Introduction à la Géométrie Algébrique. Le langage des schémas

Cours du 15 novembre 2016

Il est important de noter que dans la construction de $\mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}}$, seuls les quotients t_i/t_j interviennent. Ceci a pour conséquence que l'objet important est le uplet $(t_0,\dots,t_n)$ *à multiplication scalaire simultanée par un élément de* $\Gamma(\mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}},\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}}})^\times$ *près*. On note $(t_0:\dots:t_n)$ cette classe d'équivalence et on l'appelle *système de coordonnées homogènes canonique* de $\mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}}$. De même que l'espace affine $\mathbb{A}^n_{\mathbb{Z}}$ vient par construction avec des coordonnées canoniques $(t_1,\dots,t_n)$, l'espace projectif $\mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}}$ vient avec ces coordonnées homogènes. Dans les deux cas, ces coordonnées sont des sections d'un certain fibré en droites : le fibré trivial $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n}$ dans le cas de l'espace affine, et le fibré $\mathcal{O}(1)$ dans le cas de l'espace projectif. Si on préfère, on peut voir ces sections de fibrés comme des morphismes de schémas en utilisant la proposition 4.4.10 qui implique que les sections du $\mathcal{O}_S$-module $\mathscr{F}$ correspondent aux sections du morphisme $\mathbb{V}(\mathscr{F}^\vee)\to S$. Ainsi les coordonnées de $\mathbb{A}^n$ sont-elles des morphismes $\mathbb{A}^n\to\operatorname{Spec}(\operatorname{Sym}(\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n}))=\mathbb{A}^1\times\mathbb{A}^n$, et les coordonnées homogènes de $\mathbb{P}^n$ des morphismes $\mathbb{P}^n\to\operatorname{Spec}(\operatorname{Sym}(\mathcal{O}(1)^\vee)$.

4.5.5 Définition. Soient X un espace annelé, $\mathscr{F}$ un $\mathcal{O}_X$-module, et $(s_i)_{i\in I}$ une famille de sections globales de $\mathscr{F}$. On dit que $\mathscr{F}$ est *engendré par les* s_i si le morphisme naturel $\varphi:\mathcal{O}_X^{(I)}\to\mathscr{F}$, $\varphi(U)((a_i)_{i\in I})=\sum a_is_{i|U}$ est surjectif.

En particulier, il résulte de ce qui précède que le faisceau inversible $\mathcal{O}(1)$ est engendré par les sections $t_0,\dots,t_n$ puisque t_i engendre $\mathcal{O}(1)_{|P_i}$. On obtient donc un morphisme surjectif :

$$\phi:\mathcal{O}_P^{\oplus n+1}\twoheadrightarrow\mathcal{O}(1).$$

Lorsqu'on change les coordonnées homogènes t_i en $u_i=\lambda t_i$ pour un $\lambda\in\Gamma(\mathbb{Z},\mathcal{O}_{\mathbb{Z}})^\times$, le morphisme ϕ est multiplié par λ. C'est pourquoi dans la propriété universelle ci-dessous, c'est la classe de ϕ modulo les scalaires inversibles qui apparaît.

4.5.6 Théorème. *Soit $f:X\to\mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}}$ un morphisme de $\mathbb{Z}$-schémas. Alors $\mathscr{L}=f^*\mathcal{O}(1)$ est un faisceau inversible sur X et $\psi=f^*\phi:\mathcal{O}_X^{\oplus n+1}\twoheadrightarrow\mathscr{L}$ est un morphisme surjectif de $\mathcal{O}_X$-modules. De plus, l'application $f\mapsto(\mathscr{L},\psi)$ induit une bijection fonctorielle en X :*

$$\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(X,\mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}})\xrightarrow{\sim}\left\{\begin{array}{l}(\mathscr{L},\psi)\text{ avec }\mathscr{L}\text{ faisceau inversible sur }X\text{ et}\\ \psi:\mathcal{O}_X^{\oplus n+1}\twoheadrightarrow\mathscr{L}\text{ surjection de }\mathcal{O}_X\text{-modules}\end{array}\right\}\Big/\Gamma(X,\mathcal{O}_X)^\times.$$

