Introduction à la Géométrie Algébrique. Le langage des schémas

Cours du 4 octobre 2016

3.2 Schémas relatifs et foncteur de points

Lorsqu'on étudie les variétés algébriques sur un corps de base k, les éléments de ce corps jouent le rôle de constantes et les morphismes entre variétés sont les *k-morphismes*. Concrètement, dans le langage des schémas ceci signifie que les objets qu'on étudie sont des morphismes $s_X : X \to \operatorname{Spec}(k)$ et que les morphismes entre X et Y sont les morphismes $f : X \to Y$ tels que $s_Y \circ f = s_X$. (Dans le cas affine ceci signifie simplement que X est spectre d'un anneau A qui est une *k-algèbre*, et que les morphismes considérés sont les morphismes *de k-algèbres* $A \to B$.) Plus généralement, il est souvent commode de travailler avec des schémas sur un schéma de base fixé S.

3.2.1 Définition. Soit S un schéma. On appelle *catégorie des schémas au-dessus de S* et on note Sch/S la catégorie dont les objets sont les schémas X équipés d'un morphisme $s_X : X \to S$, et dont les morphismes sont définis par $\operatorname{Hom}_{\operatorname{Sch}/S}(X,Y) = \{f : X \to Y \text{ tel que } s_Y \circ f = s_X\}$.

Un objet de Sch/S est parfois noté simplement X/S. Un morphisme entre X/S et Y/S est parfois appelé S-morphisme, et on note $\operatorname{Hom}_S(X,Y)$ au lieu de $\operatorname{Hom}_{\operatorname{Sch}/S}(X,Y)$. Par construction, le schéma S est un objet terminal de Sch/S. Lorsque $S = \operatorname{Spec}(A)$, on parle aussi de la catégorie Sch/A des A-schémas, on note $\operatorname{Hom}_A(X,Y)$ au lieu de $\operatorname{Hom}_S(X,Y)$, etc. Si X est un A-schéma et $A \to B$ est un morphisme d'anneaux, on note parfois abusivement $X \otimes_A B$ au lieu de $X \times_{\operatorname{Spec}(A)} \operatorname{Spec}(B)$.

3.2.2 Points d'un schéma. Nous allons voir comment la notion habituelle, naïve de « point » prend une place très importante dans le monde des schémas.

3.2.3 Lemme. *Soient X un schéma. Pour tout corps K, on a une bijection entre l'ensemble des morphismes $\operatorname{Spec}(K) \to X$ et l'ensemble des paires (x,i) composés d'un point $x \in |X|$ et d'un morphisme de corps $i : \kappa(x) \to K$.*

Démonstration : L'ensemble sous-jacent à $\operatorname{Spec}(K)$ est un point que nous noterons t. Soit $f : \operatorname{Spec}(K) \to X$ un morphisme et $x = f(t)$. Soit $U = \operatorname{Spec}(A) \subset X$ un ouvert affine contenant x, avec $x = [p]$. D'après 2.7.8, on dispose d'un morphisme $g : \operatorname{Spec}(K) \to U$ par lequel f se factorise. Comme $g(t) = x$, le morphisme d'anneaux correspondant $\varphi : A \to K$ vérifie $\varphi^{-1}(O) = p$ donc induit des morphismes $A_p \to K$ puis $A_p/pA_p \to K$, i.e. $\kappa(x) \to K$. Réciproquement, étant donnés $x \in |X|$ et $i : \kappa(x) \to K$ on peut construire un morphisme $f : \operatorname{Spec}(K) \to X$ de la manière suivante. On choisit $U = \operatorname{Spec}(A)$ tel que $x = [p]$. En passant au spectre, les morphismes d'anneaux $A \to A_p \to A_p/pA_p = \kappa(x) \to K$ donnent un morphisme de schémas $\operatorname{Spec}(K) \to \operatorname{Spec}(A) = U \subset X$. Ce morphisme ne dépend pas du choix de U, car si U' est un autre voisinage ouvert affine, on peut en choisir un troisième $V \subset U \cap U'$ et utiliser les compatibilité des morphismes de restriction. Pour finir on montre que les deux constructions sont inverses l'une de l'autre. $\square$

3.2.4 Exercice. Soit k un corps et $A = k[t_1, \dots, t_n]/(f_1, \dots, f_r)$ une k-algèbre de type fini. Soit K/k une extension de corps. Montrez que l'ensemble des K-points de $X = \mathrm{Spec}(A)$ est en bijection avec l'ensemble des solutions dans K du système $f_1 = \cdots = f_r = 0$, c'est-à-dire l'ensemble des n-uplets $(x_1, \dots, x_n) \in K^n$ tels que $f_1(x_1, \dots, x_n) = \cdots = f_r(x_1, \dots, x_n) = 0$.

