est affine. Les foncteurs :*

$$\{\mathcal{O}_S\text{-algèbres quasi-cohérentes}\} \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{Spec}} \\ \xleftarrow{\mathcal{A}} \end{array} \{S\text{-schémas affines}\}$$

sont des équivalences de catégories quasi-inverses l'une de l'autre.

Démonstration : Soit $f : X \rightarrow S$ un S -schéma affine. Il suffit de vérifier que $\mathcal{A}(X)$ est quasi-cohérente sur un recouvrement de S par des ouverts affines $S_i = \text{Spec}(R_i)$, d'après 4.2.8. Notons $X_i = f^{-1}(S_i)$ qui est un schéma affine, et $f_i : X_i \rightarrow S_i$ la restriction de f . Par définition de $f_*\mathcal{O}_X$ on voit que $\mathcal{A}(X)|_{S_i} = f_{i,*}\mathcal{O}_{X_i}$, qui est une algèbre quasi-cohérente d'après l'exercice 4.2.11. Soit \mathcal{A} une \mathcal{O}_S -algèbre quasi-cohérente et $f : X = \text{Spec}(\mathcal{A}) \rightarrow S$. Alors, par construction du spectre d'une \mathcal{O}_S -algèbre, pour tout ouvert affine $U \subset S$ on a $f^{-1}(U) = \text{Spec}(\mathcal{A}(U))$ qui est un schéma affine. Le fait que les deux foncteurs sont des équivalences quasi-inverses est laissé au lecteur. □

6.2.6 Définition. Soit $f : X \rightarrow S$ un morphisme de schémas. On dit que f est *quasi-compact* si la préimage de tout ouvert quasi-compact de S est un ouvert quasi-compact de X .

6.2.7 Proposition. *Les morphismes quasi-compacts sont stables par composition, changement de base, et localisation au but.*

Démonstration : Exercice. □

6.2.8 Exercice. Montrez que $f : X \rightarrow S$ est quasi-compact si et seulement s'il existe un recouvrement de S par des ouverts affines S_j tels que $f^{-1}(S_j)$ est quasi-compact pour tout j .

Nous terminons par un résultat sur l'image des morphismes quasi-compacts, qui nous sera utile dans l'étude des morphismes propres.

6.2.9 Proposition. *Soit $f : X \rightarrow S$ un morphisme quasi-compact. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (1) $f(X)$ est fermé,
- (2) $f(X)$ est stable par spécialisation.

Démonstration : On sait que (1) \Rightarrow (2), montrons que (2) \Rightarrow (1). Il suffit de montrer que $f(X) \cap U$ est fermé dans U , pour tout ouvert affine U de S . Comme $f(X) \cap U$ est stable par les spécialisations dans U , quitte à changer S en U on s'est ramené au cas où S est affine. Comme f est quasi-compact, le schéma X est alors recouvert par un nombre fini d'ouverts affines $X_i = \text{Spec}(A_i)$. L'image de f est égale à l'image de la composée $X_1 \amalg \cdots \amalg X_n \rightarrow X \rightarrow S$. Comme $X_1 \amalg \cdots \amalg X_n$ est le schéma affine spectre de $A_1 \times \cdots \times A_n$, on s'est ramené au cas où X est affine.

Supposons donc que $S = \text{Spec}(R)$ et $X = \text{Spec}(A)$. Soit $s = [p]$ un point dans l'adhérence de $T := f(X)$, c'est-à-dire que $D(g) \cap T \neq \emptyset$ pour tout $g \in R$, $g \notin p$. Comme $D(g) \cap T$ est l'image de la restriction de f à $X_g = D(g1_A) = \text{Spec}(A_g)$, on déduit que A_g est non nul, ou encore que $1 \neq 0$ dans A_g . Soit A_p le localisé de A par rapport à la partie multiplicative $R \setminus p$. On a $A_p = \varinjlim_{g \notin p} A_g$. On a encore $1 \neq 0$ dans A_p , donc cet anneau est non nul. L'image de n'importe quel point de $\text{Spec}(A_p)$ par le composé $\text{Spec}(A_p) \rightarrow \text{Spec}(A) \rightarrow \text{Spec}(R)$ est un idéal premier p' inclus dans p . Donc $s = [p]$ est spécialisation de $s' = [p'] \in T$. Comme T est stable par spécialisation, on conclut que $s \in T$. □

6.3 Morphismes de type fini, morphismes finis

6.3.1 Définition. Soit $f : X \rightarrow S$ un morphisme de schémas. On dit que f est *localement de type fini* si pour tout ouvert affine $U = \text{Spec}(R)$ de S et pour tout ouvert affine $V = \text{Spec}(A)$ de $f^{-1}(U)$, le morphisme $R \rightarrow A$ fait de A une R -algèbre de type fini. On dit que f est *de type fini* s'il est quasi-compact et localement de type fini.