Démonstration : Nous nous contenterons de montrer comment on construit une application en sens inverse, et renverrons à [EH], III.2.5 ou [GW], 13.33 pour une preuve complète. Soit $(\mathscr{L},\psi)$ un couple composé d'un faisceau inversible sur X et d'une surjection $\psi:\mathcal{O}_X^{\oplus n+1}\to\mathscr{L}$. Soit s_i l'image par ψ du i-ième vecteur de la base canonique de $\mathcal{O}_X^{\oplus n+1}$. Notons $\mathscr{L}(x)=\mathscr{L}_x\otimes_{\mathcal{O}_{X,x}}\kappa(x)$ et pour chaque i posons

$$X_i=\{x\in X,\ (s_i)_x\neq 0\text{ dans }\mathscr{L}(x)\}.$$

Il s'agit de l'ensemble des points x tels que s_i est un générateur de $\mathscr{L}(x)$, et aussi de $\mathscr{L}_x$, et donc (par Nakayama) de $\mathscr{L}_{|U}$ sur un petit voisinage ouvert U de x. On montre que X_i est un ouvert, et le fait que les sections s_i engendrent $\mathscr{L}$ montre que les X_i recouvrent X. De plus, pour tous $j \neq i$, sur tout ouvert $U \subset X_i$ sur lequel $\mathscr{L}$ est trivial, on peut écrire $s_j = f_{i,j,U} s_i$ pour une certaine fonction $f_{i,j,U} \in \Gamma(U, \mathcal{O}_U)$. Cette fonction est uniquement déterminée ; les $f_{i,j,U}$ se recollent en une fonction $f_{i,j}$ sur X_i. L'application $\mathbb{Z}[t_0/t_i, \dots, t_n/t_i] \to \Gamma(X_i, \mathcal{O}_X)$ qui envoie t_j/t_i sur $f_{i,j}$ définit un morphisme $f_i : U_i \to X_i$ où U_i est le i-ième ouvert standard de $\mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}}$. Les morphismes f_i se recollent en $f_{\mathbb{Z}} : X \to \mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}}$ qui détermine à son tour un unique S-morphisme $f : X \to \mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}}$. □

4.5.7 Remarques. (1) On définit le S-espace projectif de dimension n par $\mathbb{P}^n_S := \mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}} \times S$. Il vérifie une propriété universelle dans la catégorie des S-schémas analogue à la propriété universelle $\mathbb{P}^n\mathbb{Z}$ dans la catégorie des $\mathbb{Z}$-schémas.

(2) Si E est un k-espace vectoriel de dimension finie, on a une bijection entre l'ensemble des hyperplans $F \subset E$ et l'ensemble des classes d'équivalence de surjections $u : E \to G$ où $\dim_k(G) = 1$, pour la relation $u \sim v$ ssi il existe $\lambda \in k^\times$ tel que $v = \lambda u$. Utilisant la variante faisceautique de ces faits, on montre que $\mathrm{Hom}_S(X, \mathbb{P}^n_S) \xrightarrow{\sim} \big\{\mathscr{H} \subset \mathcal{O}_X^{\oplus n+1}$ localement facteur direct de rang $n\big\}$. Les $\mathscr{H}$ qui apparaissent ici correspondent à ce qu'il faut appeler des « hyplerplans » de $\mathcal{O}_X^{\oplus n+1}$. On retrouve le fait que l'espace projectif classifie les hyperplans (ou, c'est la même chose par dualité, les droites) d'un espace vectoriel.

(3) Proposons une reformulation de la propriété universelle. La première phrase du théorème implique que pour tout morphisme de S-schémas $f : X \to \mathbb{P}^n_S$, le faisceau $\mathscr{L} = f^*\mathcal{O}(1)$ est inversible et engendré par les sections $s_i = f^*(t_i)$ pour $i = 0, \dots, n$. (Pour tout morphisme $f : Y \to X$ et tout faisceau de $\mathcal{O}_X$-modules $\mathscr{F}$, on note $f^*(t)$ l'image d'une section locale t de $\mathscr{F}$ par le morphisme d'adjonction $\mathscr{F} \to f_*f^*\mathscr{F}$.) De plus, si les t_i sont multipliées simultanément par une fonction inversible $\lambda \in \Gamma(\mathbb{P}^n_S, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_S})^\times$, alors les s_i sont multipliées simultanément par la fonction inversible $f^\sharp(\lambda) \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)^\times$. Ceci démontre que la classe $\underline{s} = (s_0 : \ldots : s_n)$ pour la relation induite par la multiplication scalaire diagonale par $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)^\times$, ne dépend que de la classe $\underline{t} = (t_0 : \ldots : t_n)$, c'est-à-dire du système de coordonnées homogènes canonique. Il est naturel d'appeler un couple $(\mathscr{L}, \underline{s})$ composé d'un faisceau inversible et d'un uplet de sections globales qui l'engendrent, à multiplication par $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)^\times$ près, un *système de fonctions homogènes sur* X. Alors, le théorème se réécrit comme une bijection fonctorielle :

$$\mathrm{Hom}_S(X, \mathbb{P}^n_S) \xrightarrow{\sim} \big\{\text{systèmes } (\mathscr{L}, \underline{s}) \text{ de } n+1 \text{ fonctions homogènes sur } X\big\}.$$

Un système de fonctions homogènes sur X ne mérite le nom de *coordonnées* que s'il permet de repérer les points de manière aussi précise que ce qu'on attend habituellement de coordonnées. C'est le cas notamment lorsque le morphisme $X \to \mathbb{P}^n_S$ déterminé par $(\mathscr{L}, \underline{s})$ est une immersion. En géométrie algébrique projective, l'une des principales tâches est justement de trouver quand cette situation favorable se produit.