Le lemme précédent montre que les morphismes $\mathrm{Spec}(K) \to X$ depuis le spectre d'un corps permettent de reconstituer l'ensemble des points de l'espace topologique $|X|$. Si on regarde attentivement la preuve, on voit qu'elle démontre plus généralement que pour tout anneau *local* $\mathcal{O}$, on a une bijection entre l'ensemble des morphismes $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}) \to X$ et l'ensemble des paires (x, i) composés d'un point $x \in |X|$ et d'un morphisme d'anneaux locaux $i : \mathcal{O}_{X,x} \to \mathcal{O}$. Ainsi, les morphismes $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}) \to X$ permettent en quelque sorte de reconstituer les voisinages des points dans $|X|$. Il est intéressant d'élargir encore le point de vue pour reconstituer encore plus d'informations sur X.

3.2.5 Définition. Un *point de X à valeurs dans un anneau A* ou *A-point de X* est un morphisme de schémas $\mathrm{Spec}(A) \to X$. Plus généralement, un *point de X à valeurs dans un schéma T* ou *T-point de X* est un morphisme de schémas $T \to X$. Si X est un S-schéma, un point de X/S à valeurs dans un S-schéma T est un morphisme de S-schémas $T \to X$. On note $h_X(T) = \mathrm{Hom}_S(T, X)$ l'ensemble des T-points de X/S. On appelle *foncteur des points de X/S* le foncteur $h_X : (\mathrm{Sch}\,/S)^\circ \to \mathrm{Ens}$ ainsi défini.

Le lemme de Yoneda dit que X/S est déterminé par son foncteur de points. Il s'agit en fait d'un énoncé très général, dans une catégorie arbitraire.

3.2.6 Lemme de Yoneda. *Soit C une catégorie. Pour tout $X \in C$, on note $h_X : C^\circ \to \mathrm{Ens}$ le foncteur défini par $h_X(T) = \mathrm{Hom}_C(T, X)$. Alors le foncteur $X \mapsto h_X$, de C dans la catégorie des foncteurs contravariants de C dans* Ens*, est pleinement fidèle.*

La démonstration est formelle est peu difficile. On peut la trouver dans [Le] ou dans [Mac]. Comme elle n'apporte pas beaucoup de compréhension, nous ne la donnerons pas. Nous verrons sur les exemples que décrire le foncteur de points d'un S-schéma S revient en général à donner une propriété universelle dont il est solution.

3.3 L'espace affine $\mathbb{A}^n_{\mathbb{Z}}$

3.3.1 Définition. On appelle *espace affine de dimension n sur $\mathbb{Z}$* le schéma $\mathbb{A}^n_{\mathbb{Z}} = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[t_1, \dots, t_n])$ où $t_1, \dots, t_n$ sont des indéterminées. Ce schéma possède n fonctions régulières globales distinguées $t_1, \dots, t_n$.

Nous allons donner une description du foncteur de points de $\mathbb{A}^n_{\mathbb{Z}}$. Plus généralement voici une description du foncteur de points d'un schéma affine $\mathrm{Spec}(A)$.

3.3.2 Théorème. *Soit A un anneau et T un schéma. L'application qui à $f : T \to \mathrm{Spec}(A)$ associe le morphisme $A \to \Gamma(T, \mathcal{O}_T)$ obtenu en prenant les sections globales de $f^\sharp : \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)} \to f_*\mathcal{O}_T$ définit une bijection :*

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sch}}(T, \mathrm{Spec}(A)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ann}}(A, \Gamma(T, \mathcal{O}_T)).$$

Cette bijection est fonctorielle en A et T.

