Introduction à la Géométrie Algébrique. Le langage des schémas

Cours du 25 octobre 2016

4.4.3 Proposition. *Soit $\mathscr{A}$ une algèbre quasi-cohérente sur S. Alors il existe un S-schéma $Y = \mathrm{Spec}(\mathscr{A})$ tel que $\mathscr{A}(Y) = \mathscr{A}$ avec la propriété universelle suivante : le foncteur $\mathscr{A}$ induit une bijection*

$$\mathrm{Hom}_S(X, \mathrm{Spec}(\mathscr{A})) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S\text{-}\mathrm{Alg}}(\mathscr{A}, \mathscr{A}(X))$$

fonctorielle en X et en $\mathscr{A}$.

Démonstration : Si $S = \mathrm{Spec}(R)$ est affine, on a $\mathscr{A} = \widetilde{A}$ pour une certaine R-algèbre A. Dans ce cas on pose $Y = \mathrm{Spec}(A)$ et le résultat se déduit facilement de 3.3.2. Dans le cas général, on peut recouvrir S par des ouverts affines $U_i = \mathrm{Spec}(R_i)$, on a $\mathscr{A}_{|U_i} = \widetilde{A}_i$ pour une certaine R_i-algèbre A_i et on pose $Y_i = \mathrm{Spec}(A_i)$. L'ouvert $Y_{i,j}$ préimage de $U_i \cap U_j$ dans Y_i vérifie la propriété universelle du schéma $\mathrm{Spec}(\mathscr{A}_{|U_i \cap U_j})$. Par symétrie il en va de même de $Y_{j,i}$ et on a donc un isomorphisme canonique $\varphi_{i,j} : Y_{i,j} \xrightarrow{\sim} Y_{j,i}$. On note Y le S-schéma obtenu par recollement des Y_i le long des $Y_{i,j}$. La vérification de la propriété universelle est immédiate car la bijection annoncée peut se tester localement : plus précisément, si l'on note α, β les deux applications en sens inverses entre les deux ensembles Hom, on peut tester les égalités $\alpha(\beta(f)) = f$ et $\beta(\alpha(g)) = g$ localement sur chaque U_i. $\square$

4.4.4 Définition. Le S-schéma $\mathrm{Spec}(\mathscr{A})$, aussi noté parfois $\mathrm{Spec}_{\mathcal{O}_S}(\mathscr{A})$, est appelé *spectre relatif* de l'algèbre quasi-cohérente $\mathscr{A}$.

4.4.5 Remarque. La formation de $\mathrm{Spec}(\mathscr{A})$ commute au changement de base sur S, au sens où pour tout morphisme de schémas $u : S' \to S$ il existe un isomorphisme canonique de S'-schémas

$$\mathrm{Spec}(\mathscr{A}) \times_S S' \xrightarrow{\sim} \mathrm{Spec}(u^*\mathscr{A}).$$

En effet, pour montrer cela il suffit de montrer que les S'-schémas $\mathrm{Spec}(\mathscr{A}) \times_S S'$ et $\mathrm{Spec}(u^*\mathscr{A})$ sont solution du même problème universel. (C'est une manière de voir le lemme de Yoneda.) Or pour tout S'-schéma $f' : X' \to S'$ on a des bijections canoniques :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{S'}(X', \mathrm{Spec}(u^*\mathscr{A})) &= \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{S'}\text{-}\mathrm{Alg}}(u^*\mathscr{A}, \mathscr{A}'(X')) \\
&= \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S\text{-}\mathrm{Alg}}(\mathscr{A}, u_*\mathscr{A}'(X')) \text{ par adjonction,} \\
&= \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S\text{-}\mathrm{Alg}}(\mathscr{A}, \mathscr{A}(X')) \text{ en posant } f = u \circ f' : X' \to S, \\
&= \mathrm{Hom}_S(X', \mathrm{Spec}(\mathscr{A})) \\
&= \mathrm{Hom}_{S'}(X', \mathrm{Spec}(\mathscr{A}) \times_S S').
\end{aligned}$$

Ceci conclut l'argument.