6.3.2 Proposition. *Les morphismes localement de type fini sont stables par composition, changement de base, localisation à la source et localisation au but. Les morphismes de type fini sont stables par composition, changement de base, et localisation au but.*

Démonstration : Exercice. □

6.3.3 Exercice. Montrez que $f : X \rightarrow S$ est localement de type fini si et seulement s'il existe un recouvrement de S par des ouverts affines $S_j = \text{Spec}(R_j)$ et un recouvrement de X par des ouverts affines $X_{i,j} = \text{Spec}(A_{i,j})$ tels que $f(X_{i,j}) \subset S_j$ et que $A_{i,j}$ est une R_j -algèbre de type fini.

6.3.4 Définition. On dit qu'un morphisme de schémas $f : X \rightarrow S$ est *fini* si pour tout ouvert affine $U = \text{Spec}(R)$ de S , la préimage $V = f^{-1}(U)$ est un ouvert affine $V = \text{Spec}(A)$ et le morphisme $R \rightarrow A$ fait de A un R -module de type fini.

On notera bien que l'on demande que A soit R -module de type fini (on dit souvent simplement R -module *fini*), et non pas R -algèbre de type fini. On dit souvent que A est une R -algèbre *finie*.

6.3.5 Proposition. *Les morphismes finis sont stables par composition, changement de base, et localisation au but.*

Démonstration : Exercice. □

6.3.6 Exercice. Montrez qu'une immersion ouverte est localement de type fini. Donnez un exemple d'immersion ouverte qui n'est pas quasi-compacte. Montrez qu'une immersion fermée est de type fini.

6.3.7 Proposition. *Tout morphisme fini est affine et à fibres finies (ensemblément).*

Démonstration : Un morphisme fini $f : X \rightarrow S$ est affine par définition. Comme une R -algèbre finie est clairement de type fini comme algèbre, on voit que f est aussi de type fini. Pour voir qu'il est quasi-fini, on se ramène au cas affine et il suffit de montrer que pour toute R -algèbre finie A , et pour tout corps résiduel $R \rightarrow \kappa$, le schéma $\text{Spec}(A \otimes_R \kappa)$ est ensemblistement fini. Soient x_1, \dots, x_r des générateurs de A comme R -module. Leurs images dans $A \otimes_R \kappa$ l'engendrent comme κ -espace vectoriel. En particulier $A \otimes_R \kappa$ est un anneau artinien, produit direct d'un nombre fini d'anneaux locaux artiniens dont le spectre est un point. Ceci conclut. □

6.4 Morphismes propres

La notion relative de compacité en topologie est celle d'application *propre*, ce qui désigne (au moins dans le cadre des espaces séparés localement compacts) une application continue telle que la préimage de tout compact est un compact. De même que pour la notion de séparation, la notion de compacité ne peut pas être transposée trop naïvement en géométrie algébrique. Par exemple, la définition « séparé et quasi-compact » ne suffit pas car l'espace affine \mathbb{A}_k^n sur un corps vérifie ces conditions sans posséder aucune des propriétés de finitude que l'on attend des objets compacts.

En fait, la bonne notion topologique de propreté est celle d'application continue universellement fermée (sans hypothèse localement compacte), comme on peut le lire dans Bourbaki, *Topologie Générale*, chap. I, § 10, no 3, prop. 7. On s'inspire de cette définition pour obtenir une notion de propreté fructueuse en géométrie algébrique.

6.4.1 Définition. On dit qu'un morphisme de schémas $f : X \rightarrow S$ est *universellement fermé* si pour tout $S' \rightarrow S$, le morphisme $f' : X' = X \times_S S' \rightarrow S'$ obtenu après changement de base est fermé. On dit qu'un morphisme de schémas $f : X \rightarrow S$ est *propre* s'il est séparé, de type fini, et universellement fermé.