4.5.8 Remarque. Il est instructif de décrire le cas particulier des morphismes $X \to \mathbb{P}^n_S$ lorsque X est un schéma local, car il est très proche de la description classique des points de l'espace projectif. Lorsque $X = \mathrm{Spec}(A)$ est affine, un morphisme surjectif $\psi : \mathcal{O}_X^{\oplus n+1} \twoheadrightarrow \mathscr{L}$ est déterminé par un morphisme surjectif de A-modules $A^{\oplus n+1} \twoheadrightarrow \Gamma(X, \mathscr{L})$. Celui-ci est à son tour déterminé par les $n+1$ images $\ell_0, \dots, \ell_n$ des éléments de la base canonique de $A^{\oplus n+1}$. Si de plus A est un anneau local, alors le seul ouvert de X contenant le point fermé est X lui-même, si bien que tout faisceau inversible est trivial. On a donc un isomorphisme $\Gamma(X,\mathscr{L}) \simeq A$ et notant t un générateur de $\Gamma(X,\mathscr{L})$, on peut écrire $\ell_i = a_i t$ avec $a_i \in A$. On observe que la classe $(a_0 : \ldots : a_n)$ pour l'homothétie par $A^\times$ ne dépend pas du choix du générateur. Enfin, le fait que ψ soit surjectif signifie qu'au moins un des a_i est inversible, donc les points de $\mathbb{P}^n_S$ à valeurs dans A sont en bijection avec les « coordonnées homogènes » usuelles $(a_0 : \ldots : a_n)$, qui sont des uplets avec au moins un a_i inversible à homothétie près.

5 Quelques propriétés, quelques exemples

5.1 Fermés irréductibles et points

Les fermés irréductibles jouent un rôle essentiel pour comprendre la topologie d'un schéma ; nous allons décrire leur relation avec les points. Soulignons le fait que les énoncés suivants sont purement topologiques : seul l'espace topologique sous-jacent entre en jeu. On rappelle que la notion d'espace irréductible possède différentes définitions équivalentes, voir exercice 1.3.3. La lectrice qui voudrait plus de détails sur la notion d'irréductibilité d'un espace topologique peut consulter Bourbaki, Algèbre Commutative, chap. II, § 4, no 1.

5.1.1 Définition. Soit X un espace topologique. On appelle *composante irréductible* de X un fermé irréductible maximal, i.e. un fermé irréductible Y tel que pour toute inclusion $Y \subset Y'$ avec Y' fermé irréductible, on a $Y' = Y$.

5.1.2 Proposition. *Tout espace topologique est recouvert par ses composantes irréductibles.*

Démonstration : Soit $x \in X$ et E l'ensemble des fermés irréductibles de X qui contiennent x. On a $E \neq \varnothing$ car $\overline{\{x\}} \in E$. De plus, la relation d'inclusion est un ordre inductif sur E, c'est-à-dire que toute chaîne d'éléments de E possède une borne supérieure. D'après le lemme de Zorn, E possède un élément maximal Y qui est un fermé irréductible maximal. (Pour se rafraîchir les idées sur le lemme de Zorn, on peut consulter l'excellent livre de Paul Halmos [Hal].) □

5.1.3 Lemme. *Soit $X = \mathrm{Spec}(A)$ un schéma affine.*

(1) *L'adhérence d'un point $x = [p]$ est le fermé irréductible $V(p)$.*

(2) *Les fermés irréductibles de X sont les ensembles $V(p)$ avec p premier.*

(3) *Pour tout fermé irréductible $F \subset X$, il existe un unique point $\eta = \eta_F \in X$ tel que $\overline{\{\eta\}} = F$, appelé* point générique *de F. Les applications $x \mapsto \overline{\{x\}}$ et $F \mapsto \eta_F$ définissent une bijection :*

$$\mathrm{Spec}(A) \xleftrightarrow{1-1} \{\textit{fermés irréductibles de } X\}.$$