4.4.6 Exercice (exemple 1). Soit X un schéma et $\mathscr{I}$ un idéal quasi-cohérent. On veut montrer que le sous-schéma fermé $V(\mathscr{I})$ est isomorphe à $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_X/\mathscr{I})$.

(1) En utilisant la propriété universelle de $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_X/\mathscr{I})$ (prop. 4.4.3), construisez un morphisme de X-schémas $f : V(\mathscr{I}) \to \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_X/\mathscr{I})$.

(2) On note $Y = V(\mathscr{I})$ et $i : Y \hookrightarrow X$ l'immersion fermée. Démontrez que le morphisme $i^\sharp : \mathcal{O}_X \to i_*\mathcal{O}_Y$ induit un isomorphisme $\mathcal{O}_X/\mathscr{I} \xrightarrow{\sim} i_*\mathcal{O}_Y$. Déduisez-en que f est un isomorphisme.

4.4.7 Exercice (exemple 2). Soit S un schéma. Définissez la $\mathcal{O}_S$-algèbre $\mathcal{O}_S[t_1,\dots,t_n]$ des polynômes en $t_1,\dots,t_n$ et montrez que son spectre est l'espace affine $\mathbb{A}^n_S$. Pour tout r-uplet de sections globales $f_1,\dots,f_r \in \Gamma(S,\mathcal{O}_S)[t_1,\dots,t_n]$, expliquez comment définir une algèbre quasi-cohérente $\mathscr{A} = \mathcal{O}_S[t_1,\dots,t_n]/(f_1,\dots,f_r)$. Décrivez la propriété universelle du S-schéma $\mu_{n,S} := \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_S[t]/(t^n-1))$.

4.4.8 Fibrés vectoriels (exemple 3). On renvoie à [Ei], Annexe 2, pour des rappels sur l'algèbre symétrique. Soit R un anneau et M un R-module. On note $M^{\otimes n}$ la n-ième puissance tensorielle de M. On appelle *algèbre tensorielle de* M la R-algèbre graduée $T(M) = \oplus_{n\geqslant 0} T^n(M)$ où $T^n(M) = M^{\otimes n}$, le produit dans $T(M)$ étant défini par $(x_1\otimes\cdots\otimes x_r)(y_1\otimes\cdots\otimes y_s) = x_1\otimes\cdots\otimes x_r\otimes y_1\otimes\cdots\otimes y_s$. On appelle *algèbre symétrique de* M l'algèbre graduée $\mathrm{Sym}(M) = \oplus_{n\geqslant 0}\mathrm{Sym}^n(M)$ quotient de $T(M)$ par l'idéal bilatère engendré par les relations $x\otimes y - y\otimes x$ avec $x,y\in M$. C'est la plus grande algèbre quotient de $T(M)$ qui soit commutative. Le R-module $\mathrm{Sym}^n(M)$ est l'image de $T^n(M)$; on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Sym}^0(M) &= T^0(M) = R,\\
\mathrm{Sym}^1(M) &= T^1(M) = M,\\
\mathrm{Sym}^2(M) &= T^2(M)/(x\otimes y - y\otimes x; x,y\in M).
\end{aligned}$$

L'algèbre $\mathrm{Sym}(M)$ est graduée avec $\mathrm{Sym}^n(M)$ égal à l'image de $T^n(M)$. On dispose d'un morphisme de R-modules injectif $i : M = \mathrm{Sym}^1(M) \hookrightarrow \mathrm{Sym}(M)$. De plus $S(M)$ vérifie la propriété universelle suivante : l'application qui à un morphisme de R-algèbres $\varphi : \mathrm{Sym}(M) \to A$ associe sa restriction $\varphi\circ i : M \to A$ est une bijection $\mathrm{Hom}_{R\text{-Alg}}(\mathrm{Sym}(M),R) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{R\text{-Mod}}(M,A)$ fonctorielle en M et A. Une autre manière de le dire est que le foncteur S est adjoint à gauche du foncteur d'oubli, qui à A associe le module sous-jacent, de la catégorie des R-algèbres commutatives dans la catégorie des R-modules.