6.4.2 Proposition. *Les morphismes universellement fermés, resp. propres, sont stables par composition, changement de base, et localisation au but.*

Démonstration : Exercice. □

Voici un exemple relativement facile de morphisme propre.

6.4.3 Théorème. *Tout morphisme fini est propre.*

Démonstration : Il s'agit d'une formulation géométrique du théorème suivant de Cohen et Seidenberg (voir [Ei], prop. 4.15) : *pour toute extension entière d'anneaux $R \rightarrow A$, tout premier $p \subset R$ et tout idéal $I \subset A$ tel que $I \cap R \subset p$, il existe un premier $q \subset A$ tel que $q \cap R = p$.* On rappelle qu'un morphisme d'anneaux $R \rightarrow A$ est *entier* si tout élément $x \in S$ est racine d'un polynôme unitaire non nul à coefficients dans R . D'après le théorème de Cayley-Hamilton ([Ei], th. 4.3), toute R -algèbre finie est entière et nous pourrions donc appliquer le théorème de Cohen-Seidenberg. Passons à la preuve du théorème. Soient $f : X \rightarrow S$ un morphisme fini, $Y \subset X$ un fermé, et $T = f(Y)$ son image ensembliste. Pour montrer que T est fermé, il suffit de le faire localement sur S . On peut donc remplacer S par un ouvert affine $U = \text{Spec}(R)$ et X par la préimage, qui est un ouvert affine $f^{-1}(U) = \text{Spec}(A)$ puisque f est affine. Alors $Y = V(I)$ pour un certain idéal I . Montrons que $f(Y) = V(I \cap R)$. Il s'agit de démontrer l'énoncé algébrique suivant : les premiers $p \subset R$ tels que $p = q \cap R$ pour un certain premier $q \subset A$ contenant I sont exactement les premiers contenant $I \cap R$. L'inclusion directe est immédiate et l'inclusion réciproque est le théorème de Cohen-Seidenberg. Nous obtenons ainsi que f est fermé. De plus, le morphisme $f' : X' \rightarrow S'$ déduit de f par un changement de base $S' \rightarrow S$ est encore fini, donc fermé d'après ce qui précède. Ainsi f est universellement fermé. (Et la preuve montre d'ailleurs que le résultat est vrai aussi pour les morphismes *entiers*, i.e. les $f : X \rightarrow S$ tels que pour tout ouvert affine $U = \text{Spec}(R)$ de S , la préimage $V = f^{-1}(U)$ est un ouvert affine $V = \text{Spec}(A)$ et le morphisme $R \rightarrow A$ fait de A une R -algèbre entière.) □

6.5 Critères valuatifs

6.5.1 Préliminaires sur les anneaux de valuation. On trouvera dans [Mat], §§ 10-11 les faits suivants. Rappelons d'abord qu'un *anneau de valuation* est un anneau intègre A tel que pour tout élément non nul x du corps de fractions K , on a $x \in A$ ou $x^{-1} \in A$. Dans un anneau de valuation, l'ensemble des idéaux est totalement ordonné par inclusion. En particulier, un anneau de valuation est un anneau local. Un *anneau de valuation discrète* est un anneau de valuation dont l'idéal maximal est principal. Dans un tel anneau, on appelle *uniformisante* un générateur de l'idéal maximal, c'est-à-dire un élément premier de A . D'après [Mat], th. 11.2, les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) A est un anneau de valuation discrète,
- (ii) A est un anneau local principal qui n'est pas un corps,
- (iii) A est un anneau local noethérien de dimension > 0 et son idéal maximal est principal,
- (iv) A est un anneau local noethérien de dimension 1 normal.

Les anneaux $k[X]_{(X)}$, $k[[X]]$ avec k un corps, $\mathbb{Z}_{(p)}$, \mathbb{Z}_p sont des exemples. Si $A \subset B$ est une inclusion d'anneaux locaux, on dit que B domine A si et seulement si $m_B \cap A = m_A$. Il est équivalent de dire que $m_A B \subset m_B$, on encore que l'inclusion $A \hookrightarrow B$ est un morphisme d'anneaux locaux, ou encore que le morphisme $\text{Spec}(B) \rightarrow \text{Spec}(A)$ envoie le point fermé sur le point fermé.