(4) *La bijection précédente est décroissante : si $x = [p]$ et $y = [q]$ sont deux points de X, on a $p \subset q$ si et seulement si $\overline{\{y\}} \subset \overline{\{x\}}$.*

(5) *Les points fermés de X sont les $x = [p]$ où p est un premier maximal.*

(6) *Les composantes irréductibles sont les fermés $V(p)$ où p est un premier minimal.*

(7) *L'espace X est irréductible si et seulement si le nilradical de A est premier.*

Démonstration : (1) On a $\overline{\{x\}} = \cap_{p\in V(I)} V(I) = \cap_{p\supset I} V(I) = V(p)$ en utilisant, pour la dernière égalité, le fait que $I \subset J$ entraîne $V(I) \supset V(J)$.

(2) Un point $x = [p]$ est irréductible, donc son adhérence $V(p)$ aussi. Réciproquement, soit $F = V(I)$ un fermé irréductible de X. Soit $\sqrt{I} = \{x \in A; \exists n \geqslant 1, x^n \in I\}$ l'idéal racine de I. On sait que $\sqrt{I} = \cap_{p\supset I} p$, donc $V(I) = V(\sqrt{I})$. Quitte à remplacer I par $\sqrt{I}$ on peut donc supposer que I est un idéal radical. Supposons que I n'est pas premier, alors il existe $a, b \in A$ tels que $a, b \notin I$ mais $ab \in I$. Alors $V(I, a) \cup V(I, b) = V(I)$. Par ailleurs, on a $V(I, a) \subsetneq V(I)$ car sinon, tout idéal premier contenant I contient a, donc $I = \sqrt{I} = \cap_{p\supset I} p$ contient a, contradiction. De même, on a $V(I, b) \subsetneq V(I)$. Ceci montre que $V(I)$ n'est pas irréductible, contradiction. Donc I est premier.

(3) D'après le point (2), le fermé F est de la forme $V(p)$ donc $\eta = [p]$ convient. Soient p, q deux premiers tels que $F = V(p) = V(q)$. Alors $p \in V(q)$ donc $p \supset q$. De même $q \supset p$, donc $p = q$ ce qui montre l'unicité de η. La bijection annoncée est claire.

(4) Laissé à la lectrice.

(5), (6). Comme la bijection précédente est décroissante, elle fait correspondre éléments minimaux et éléments maximaux de part et d'autre. Donc les points fermés (i.e. les fermés irréductibles minimaux) correspondent aux premiers maximaux, et les composantes irréductibles (i.e. les fermés irréductibles maximaux) correspondent aux premiers minimaux.

(7) L'espace X est irréductible ssi il n'a qu'une composante irréductible, ssi A ne possède qu'un premier minimal p. Ceci signifie que le nilradical, qui est l'intersection de tous les premiers (les minimaux suffisent, bien sûr), est égal à p i.e. est un idéal premier. □

L'énoncé 5.1.3(3) est valable pour un schéma quelconque :

5.1.4 Proposition. *Soit X un schéma. Alors tout fermé $F \subset X$ possède un unique point générique η_F et les applications $x \mapsto \overline{\{x\}}$ et $F \mapsto \eta_F$ définissent une bijection :*

$$|X| \xleftrightarrow{1-1} \{\textit{fermés irréductibles de } X\}.$$

Démonstration : Nous nous contenterons de construire le point générique d'un fermé irréductible ; le reste est plus facile et laissé en exercice. Nous utiliserons le fait que pour tout ouvert $U \subset X$, l'application $F \mapsto F \cap U$ est une bijection de l'ensemble des fermés irréductibles de X qui rencontrent U vers l'ensemble des fermés irréductibles de U, dont l'inverse est $G \mapsto \overline{G}$. De plus cette bijection est compatible avec la restriction à un sous-ouvert, en un sens évident.

Soit $F \subset X$ un fermé irréductible. Alors par définition F est non vide ; soit $x \in F$ un point. Soit $U \subset X$ un voisinage ouvert affine de x dans X. D'après le résultat dans le cas affine (lemme 5.1.3(3)), le fermé irréductible $F \cap U$ possède un unique point générique η_U dans U. Soit $V \subset X$ un autre voisinage ouvert affine de x dans X. Alors, pour tout choix d'un troisième voisinage ouvert affine $W \subset U \cap V$ de x, on a $\eta_U = \eta_W = \eta_V$ d'après l'assertion d'unicité dans le cas affine. Donc $\eta_F := \eta_U$ ne dépend pas de U. □

L'ensemble des fermés irréductibles de X est muni de la relation d'inclusion. Si on traduit cette relation sur X à l'aide de la bijection précédente, on tombe sur les notions générales de spécialisation et de générisation dans un espace topologique.