4.4.9 Exemple. Si M est libre de rang n avec pour base $t_1,\dots,t_n$, alors $T(M) = R\{t_1,\dots,t_n\}$ est l'algèbre des polynômes non commutatifs en les t_i et $\mathrm{Sym}(M) = R[t_1,\dots,t_n]$ est l'algèbre des polynômes commutatifs en les t_i. Le morphisme $M \hookrightarrow \mathrm{Sym}(M)$ identifie M aux polynômes homogènes de degré 1. On retrouve la propriété universelle des anneaux de polynômes.

Si S est un espace annelé et $\mathscr{F}$ est un faisceau de $\mathcal{O}_S$-modules, on peut définir le faisceau *algèbre symétrique* $\mathrm{Sym}(\mathscr{F})$ en suivant la construction précédente et en faisceautisant aux endroits où c'est nécessaire. Pour tout faisceau de $\mathcal{O}_S$-algèbres $\mathscr{A}$, on a une bijection :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S\text{-Alg}}(\mathrm{Sym}(\mathscr{F}),\mathscr{A}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S\text{-Mod}}(\mathscr{F},\mathscr{A}).$$

On peut vérifier que si $\mathscr{F}$ est un $\mathcal{O}_S$-module quasi-cohérent, alors son algèbre symétrique $\mathrm{Sym}(\mathscr{F})$ est une $\mathcal{O}_S$-algèbre quasi-cohérente. Nous allons voir que le S-schéma $\mathbb{V}(\mathscr{F}) := \mathrm{Spec}(\mathrm{Sym}(\mathscr{F}))$ vérifie une propriété universelle très simple. Cette propriété mettra en jeu le $\mathcal{O}_S$-module *dual* de $\mathscr{F}$, qui est défini par $\mathscr{F}^\vee := \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_S\text{-Mod}}(\mathscr{F},\mathcal{O}_S)$.

4.4.10 Proposition. *Soient S un schéma et $\mathscr{F}$ un $\mathcal{O}_S$-module quasi-cohérent. Pour tout S-schéma $f : T \to S$, on pose $\mathscr{F}_T = f^*\mathscr{F}$. On a une bijection, fonctorielle en T/S et $\mathscr{F}$:*

$$\mathrm{Hom}_S(T, \mathbb{V}(\mathscr{F})) \xrightarrow{\sim} \Gamma(T, (\mathscr{F}_T)^\vee).$$

Démonstration : On calcule :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_S(T, \mathbb{V}(\mathscr{F})) &= \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S\text{-Alg}}(\mathrm{Sym}(\mathscr{F}), f_*\mathcal{O}_T) \text{ par la propriété universelle du spectre, voir 4.4.3,}\\
&= \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S\text{-Mod}}(\mathscr{F}, f_*\mathcal{O}_T) \text{ par la propriété universelle de l'algèbre symétrique,}\\
&= \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_T\text{-Mod}}(f^*\mathscr{F}, \mathcal{O}_T) \text{ par adjonction,}\\
&= \Gamma(T, (\mathscr{F}_T)^\vee) \text{ par définition du dual.}
\end{aligned}$$

□

4.4.11 Définition. Soit X un schéma et r un entier. On dit qu'un $\mathcal{O}_X$-module $\mathscr{F}$ est *localement libre de rang* r s'il existe un recouvrement de X par des ouverts U_i et des isomorphismes $\mathscr{F}_{|U_i} \simeq \mathcal{O}_{U_i}^{\oplus r}$. Le $\mathcal{O}_X$-module localement libre $\mathcal{O}_X^{\oplus r}$ est appelé *trivial* et on dit qu'un ouvert U_i comme ci-dessus *trivialise* $\mathscr{F}$. Un X-schéma de la forme $V(\mathscr{F})$ avec $\mathscr{F}$ localement libre de rang r est appelé *fibré vectoriel de rang* r. Lorsque $r = 1$ on parle aussi de *fibré en droites*.