On peut interpréter cet énoncé comme l'existence d'un adjoint pour l'inclusion de la catégorie des schémas affines dans celle de tous les schémas (prenez garde au fait qu'ici les foncteurs sont contravariants ce qui nécessite d'être soigneux dans la lecture de la définition donnée dans 2.6.7).

Démonstration : Construisons une application en sens inverse. Soit $\varphi : A \to \mathcal{O}_T(T)$ un morphisme d'anneaux. Pour tout ouvert affine $U = \mathrm{Spec}(B)$ dans T, la composée $A \to \mathcal{O}_T(T) \xrightarrow{\text{res}} \mathcal{O}_T(U) = B$ définit en passant aux spectres un morphisme de schémas $f_U : U \to \mathrm{Spec}(A)$. Si $V = \mathrm{Spec}(C)$ est un autre ouvert affine, et $W = \mathrm{Spec}(D)$ est un ouvert affine inclus dans $U \cap V$, la propriété de faisceau de $\mathcal{O}_T$ fournit un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathcal{O}_T(U) = B \arrow[dr, "\mathrm{res}^U_W"] & \\
A \arrow[r] & \mathcal{O}_T(T) \arrow[ur, "\mathrm{res}^T_U"] \arrow[dr, "\mathrm{res}^T_V"'] & & \mathcal{O}_T(W) = D. \\
 & & \mathcal{O}_T(V) = C \arrow[ur, "\mathrm{res}^V_W"'] &
\end{tikzcd}$$

En passant aux spectres, ceci montre que f_U et f_V coïncident sur W. Comme ceci est vrai pour tous les ouverts affines W et que ceux-ci recouvrent $U \cap V$, on voit que f_U et f_V coïncident sur $U \cap V$. Ils se recollent donc en un morphisme $f : T \to \mathrm{Spec}(A)$ que nous noterons $\Delta(\varphi)$.

Il nous faut maintenant démontrer que ces deux constructions sont inverses l'une de l'autre. Soit $f : T \to \mathrm{Spec}(A)$ un morphisme de schémas, $\varphi = \Gamma(f^\sharp) : A \to \mathcal{O}_T(T)$ le morphisme d'anneaux induit, et $f' = \Delta(\varphi) : T \to \mathrm{Spec}(A)$ construit comme précédemment. Pour montrer que $f = f'$ il suffit de le faire sur chaque ouvert $U = \mathrm{Spec}(B)$ d'un recouvrement de T. Or $f_{|U}$ et $f'_{|U}$ sont deux morphismes entre schémas affines, donc il suffit de montrer que les morphismes d'anneaux associés sont égaux. Or le morphisme d'anneaux associé à $f_{|U}$ est $\mathrm{res}^T_U \circ \varphi : A \to \Gamma(T, \mathcal{O}_T) \to \Gamma(U, \mathcal{O}_T)$, et il en va de même pour f', comme la construction de $f(\varphi)$ le montre. Nous laissons à la lectrice la vérification du fait que $\Gamma(\Delta(\varphi)^\sharp) = \varphi$, en donnant un indice : recouvrir T par des ouverts affines U_i, $i \in I$ puis utiliser d'une part le fait que $\Gamma(\Delta(\varphi)^\sharp_{|U_i}) = \mathrm{res}_{U_i} \circ \varphi$ et d'autre part le fait que $\mathcal{O}_T(T)$ est l'égalisateur des deux flèches $\prod \mathcal{O}_T(U_i) \rightrightarrows \prod \mathcal{O}_T(U_{i,j})$, c'est-à-dire l'ensemble des collections (s_i) telles que $s_{i|U_{i,j}} = s_{j|U_{i,j}}$ pour tous i, j.

Pour finir, il faut démontrer que cette bijection est fonctorielle en A et X. Ceci ne présente pas de vraie difficulté et nous laissons l'exercice au lecteur. $\square$

3.3.3 Remarque. En prenant $A = \mathbb{Z}$ dans 3.3.2, on voit que tout schéma possède un et un seul morphisme vers $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$. On dit que $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ est un *objet terminal* (ou *final*) de la catégorie des schémas.