5.1.5 Définition. Soient X un espace topologique et x, y deux points tels que $\overline{\{y\}} \subset \overline{\{x\}}$, ou de manière équivalente $y \in \overline{\{x\}}$. On dit alors que y est une *spécialisation* de x, ou que x est une *générisation* de y. On dit aussi que x se *spécialise* sur y, et on note $x \rightsquigarrow y$.

5.1.6 Exercice. (1) Dans un espace topologique, montrez que tout fermé est stable par spécialisation et tout ouvert est stable par générisation.

(2) Soit $f : X \to Y$ une application continue entre espaces topologiques. Soient $x_1, x_2 \in X$. Montrez que $x_1 \rightsquigarrow x_2$ implique $f(x_1) \rightsquigarrow f(x_2)$.

5.2 Schémas réduits et intègres

5.2.1 Définition. On dit qu'un schéma X est *réduit* si pour tout ouvert $U \subset X$, l'anneau $\mathcal{O}_X(U)$ est réduit. On dit qu'un schéma est *irréductible* si l'espace topologique sous-jacent $|X|$ l'est. On dit qu'un schéma X est *intègre* si pour tout ouvert *non vide* $U \subset X$, l'anneau $\mathcal{O}_X(U)$ est intègre.

5.2.2 Exercice. Montrez que X est réduit ssi pour tout $x \in X$, l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$ est réduit.

Pour tout ouvert $U \subset X$, on note $\mathcal{N}_0(U)$ l'ensemble des fonctions nilpotentes de $\mathcal{O}_X(U)$ et $\mathcal{N}(U)$ l'ensemble des fonctions *localement* nilpotentes dans $\mathcal{O}_X(U)$. On appelle $\mathcal{N}_0$ le *préfaisceau nilradical* de $\mathcal{O}_X$ et $\mathcal{N}$ le *faisceau nilradical* de $\mathcal{O}_X$, à cause de l'exercice suivant.

5.2.3 Exercice. Montrez que :

(1) $\mathcal{N}_0(U) = \mathcal{N}(U)$ pour tout U quasi-compact.

(2) L'inclusion $i : \mathcal{N}_0 \hookrightarrow \mathcal{N}$ identifie $\mathcal{N}$ au faisceau associé à $\mathcal{N}_0$.

(3) Le faisceau d'idéaux $\mathcal{N}$ est quasi-cohérent.

(4) Si X est noethérien, $\mathcal{N}_0$ est un faisceau.

(5) Si $X = \coprod_{n \geqslant 0} \mathrm{Spec}(k[t]/(t^n))$, pour un corps k, alors $\mathcal{N}_0$ n'est pas un faisceau.

L'exemple (5) montre que $\mathcal{N}_0$ n'est pas toujours un faisceau, contrairement à ce qui est affirmé dans [EH], page 25. On peut même fabriquer un exemple dans lequel X est affine, en prenant le spectre de $A = \prod_{n \geqslant 0} k[t]/(t^n)$ et en raisonnant de la même manière que dans l'exercice 5.3.6.

5.2.4 Proposition. *Soit X un schéma et $F \subset |X|$ un fermé. Alors, il existe un plus petit sous-schéma fermé $Y \subset X$ de support F. C'est le seul sous-schéma fermé de X de support F qui soit réduit. Si $F = |X|$, ce sous-schéma fermé est le schéma réduit X_{red}, dont le faisceau d'idéaux est le nilradical $\mathcal{N}$.*

Démonstration : Si $X = \mathrm{Spec}(A)$ est affine, le fermé F est de la forme $V(I)$, pour un idéal $I \subset A$. De plus, on a vu en 4.3.7 que parmi tous les idéaux qui conviennent, il y en a un qui est maximal : c'est le seul qui soit *radical* i.e. tel que $I = \sqrt{I}$. Ceci signifie que le quotient A/I est réduit, c'est-à-dire que le schéma $V(I)$ est réduit. Si X est un schéma arbitraire, sur chaque ouvert affine U on dispose par ce qui précède d'un plus petit sous-schéma fermé Y_U de support $F \cap U$. Par unicité, les sous-schémas fermés Y_U coïncident sur les intersections $U \cap V$, donc se recollent en un unique sous-schéma fermé Y qui remplit les conditions demandées. $\square$

5.2.5 Proposition. *Un schéma est intègre si et seulement s'il est irréductible et réduit.*

Démonstration : Si X n'est pas réduit, il n'est pas intègre. S'il n'est pas irréductible, il existe deux ouverts non vides disjoints U, V. Dans ce cas $\mathcal{O}_X(U \cup V) = \mathcal{O}_X(U) \times \mathcal{O}_X(V)$ n'est pas intègre, donc X n'est pas intègre.