6.5.2 Lemme. *Soit A_0 un anneau local intègre noethérien de corps de fractions K_0 . Soit K/K_0 une extension de corps de type fini. Alors, il existe un anneau de valuation discrète A de corps de fractions K et qui domine A_0 .*

Démonstration : Voir [GW], lemma 15.6. □

6.5.3 Lemme. *Soit A un anneau de valuation de corps de fractions K . Soit $A \subset B \subsetneq K$ un sous-anneau strict de K , local, qui domine A . Alors $B = A$.*

Démonstration : Soit $x \in B$ un élément non nul. Comme $K = \text{Frac}(A)$, on peut écrire $x = r/s$ avec $r, s \in A$. Comme l'ensemble des idéaux de A est totalement ordonné, on a soit $rA \subset sA$, soit $sA \subset rA$. Dans le premier cas, il existe $t \in A$ tel que $r = st$. Alors $x = r/s = t \in A$. Dans le second cas, il existe $t \in A$ tel que $s = rt$. Alors $t \notin m_A$ car sinon $1 = rt/s = tx \in m_A B \subset m_B$, ce qui est impossible. Comme A est un anneau de valuation, on déduit que $t \in A^\times$ donc $x = 1/t \in A$. □

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer et démontrer les critères valuatifs de séparation et de propreté. Nous donnons une version valable sur un schéma de base noethérien pour nous limiter à la manipulation d'anneaux de valuation *discrète*, mais en utilisant des versions non noethériennes de 6.5.2 et 6.5.3 avec des anneaux de valuation généraux, on démontrerait sans beaucoup plus de mal les critères sur une base S quelconque.

6.5.4 Théorème (critère valuatif de séparation) Soit S un schéma noethérien, et soit $f : X \rightarrow S$ un morphisme de schémas de type fini. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :

- (1) f est séparé,
- (2) pour tout anneau de valuation discrète A de corps de fractions K et tout carré commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Spec}(K) & \longrightarrow & X \\
 \downarrow & \nearrow \exists! & \downarrow f \\
 \text{Spec}(A) & \longrightarrow & S,
 \end{array}$$

il existe au plus un morphisme $\text{Spec}(A) \rightarrow X$ qui rend tout le diagramme commutatif.

Le morphisme $\text{Spec}(K) \rightarrow \text{Spec}(A)$ du diagramme est bien sûr celui induit par l'inclusion $A \subset K$.

Avant de passer à la démonstration, rappelons que dans un schéma intègre X , de point générique η , l'anneau local $K := \mathcal{O}_{X,\eta} = \kappa(\eta)$ est un corps. Tous les anneaux de fonctions $\mathcal{O}_X(U)$ d'ouverts non vides, et tous les anneaux locaux $\mathcal{O}_{X,x}$, sont intègres et de corps de fractions K . On appelle K les *corps de fonctions méromorphes* de X .

Démonstration : (1) \Rightarrow (2). Soit π une uniformisante de A , alors $K = A[1/\pi]$ donc $\text{Spec}(K) \subset \text{Spec}(A)$ s'identifie à l'ouvert $D(\pi)$, qui est schématiquement dense. Si $f : X \rightarrow S$ est séparé, il découle donc de la proposition 6.1.5 que deux S -morphisms $u, v : \text{Spec}(A) \rightarrow X$ qui coïncident sur $\text{Spec}(K)$ sont égaux.

(2) \Rightarrow (1). Il suffit de montrer que la diagonale $\Delta : X \rightarrow X \times_S X$ est une immersion fermée. Pour cela il suffit de montrer que l'image de Δ est fermée, cf exercice 4.3.9. Comme S est noethérien et f de type fini, alors X ainsi que $X \times_S X$ sont noethériens. Il en découle que Δ est quasi-compact, donc il suffit de montrer que $\Delta(X)$ est stable par spécialisation, d'après 6.2.9. Soit $t \in \Delta(X)$ un point, et $t \rightsquigarrow s$ une spécialisation. Soit Z le sous-schéma fermé réduit de support l'adhérence du point t , cf 5.2.4. C'est un schéma intègre, dont tous les anneaux locaux des points partagent le même corps de fractions, égal au corps résiduel $K = \kappa(t)$ de t . En particulier, on a l'inclusion $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{Z,s} \subset K$. Dans cette situation, le lemme 6.5.2 affirme qu'il existe un anneau de valuation discrète $A \subset K$ qui domine \mathcal{O} , i.e. $\mathcal{O} \subset A$ et $m_A \cap \mathcal{O} = m_{\mathcal{O}}$. Ceci signifie que le morphisme