L'exemple 4.4.9 montre que pour un fibré vectoriel de rang r sur X, il existe un recouvrement par des ouverts U tels que $V \times_X U \simeq \mathbb{A}^r_U$. Les ouvrages [Har] (chap. 2, exercice 5.18) et [GW] (chapitre 11) expliquent comment cette définition des fibrés vectoriels est équivalente à la définition plus géométrique utilisée en géométrie et topologie différentielles.

4.4.12 Exercice. Soit $\mathscr{F}$ un $\mathcal{O}_X$-module localement libre de rang r sur un schéma X. Montrez que le dual $\mathscr{F}^\vee = \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_S\text{-Mod}}(\mathscr{F}, \mathcal{O}_S)$ est encore localement libre de rang r.

4.4.13 Exemple. Soit $f : X \to S$ un S-schéma. Pour tout ouvert $U \subset X$, notons $\mathscr{D}(U)$ l'ensemble des $\mathcal{O}_S$-dérivations de $\mathcal{O}_X(U)$ i.e. l'ensemble des morphismes de groupes abéliens $D : \mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_X(U)$ telles que $D(fg) = fD(g) + gD(f)$ pour tous $f, g \in \mathcal{O}_X(U)$ et $D(af) = aD(f)$ pour toute fonction $a \in \mathcal{O}_S(V)$ définie sur un ouvert V contenant $f(U)$. Alors $\mathscr{D}$ est un faisceau appelé le *faisceau des $\mathcal{O}_S$-dérivations de X/S*. Si X/S est de type fini alors $\mathscr{D}$ est de type fini comme $\mathcal{O}_X$-module, et si de plus X/S est lisse de dimension relative r alors $\mathscr{D}$ est localement libre de rang r. Le fibré vectoriel $\mathbb{T}_{X/S} = \mathbb{V}(\mathscr{D}^\vee) = \mathrm{Spec}(\mathrm{Sym}(\mathscr{D}^\vee))$ est appelé *fibré tangent* de X/S.

4.5 Faisceaux inversibles

Nous avons vu en 4.1 les notions générales de produit tensoriel et de faisceau $\mathcal{H}om$ pour les $\mathcal{O}_X$-modules. Nous ajoutons la définition du *$\mathcal{O}_X$-module dual* : il s'agit du faisceau $\mathscr{F}^\vee := \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathscr{F}, \mathcal{O}_X)$.

4.5.1 Lemme. *Soient X un espace annelé et $\mathscr{L}$ un $\mathcal{O}_X$-module localement libre de rang* 1*. Alors, le morphisme canonique :*

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}^\vee \otimes \mathscr{L} &\longrightarrow \mathcal{O}_X\\
\varphi \otimes s &\longmapsto \varphi(s)
\end{aligned}$$

est un isomorphisme.

Démonstration : Il suffit de montrer que ce morphisme est un isomorphisme sur un recouvrement ouvert de X. Soit U un ouvert qui trivialise $\mathscr{L}$, donc il existe un isomorphisme $u : \mathcal{O}_U \xrightarrow{\sim} \mathscr{L}_{|U}$. Notons $(u^\vee)^{-1} : \mathcal{O}_U \xrightarrow{\sim} \mathscr{L}^\vee_{|U}$ l'isomorphisme obtenu en dualisant. Utilisant ces isomorphismes, le morphisme $\mathscr{L}^\vee \otimes \mathscr{L} \to \mathcal{O}_X$ se réduit à l'isomorphisme $\mathcal{O}_U \otimes \mathcal{O}_U \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_U$, $s \otimes t \mapsto st$. $\square$