Réciproquement, supposons X irréductible et réduit. Soit U un ouvert non vide et $f, g \in \mathcal{O}_X(U)$ tels que $fg = 0$. Alors les fermés $Z_f = \{x \in U;\ f(x) = 0 \in \kappa(x)\}$ et Z_g recouvrent X (le fait que ce sont des fermés découle de 2.7.10). Par irréductibilité, l'un des deux égale X, par exemple Z_f. Ceci signifie que le germe f_x est dans l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{X,x}$, pour tout $x \in U$. Alors dans tout ouvert affine de U la fonction f est nilpotente, donc nulle sur U par hypothèse. □

5.3 Schémas noethériens

Les propriétés de finitude d'un anneau noethérien ont pour conséquence des propriétés de finitude pour le spectre : par exemple, les chaînes de fermés irréductibles $Y_1 \subsetneq Y_2 \subsetneq Y_3 \subsetneq \dots$, qui correspondent aux chaînes d'idéaux premiers de l'anneau, sont de longueur finie. Sur un schéma général, il est clair que l'hypothèse de quasi-compacité est nécessaire pour conserver ces propriétés.

5.3.1 Définition. On dit qu'un schéma X est *localement noethérien* s'il possède un recouvrement par des ouverts affines dont les anneaux de fonctions sont noethériens. On dit qu'un schéma X est *noethérien* s'il est localement noethérien et quasi-compact.

5.3.2 Proposition. *Soit X un schéma. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) *X est localement noethérien,*

(2) *pour tout ouvert affine $U \subset X$, l'anneau $\mathcal{O}_X(U)$ est noethérien.*

Démonstration : Seule l'implication (1) $\Rightarrow$ (2) mérite un argument. Soit $U = \mathrm{Spec}(A)$ ouvert affine et $\{I_k\}_{k \geqslant 0}$ une suite croissante d'idéaux de A. Utilisant le fait que X est localement noethérien et que tout localisé d'un anneau noethérien est noethérien, on voit que U peut être recouvert par des ouverts affines distingués $D(f)$ d'anneaux de fonctions A_f noethériens. De plus, par quasi-compacité de U on peut supposer ce recouvrement fini. Alors, pour tout f, la suite d'idéaux localisés $(I_k)_f$ est stationnaire, à partir d'un entier n que l'on peut supposer indépendant de f. Or, si I, J sont deux idéaux de A tels que $I_f = J_f$ pour tout f, alors $I = J$ (pour le voir, utiliser une partition de l'unité adaptée aux f^α pour un entier α bien choisi). Ceci montre que la suite I_k est stationnaire. Donc A est noethérien. □

Voici un exemple de schéma noethérien.

5.3.3 Exemple. Soit k un corps. Un schéma est *localement de type fini sur k* s'il possède un recouvrement par des ouverts affines dont les anneau de fonctions sont des k-algèbres de type fini. On dit que X est *de type fini sur k* s'il est localement de type fini et quasi-compact. Par exemple, un sous-schéma d'un espace affine $\mathbb{A}^n_k$ ou d'un espace projectif $\mathbb{P}^n_k$ est de type fini sur k.

La propriété noethérienne a un pendant topologico-combinatoire introduit dans l'exercice suivant.

5.3.4 Exercice. On dit qu'un espace topologique X est *noethérien* si toute chaîne décroissante $Y_0 \supset Y_1 \supset Y_2 \supset \dots$ de fermés est stationnaire.

(1) Soit X un espace noethérien. Montrez que (i) toute partie munie de la topologie induite est un espace noethérien (ii) X est quasi-compact (iii) X possède un nombre fini de composantes irréductibles (iv) toute composante irréductible contient un ouvert non vide de X.

(2) Montrez que le spectre d'un anneau noethérien est un espace topologique noethérien. Montrez que la réciproque est fausse en à l'aide d'un anneau non noethérien dont le spectre est ponctuel.