$$g : \text{Spec}(A) \rightarrow \text{Spec}(\mathcal{O}) \rightarrow Z \rightarrow X \times_S X$$

envoie le point générique sur t et le point fermé sur s . Notons $p_1, p_2 : X \times_S X \rightarrow X$ les deux projections et $u_i = p_i \circ g$ pour $i = 1, 2$. Comme $t \in \Delta(X)$, les deux morphismes u_1, u_2 sont égaux en restriction à l'ouvert $\text{Spec}(K) \subset \text{Spec}(A)$. D'après la condition (2), ces morphismes sont égaux, ce qui signifie que g se factorise par la diagonale de X et $s \in \Delta(X)$. \square

6.5.5 Théorème (critère valuatif de propreté) Soit S un schéma noethérien, et soit $f : X \rightarrow S$ un morphisme de schémas séparé et de type fini. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :

- (1) f est propre,
- (2) pour tout anneau de valuation discrète A de corps de fractions K et tout carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec}(K) & \longrightarrow & X \\ \downarrow & \searrow \exists! & \downarrow f \\ \text{Spec}(A) & \longrightarrow & S \end{array}$$

il existe un unique morphisme $\text{Spec}(A) \rightarrow X$ qui rend tout le diagramme commutatif.

Démonstration : (1) \Rightarrow (2). Pour tout carré commutatif comme dans (2), on notera $X_A = X \times_S \text{Spec}(A)$. On dispose d'un diagramme :

$$\begin{array}{ccccc} \text{Spec}(K) & \longrightarrow & X_A & \longrightarrow & X \\ & \searrow & \downarrow f_A & & \downarrow f \\ & & \text{Spec}(A) & \longrightarrow & S \end{array}$$

On voit qu'il suffit de trouver une section $\text{Spec}(A) \rightarrow X_A$ du morphisme f_A , car la composition avec $X_A \rightarrow X$ fournira la flèche pointillée recherchée. En d'autres termes, quitte à remplacer X par X_A on peut supposer que $S = \text{Spec}(A)$ ce que nous faisons désormais. Soit x le point image de $\text{Spec}(K) \rightarrow X$.

Le point $\eta = f(x)$ est le point générique de $\text{Spec}(A)$, on a donc les inclusions $K = \kappa(\eta) \hookrightarrow \kappa(x) \hookrightarrow K$ ce qui montre que $\kappa(x) = K$. Soit Z l'adhérence de x dans X , muni de la structure de sous-schéma fermé réduit. C'est un schéma intègre, de corps de fractions (le corps de fractions commun à tous les ouverts affines non vides de Z) égal à K . Comme f est universellement fermé, l'image de Z dans $S = \text{Spec}(A)$ est un fermé donc égal à S entier. Ceci implique qu'il existe $z \in Z$ dont l'image par f est égale au point fermé $s \in S$. On a une inclusion de sous-anneaux locaux $A = \mathcal{O}_{S,s} \hookrightarrow \mathcal{O}_{Z,z}$ de K . Comme A est un anneau de valuation, il est maximal pour la relation de domination (lemme 6.5.3) donc $A = \mathcal{O}_{Z,z}$. Ceci fournit la section recherchée $\text{Spec}(A) = \text{Spec}(\mathcal{O}_{Z,z}) \rightarrow Z \hookrightarrow X$.