3.3.4 Corollaire. *Soit $\mathcal{H}om_{\mathrm{Sch}}(X, \mathbb{A}^n_{\mathbb{Z}})$ le faisceau sur X dont les sections sur un ouvert U sont les morphismes de schémas $U \to \mathbb{A}^n_{\mathbb{Z}}$. On a des isomorphismes fonctoriels en X :*

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sch}}(X, \mathbb{A}^n_{\mathbb{Z}}) \xrightarrow{\sim} \Gamma(X, \mathcal{O}_X)^n \quad \text{et} \quad \mathcal{H}om_{\mathrm{Sch}}(X, \mathbb{A}^n_{\mathbb{Z}}) \xrightarrow{\sim} (\mathcal{O}_X)^n.$$

En particulier, les fonctions sur X, définies précédemment comme les sections du faisceau $\mathcal{O}_X$, peuvent également être vues comme morphismes de X vers la droite affine. $\square$

Démonstration : Le premier isomorphisme provient du théorème précédent. Comme il est valable pour tout ouvert $U \subset X$, il donne l'isomorphisme de faisceaux indiqué. $\square$

Reformulons ce résultat comme une propriété universelle : pour tout schéma X et tout n-uplet de fonctions régulières $(f_1, \dots, f_n) \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)^n$, il existe un unique morphisme de schémas $f : X \to \mathbb{A}^n_{\mathbb{Z}}$ tel que $f^\sharp(t_i) = f_i$ pour tout $i = 1, \dots, n$.

3.3.5 Exercice. Décrivez les différents types de points de $X = \mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}$, la droite affine sur $\mathbb{Z}$, comme dans [EH], § II.4.3, exercice II-37.

3.4 L'espace projectif $\mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}}$

On construit l'espace projectif $\mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}}$ par le procédé de recollement. Pour cela, considérons des indéterminées $t_0, \dots, t_n$ et l'anneau $K = \mathbb{Z}[t_0, \dots, t_n, \frac{1}{t_0 \dots t_n}]$. Pour tout entier $i \in \{0, \dots, n\}$, les n éléments $t_0/t_i, \dots, t_{i-1}/t_i, t_{i+1}/t_i, \dots, t_n/t_i$ sont algébriquement indépendants sur $\mathbb{Z}$. Ainsi l'anneau

$$A_i = \mathbb{Z}\left[\frac{t_0}{t_i}, \dots, \frac{t_n}{t_i}\right]$$

est isomorphe à un anneau de polynômes sur $\mathbb{Z}$, donc le schéma $X_i = \mathrm{Spec}(A_i)$ est un espace affine de dimension n au-dessus de $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$. Pour tout $j \neq i$, le schéma

$$X_{i,j} = D\left(\frac{t_j}{t_i}\right) = \mathrm{Spec}\left(\mathbb{Z}\left[\frac{t_0}{t_i}, \dots, \dots, \frac{t_n}{t_i}, \frac{t_i}{t_j}\right]\right)$$

est un ouvert principal de X_i. De l'isomorphisme d'anneaux

$$u_{i,j} : \mathbb{Z}\left[\frac{t_0}{t_j}, \dots, \dots, \frac{t_n}{t_j}, \frac{t_j}{t_i}\right] \longrightarrow \mathbb{Z}\left[\frac{t_0}{t_i}, \dots, \dots, \frac{t_n}{t_i}, \frac{t_i}{t_j}\right]$$

donné par l'*égalité comme sous-anneaux de* K, on déduit un isomorphisme de schémas :

$$\varphi_{i,j} = \mathrm{Spec}(u_{i,j}) : X_{i,j} \longrightarrow X_{j,i}.$$

Le fait que les $u_{i,j}$ soient des morphismes identiques dans un anneau ambiant K fait que toutes les conditions de compatibilité nécessaires au recollement sont automatiques. Par exemple, la condition $(\varphi_{j,k} \circ \varphi_{i,j})_{|X_{i,j} \cap X_{i,k}} = \varphi_{i,k|X_{i,j} \cap X_{i,k}}$ revient à dire que les trois anneaux

$$\mathbb{Z}\left[\frac{t_0}{t_i}, \dots, \dots, \frac{t_n}{t_i}, \frac{t_i}{t_j}, \frac{t_i}{t_k}\right] \quad , \quad \mathbb{Z}\left[\frac{t_0}{t_j}, \dots, \dots, \frac{t_n}{t_j}, \frac{t_j}{t_i}, \frac{t_j}{t_k}\right] \quad , \quad \mathbb{Z}\left[\frac{t_0}{t_k}, \dots, \dots, \frac{t_n}{t_k}, \frac{t_k}{t_i}, \frac{t_k}{t_j}\right]$$

sont égaux. On en déduit que les X_i se recollent en un schéma que l'on note $X = \mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}}$.