5.3.5 Proposition. *Tout sous-schéma d'un schéma (localement) noethérien est (localement) noethérien.*

Démonstration : Supposons X localement noethérien. Si $U \subset X$ est un sous-schéma ouvert, le fait que U est encore localement noethérien est clair. Si $Y \subset X$ est un sous-schéma fermé, c'est tout aussi clair. Le cas d'un sous-schéma quelconque s'en déduit. Supposons de plus X quasi-compact. Alors il est réunion d'un nombre fini d'ouverts affines dont le spectre est un espace noethérien, d'après 5.3.2 et 5.3.4(2). On en déduit que l'espace $|X|$ lui-même est noethérien. Alors tout sous-schéma a pour support un espace noethérien, donc quasi-compact, d'après 5.3.4(1). Ceci conclut. $\square$

5.3.6 Exercice. La proposition précédente implique que tout ouvert d'un schéma noethérien est quasi-compact. On peut construire un exemple de schéma affine (donc quasi-compact) qui possède des ouverts non quasi-compacts de la manière suivante. Sur un corps k, on prend l'anneau produit $A = k^{\mathbb{N}}$. Montrez que $X = \operatorname{Spec}(A)$ contient comme ouvert le schéma non quasi-compact $U = \amalg_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{Spec}(k)$, somme disjointe dénombrable de k-points. Retrouvez le fait que $U \neq X$ en expliquant pourquoi il existe un idéal premier de A qui n'est pas le noyau de l'une des projections naturelles $A \to k$.

5.4 Variétés classiques

5.4.1 Variétés abstraites et variétés quasi-projectives. Dans 1.2, pour simplifier nous n'avons parlé que d'ensembles algébriques affines, fermés dans l'espace affine $\mathbb{A}^n(k)$ sur un corps algébriquement clos. Les géomètres classiques étudiaient également les ensembles algébriques (quasi-)projectifs i.e. (localement) fermés dans l'espace projectif $\mathbb{P}^n(k)$. La notion de quasi-projectivité existe aussi pour les schémas : il s'agit des schémas qui sont sous-schémas d'un espace projectif. Le livre de A. Weil, *Foundations of Algebraic Geometry* publié en 1946 a introduit les ensembles algébriques abstraits, que l'on peut définir comme des espaces topologiques X possédant un recouvrement ouvert par des ensembles algébriques affines X_i. Un morphisme $f : X \to Y$ entre deux tels ensembles est une application continue telle qu'il existe des recouvrements ouverts $X = \cup X_i$, $Y = \cup Y_j$ par des ensembles algébriques affines $X_i \subset \mathbb{A}^{n_i}(k)$ et $Y_j \subset \mathbb{A}^{m_j}(k)$, et des applications à composantes polynomiales $f_{i,j} : \mathbb{A}^{n_i}(k) \to \mathbb{A}^{m_j}(k)$ satisfaisant $f_{i,j}(X_i) \subset Y_j$ et $f_{|X_i} = f_{i,j}$.

La théorie des schémas englobe les variétés classiques. Dans le cas affine, c'est simplement parce qu'on dispose d'équivalences de catégories :

$$\begin{pmatrix} \text{ensembles} \\ \text{algébriques} \\ \text{affines sur } k \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} k\text{-algèbres} \\ \text{de type fini} \\ \text{réduites} \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} k\text{-schémas affines} \\ \text{de type fini} \\ \text{réduits} \end{pmatrix}$$

où la première équivalence donnée par le Nullstellensatz de Hilbert (voir § 1.2) et la seconde est donnée par l'équivalence entre anneaux et schémas affines (exercice 2.7.4). Plus généralement, on a l'énoncé suivant. Pour en faciliter la lecture, rappelons que les variétés sont les ensembles algébriques irréductibles et que les schémas de type fini sur k ont été définis dans 5.3.3.

5.4.2 Théorème. *Soit k un corps algébriquement clos. Il existe un foncteur pleinement fidèle de la catégorie des ensembles algébriques (abstraits) sur k dans la catégorie des k-schémas, qui induit les équivalences de catégories suivantes :*

$$\begin{array}{ccc}
\{\textit{ensembles algébriques abstraits}\} & \xrightarrow{\ \sim\ } & \{k\textit{-schémas de type fini réduits}\} \\
\bigcup & & \bigcup \\
\{\textit{ensembles algébriques quasi-projectifs}\} & \xrightarrow{\ \sim\ } & \{k\textit{-schémas quasi-projectifs réduits}\} \\
\bigcup & & \bigcup \\
\{\textit{variétés algébriques quasi-projectives}\} & \xrightarrow{\ \sim\ } & \{k\textit{-schémas quasi-projectifs intègres}\}
\end{array}$$