(2) \Rightarrow (1). On doit montrer que f est universellement fermé. Soit S'/S un morphisme de changement de base et $X' = X \times_S S'$. Considérons un diagramme de la forme :

$$\begin{array}{ccccc} \text{Spec}(K) & \longrightarrow & X' & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow f' & & \downarrow f \\ \text{Spec}(A) & \longrightarrow & S' & \longrightarrow & S. \end{array}$$

Par propriété universelle du produit fibré qui définit X' , le morphisme $\text{Spec}(A) \rightarrow X$ dont la condition (2) affirme l'existence se relève en un morphisme $\text{Spec}(A) \rightarrow X'$. Ceci démontre que $X' \rightarrow S'$ vérifie encore la condition (2). En conséquence, quitte à changer S en S' et X en $X' = X \times_S S'$, pour montrer que $f' : X' \rightarrow S'$ est fermé on peut supposer que $S' = S$. Soit $Z \subset X$ un fermé, vu comme sous-schéma fermé muni de la structure réduite. Soit $W \subset S$ son image par f . D'après la proposition 6.2.9, il suffit de montrer que W est stable par spécialisation. Notons $w = f(z)$ un point de W et soit $w \rightsquigarrow w'$ une spécialisation dans S ; on doit montrer que $w' \in W$. C'est une question topologique; on peut remplacer Z (resp. X) par l'adhérence de z dans Z (resp. dans X), et S par l'adhérence de w dans S , tous munis des structures de sous-schémas réduits. Alors Z et S sont intègres, de corps de fractions $K := \kappa(z)$ et $K_0 := \kappa(w)$. Comme w est une générisation de w' , il appartient au schéma local $S_{w'} = \text{Spec}(\mathcal{O}_{S,w'})$ qui est intègre. D'après le lemme 6.5.2, il existe un anneau de valuation discrète $A \subset K$ qui domine $\mathcal{O}_{S,w'}$. Notons σ le point fermé de $\text{Spec}(A)$; le morphisme $\text{Spec}(A) \rightarrow \text{Spec}(\mathcal{O}_{S,w'})$ l'envoie sur w' . On se trouve avec un diagramme commutatif comme dans la condition (2). Par hypothèse, il existe un morphisme $\text{Spec}(A) \rightarrow X$ qui complète le diagramme, et l'image z' de σ vérifie donc $f(z') = w'$. Ceci termine la démonstration. \square

6.5.6 Corollaire. *Soient S un schéma et n un entier. Alors l'espace projectif \mathbb{P}_S^n est propre sur S .*

Démonstration : Il suffit de montrer que $X = \mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^n$ est propre sur \mathbb{Z} . On sait qu'il est de type fini, car recouvert par les ouverts affines standard qui sont des espaces affines. Il reste à vérifier les critères valuatifs. Considérons un anneau de valuation discrète A de corps de fractions K et un diagramme carré commutatif comme celui présent dans les critères valuatifs. Quitte à remplacer X par $X \otimes_{\mathbb{Z}} A$ on se ramène à la situation suivante :

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec}(K) & \xrightarrow{g} & \mathbb{P}_A^n \\ & \searrow & \downarrow f \\ & & \text{Spec}(A) \end{array}$$

D'après la description des morphismes d'un schéma local vers l'espace projectif (voir 4.5.8), le morphisme g est donné par un $(n + 1)$ -uplet de coordonnées homogènes $(x_0 : \dots : x_n)$ avec $x_i \in K$, l'un au moins d'entre eux étant non nul. On peut multiplier tous les x_i simultanément par un élément $a \in K^\times$ sans changer g . Après choix d'une uniformisante π pour A , un tel élément s'écrit $a = u\pi^n$ avec $u \in A^\times$ et $n \in \mathbb{Z}$. Étendre g en un morphisme défini sur $\text{Spec}(A)$ veut dire trouver a tel que les $y_i = ax_i$ soient dans A , l'un d'entre eux étant inversible. Notons v_i la valuation de x_i et $v = \min(v_i)$. Aux inversibles de A près, l'extension est possible d'une unique manière en prenant $a = \pi^{-v}$. \square

6.6 Deux résultats sur les morphismes de schémas

Les différentes propriétés des morphismes introduites dans la partie 6 sont importantes avant tout parce qu'elles entretiennent des relations entre elles et permettent de dresser un paysage structuré de l'ensemble des morphismes. Nous présentons maintenant sans preuve deux résultats fondamentaux sur la structure des morphismes séparés quasi-compacts, qui illustrent cette réflexion et donneront peut-être à la lectrice / au lecteur l'envie d'en savoir plus.