Nous décrirons plus loin le foncteur de points, ou la propriété universelle, de l'espace projectif $\mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}}$.

3.4.1 Exercice. Soit X le plan affine avec origine dédoublée, obtenu en recollant $X_1 = \mathbb{A}^2_k$ avec $X_2 = \mathbb{A}^2_k$ le long de leur ouvert commun $U_1 = U_2 = \mathbb{A}^n_k \smallsetminus \{0\}$ (avec isomorphisme de recollement égal à l'identité). Montrez qu'il existe dans X deux ouverts affines dont l'intersection n'est pas affine.

3.5 Produits fibrés

3.5.1 Un aperçu sur la dimension.

3.5.2 Définition. Soit A un anneau. On appelle *dimension de Krull* de A et on note $\dim(A)$ le supremum des longueurs r de chaînes $p_0 \subsetneq p_1 \subsetneq \cdots \subsetneq p_r$ d'idéaux premiers de A.

Soit X un espace topologique. On appelle *dimension combinatoire* de X et on note $\dim(X)$ le supremum des longueurs r de chaînes $Y_0 \supsetneq Y_1 \supsetneq \cdots \supsetneq Y_r$ de fermés irréductibles de X.

La théorie de la dimension des anneaux noethériens est une partie très importante et subtile de l'algèbre commutative. Nous nous contentons d'en citer sans preuve quelques résultats marquants.

3.5.3 Proposition. *Soit A un anneau noethérien.*

(1) *Si A est local, alors* $\dim(A) < \infty$.

(2) *On a* $\dim(A) = \sup\{\dim(A_p),\ p \subset A$ *premier*$\}$.

(3) *Si A est une algèbre intègre de type fini sur un corps k, alors $r = \dim(A) < \infty$ est égal au degré de transcendance sur k du corps de fractions de A. De plus, toutes les chaînes maximales de premiers sont de longueur r.*

(4) *L'anneau A possède un nombre fini d'idéaux premiers minimaux.*

(5) *Si A est un corps alors* $\dim(A) = 0$. *Si $A = \mathbb{Z}$ alors* $\dim(A) = 1$. *Si t est une indéterminée, on a* $\dim(A[t]) = \dim(A) + 1$.

(6) *Il existe un anneau noethérien de dimension infinie.*

Démonstration : Dans le livre de Eisenbud [Ei], ces résultats sont discutés dans l'introduction du chapitre 8 (notamment dans la section 8.1 qui est très intéressante), puis démontrés au fur et à mesure du chapitre. Par exemple (1) est conséquence de cor. 10.7, (3) est le th. A dans la section 13.1, (4) est le th. 3.1, (5) est cor. 10.13. Enfin pour (6) on peut trouver un exemple dans [Na], appendice A1, exemple 1 et reproduit dans [Ei], exer. 9.6 ou ici. □

3.5.4 Produit de schémas. Le produit de variétés est une opération fondamentale ; en géométrie différentielle, c'est lui qui permet de définir la variété $\mathbb{R}^n$ à partir de $\mathbb{R}$. En géométrie algébrique, il serait bienvenu qu'il permette de définir l'espace affine $\mathbb{A}^n_k$ à partir de $\mathbb{A}^1_k$. Malheureusement, en ce qui concerne les espaces topologiques ce n'est pas du tout le cas. Par exemple, l'espace $|\mathbb{A}^2_k|$ est beaucoup plus gros que $|\mathbb{A}^1_k| \times |\mathbb{A}^1_k|$. En effet, supposant le corps k algébriquement clos pour simplifier, on a $|\mathbb{A}^1_k| = k \cup \{\eta_{\mathbb{A}^1}\}$ où $\eta_{\mathbb{A}^1}$ est le point générique, alors que $|\mathbb{A}^2_k|$ comprend k^2 (points de dimension 0), les points génériques de courbes irréductibles planes (points de dimension 1), et un point générique $\eta_{\mathbb{A}^2}$. (Nous renvoyons à 2.1.3 pour la description de $\mathbb{A}^2_k$.) Il y a une application continue naturelle $|\mathbb{A}^2_k| \longrightarrow |\mathbb{A}^1_k| \times |\mathbb{A}^1_k|$ décrite ainsi :