Démonstration : Le Nullstellensatz de Hilbert affirme que tout ensemble algébrique affine X détermine une k-algèbre de type fini réduite $A = \Gamma(X)$ telle que $X = \mathrm{Spm}(A)$. En particulier $X = \mathrm{Spm}(A)$ détermine le schéma $X' = \mathrm{Spec}(A)$. De plus, une inclusion ouverte d'ensembles algébriques affines $i : X_1 \to X_2$ induit un morphisme de k-algèbres $A_2 \simeq A_1$ et une immersion ouverte de schémas $i' : X_1' \simeq X_2'$, telle que i est un isomorphisme si et seulement si i' est un isomorphisme. Si X est un ensemble algébrique abstrait quelconque, choisissons un recouvrement ouvert par des ensembles algébriques affines X_i, notons $X_{i,j} = X_i \cap X_j$ et soit $\varphi_{i,j} : X_{i,j} \to X_{j,i}$ l'identité de $X_i \cap X_j$. Par ce qui précède, ces données donnent naissance à une famille de schémas X_i' et de sous-schémas ouverts $X_{i,j}' \subset X_i'$ avec des isomorphismes $\varphi_{i,j}' : X_{i,j}' \to X_{j,i}'$ qui satisfont clairement les conditions de recollement. On note X' le schéma obtenu par recollement. Il n'est pas difficile de construire de même le morphisme de schémas $f' : X_1 \to X_2$ associé à un morphisme d'ensembles algébriques $f : X_1' \to X_2'$. On a ainsi définit le foncteur annoncé. Le fait que ce foncteur soit pleinement fidèle provient du fait que la bijection $\mathrm{Hom}(X_1, X_2) \simeq \mathrm{Hom}(A_2, A_1) \simeq \mathrm{Hom}(X_1', X_2')$ donnée par le Nullstellensatz pour X_1, X_2 affines, s'étend par recollement au cas d'ensembles algébriques quelconques. Le fait que l'image essentielle de ce foncteur soit égale à la sous-catégorie pleine des k-schémas de type fini réduits peut se prouver en construisant un foncteur inverse $X' \mapsto X'$ par le même procédé que pour le foncteur direct, i.e. en définissant $X' \mapsto A = \Gamma(X', \mathcal{O}_{X'}) \mapsto X = \mathrm{Spm}(A)$ dans le cas affine et en recollant. Le fait qu'ensembles algébriques quasi-projectifs et k-schémas quasi-projectifs réduits se correspondent provient essentiellement du fait que $(\mathbb{P}^n(k))' = \mathbb{P}^n_k$, i.e. le schéma associé à la variété algébrique classique $\mathbb{P}^n(k)$ est le schéma $\mathbb{P}^n_k$. Le fait que les variétés correspondent aux schémas intègres provient du fait qu'un schéma réduit est irréductible si et seulement s'il est intègre. □

On notera que, comme on l'a déjà dit, l'inclusion $\mathrm{Spm}(A) \hookrightarrow \mathrm{Spec}(A)$ identifie $\mathrm{Spm}(A)$ à l'ensemble des points fermés, ou fermés irréductibles minimaux, de $\mathrm{Spec}(A)$. Plus généralement, un ensemble algébrique abstrait X peut se voir comme l'ensemble des points fermés du support $|X'|$ de son schéma associé ; et le support $|X'|$ d'un k-schéma de type fini réduit peut se voir comme l'ensemble des sous-variétés de la variété classique correspondante X.

5.4.3 Exercice. Soit k un corps algébriquement clos. On considère la variété algébrique classique $\mathbb{A}^1(k) \smallsetminus \{0\} = k^*$, complémentaire du point origine 0 dans la droite affine sur k. Munie de la multiplication dans k^*, c'est un groupe algébrique qu'on l'appelle le *groupe multiplicatif* de k et qu'on note $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}(k)$.

(1) La variété k^* est-elle réduite ? quasi-projective ? intègre ?

(2) Décrivez le k-schéma de type fini $\mathbb{G}_{\mathrm{m},k}$ associé par l'équivalence de 5.4.2 à $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}(k)$.

(3) Décrivez en termes schématiques les morphismes qui donnent la structure de « schéma en groupes », c'est-à-dire la multiplication $\mathbb{G}_{\mathrm{m},k} \times_{\mathrm{Spec}(k)} \mathbb{G}_{\mathrm{m},k} \to \mathbb{G}_{\mathrm{m},k}$ et le morphisme qui donne la section neutre $\mathrm{Spec}(k) \to \mathbb{G}_{\mathrm{m},k}$.

(3) Pour tout n entier, calculez le morphisme d'élévation à la puissance n-ième, au sens de la multiplication itérée dans ce schéma en groupes.

(4) Le noyau du morphisme de puissance n-ième, défini comme un égalisateur convenable (cf 3.5.15), est noté $\mu_{n,k}$ et appelé *schéma en groupes des racines n-ièmes de l'unité*. Donnez sa définition précisément et décrivez-le : quel est son espace topologique sous-jacent ? Est-il affine, irréductible, réduit ?

Table des matières