4.5.2 Définition. Un faisceau de $\mathcal{O}_X$-modules $\mathscr{L}$ est appelé *faisceau inversible* s'il est localement libre de rang 1. Son *inverse* ou *dual* est le faisceau $\mathscr{L}^\vee = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathscr{L}, \mathcal{O}_X)$. Le faisceau inversible trivial est le faisceau $\mathscr{L} = \mathcal{O}_X$. Le *groupe de Picard* de X est l'ensemble des classes d'isomorphisme de faisceaux inversibles sur X, pointé par la classe d'isomorphisme du faisceau inversible trivial et muni de l'opération de produit tensoriel. Il est noté $\mathrm{Pic}(X)$.

4.5.3 Remarque. Si $f : X \to Y$ est un morphisme d'espaces annelés, l'image inverse induit un morphisme de groupes $f^* : \mathrm{Pic}(Y) \to \mathrm{Pic}(X)$. En revanche, en général l'image directe $f_*\mathscr{L}$ d'un faisceau inversible n'est pas un faisceau inversible. Par exemple, pour un schéma X sur un corps k, l'image directe de $\mathcal{O}_X$ par $X \to \mathrm{Spec}(k)$ est l'espace vectoriel $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ qui est de dimension > 1 en général.

4.5.4 Exemple (retour sur l'espace projectif). Soit $P = \mathbb{P}^n_\mathbb{Z}$ l'espace projectif sur $\mathbb{Z}$. Soient $A_i = \mathbb{Z}[t_0/t_i, \dots, t_n/t_i]$ et $A_{i,j} = A_i[t_i/t_j] = A_j[t_j/t_i] = A_{j,i}$. Fixons un entier d. Sur l'ouvert $P_i = \mathrm{Spec}(A_i)$, on définit un faisceau inversible $\mathscr{F}_i = \widetilde{M_i}$ en posant $M_i = (t_i)^d A_i$, sous-A_i-module de $K = \mathbb{Z}[t_0, \dots, t_n, (t_0 \dots t_n)^{-1}]$. Si l'on affecte chaque t_i du poids 1, on voit que M_i est composé des éléments homogènes de degré d dans $\mathbb{Z}[t_0, \dots, t_n, (t_i)^{-1}]$. Sur les intersections $P_{i,j}$, on dipose d'isomorphismes $\varphi_{i,j} : \mathscr{F}_{i|P_{i,j}} \xrightarrow{\sim} \mathscr{F}_{j|P_{i,j}}$ donnés par la multiplication par $(t_j/t_i)^d$:

$$\begin{array}{ccc} M_i & \longrightarrow & M_j \\ x = (t_i)^d a & \longmapsto & \left(\frac{t_j}{t_i}\right)^d x = (t_j)^d a. \end{array}$$

Les conditions de recollement sont satisfaites par les $\varphi_{i,j}$ (tout se vérifie dans K où c'est clair). On note $\mathcal{O}(d)$ le faisceau inversible obtenu en recollant les $\mathscr{F}_i$ le long des $\varphi_{i,j}$. En particulier $\mathscr{O}(0) = \mathcal{O}_P$. Le faisceau $\mathcal{O}(1)$ est appelé *faisceau tordu de Serre*. On a les faits suivants :

(1) $\mathcal{O}(n) \otimes \mathcal{O}(m) \simeq \mathcal{O}(n+m)$ i.e. l'application $\mathbb{Z} \to \mathrm{Pic}(P)$, $n \mapsto [\mathcal{O}(n)]$ est un morphisme de groupes.

(2) $\Gamma(P, \mathcal{O}(d)) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}[t_0, \dots, t_n]_d, & \text{le module des polynômes homogènes de degré } d \text{ si } d \geqslant 0, \\ 0 \text{ si } d < 0. \end{cases}$

(À suivre.)

Table des matières