Considérons la catégorie **QC** des morphismes de schémas $X \rightarrow S$ séparés et quasi-compacts ; elle contient presque tous les schémas sur lesquels on se pose les questions les plus naturelles. Sous une hypothèse faible sur S , le théorème suivant affirme que tout objet de **QC** se factorise en une partie affine et une partie propre.

Théorème de décomposition de Temkin (2011). *Supposons S quasi-séparé (i.e. à diagonale quasi-compacte) et quasi-compact (par exemple noethérien). Alors tout morphisme séparé quasi-compact $X \rightarrow S$ possède une factorisation en un morphisme affine $X \rightarrow Y$ et un morphisme propre $Y \rightarrow S$.*

Notons **A**, resp. **P** la sous-catégorie pleine des morphismes affines, resp. propres. Le théorème de Temkin affirme donc que **A** et **P** engendrent **QC** d'une certaine manière. Pour compléter cette perception, il est utile de connaître $\mathbf{A} \cap \mathbf{P}$ pour savoir à quel point ces deux sous-catégories sont en « somme directe ». La réponse est apportée par le résultat suivant.

Théorème de Chevalley-Grothendieck (1961). *Soit $f : X \rightarrow S$ un morphisme. Les conditions suivantes sont équivalentes : f est fini ; f est propre et affine ; f est propre à fibres finies.*

Si l'on considère les morphismes finis comme « négligeables », on obtient donc une description assez claire. On peut penser à une factorisation $X \rightarrow Y \rightarrow S$ comme à une sorte de suite exacte⁽⁴⁾ et résumer les deux résultats précédents en termes approximatifs en disant qu'on a une extension

$$0 \rightarrow \mathbf{A}' \rightarrow \mathbf{QC}' \rightarrow \mathbf{P}' \rightarrow 0$$

où les « prime » désignent les catégories **A**, **QC**, **P** modulo les morphismes finis. (On peut donner un sens à ces catégories « prime », en revanche la suite exacte n'est qu'une image.)

4. Dans la catégorie des schémas en groupes de type fini sur un corps k , l'analogie avec la suite exacte n'est pas qu'une analogie, en vertu du théorème suivant dû à Barsotti et Chevalley : pour tout k -schéma en groupes de type fini G , il existe une suite exacte de schémas en groupes $1 \rightarrow H \rightarrow G \rightarrow A \rightarrow 1$ avec H affine et distingué, et A propre, lisse et géométriquement connexe sur k . Un tel A est appelé une *variété abélienne* sur k .

Table des matières

1	Contexte et motivation	2
1.1	Constructions fondamentales en géométrie et en théorie des nombres	2
1.2	Variétés algébriques classiques	2
1.3	L'idée des schémas	4
2	Définition des schémas	5
2.1	L'ensemble sous-jacent à un schéma affine	5
2.2	L'espace topologique d'un schéma affine	9
2.3	Interlude 1 : catégories et foncteurs	10
2.4	Interlude 2 : faisceaux	14
2.5	Le faisceau de fonctions d'un schéma affine	17
2.6	Interlude 3 : image directe et image inverse de faisceaux	18
2.7	Définition des schémas et des morphismes de schémas	26
3	Recollement et produits fibrés	28
3.1	Recollement	28
3.2	Schémas relatifs et foncteur de points	32
3.3	L'espace affine $\mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^n$	33
3.4	L'espace projectif $\mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^n$	35
3.5	Produits fibrés	36
4	Modules sur les schémas	41
4.1	Modules sur les espaces annelés	41
4.2	Modules quasi-cohérents sur les schémas	43
4.3	Idéaux quasi-cohérents, sous-schémas	49
4.4	Algèbres quasi-cohérentes	52
4.5	Faisceaux inversibles	55
5	Quelques propriétés, quelques exemples	59
5.1	Fermés irréductibles et points	59
5.2	Schémas réduits et intègres	61
5.3	Schémas noethériens	62
5.4	Variétés classiques	63
5.5	Schémas sur un corps non algébriquement clos	66
5.6	Schémas arithmétiques	70
6	Morphismes	71
6.1	Morphismes séparés	72
6.2	Morphismes affines et quasi-compacts	74
6.3	Morphismes de type fini, morphismes finis	75
6.4	Morphismes propres	76
6.5	Critères valuatifs	77
6.6	Deux résultats sur les morphismes de schémas	81