— le point fermé $(a, b) \in k^2$ est envoyé sur le couple (a, b),

— le point générique η_C d'une courbe verticale $C = \{a\} \times \mathbb{A}^1(k)$ est envoyé sur $(a, \eta_{\mathbb{A}^1})$, le point générique η_C d'une courbe horizontale $C = \mathbb{A}^1(k) \times \{b\}$ est envoyé sur $(\eta_{\mathbb{A}^1}, b)$, et le point générique η_C d'une courbe « transverse » est envoyé sur $(\eta_{\mathbb{A}^1}, \eta_{\mathbb{A}^1})$,

— le point générique $\eta_{\mathbb{A}^2}$ est envoyé sur $(\eta_{\mathbb{A}^1}, \eta_{\mathbb{A}^1})$.

On voit que les courbes transverses contribuent à grossir excessivement la fibre au-dessus de $(\eta_{\mathbb{A}^1}, \eta_{\mathbb{A}^1})$. En fait la bonne définition du produit est la définition *catégorique*, c'est celle que nous adoptons dans la catégorie des schémas.

3.5.5 Définition. Dans une catégorie C, le *produit* de deux objets X, Y est un objet Z muni de deux morphismes $p_1 : Z \to X$ et $p_2 : Z \to Y$ tel que pour toute paire de morphismes $u : W \to X$ et $v : W \to Y$, il existe un unique morphisme $w : W \to Z$ tel que $u = p_1 w$ et $v = p_2 w$.

3.5.6 Exercice. Démontrez que le produit $\mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}} \times \mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}$ est égal à $\mathbb{A}^2_{\mathbb{Z}}$.

3.5.7 Produit fibré de schémas. Le résultat de l'exercice ci-dessus met en évidence un phénomène curieux : on a $\dim(\mathbb{A}^2_{\mathbb{Z}}) = 3$ alors que $\dim(\mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}) + \dim(\mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}) = 4$ (rappelons-nous que $\dim(A[t]) = \dim(A) + 1$ pour A noethérien, voir 3.5.3). Ceci provient du fait que le schéma $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ est de dimension 1. Si on pose $\dim^*(X) = \dim(X) - \dim(\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})) = \dim(X) - 1$, on obtient $\dim^*(\mathbb{A}^n_{\mathbb{Z}}) = n$ et la relation

$$\dim^*(\mathbb{A}^{n+m}_{\mathbb{Z}}) = \dim^*(\mathbb{A}^n_{\mathbb{Z}}) + \dim^*(\mathbb{A}^m_{\mathbb{Z}})$$

a lieu. Pour comprendre pourquoi la définition de $\dim^*$ est naturelle, il suffit de mettre $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ à sa juste place, qui est celle d'objet terminal de la catégorie des schémas. (Rappelons qu'un *objet terminal* dans une catégorie C est un objet $T \in C$ tel que tout objet X possède un unique morphisme $X \to T$.) La catégorie des espaces topologiques et celle des variétés différentielles ont un objet terminal qui est le point ; c'est parce qu'il est de dimension 0 qu'il ne perturbe pas la relation $\dim(X \times Y) = \dim(X) + \dim(Y)$.

Dans une catégorie qui possède un objet terminal, le produit est un cas particulier de produit fibré. Le produit fibré porte bien son nom : c'est un produit pour des objets *fibrés au-dessus d'une base* S, et c'est pour mesurer la dimension des fibres que l'invariant $\dim^*$ est pertinent.

3.5.8 Définition. Dans une catégorie C, le *produit fibré* de deux morphismes $f : X \to S$ et $g : Y \to S$ est un objet Z muni de deux morphismes $p_1 : Z \to X$ et $p_2 : Z \to Y$ tels que $fp_1 = gp_2$, avec la propriété suivante : pour toute paire de morphismes $u : W \to X$ et $v : W \to Y$ tels que $fu = gv$, il existe un unique morphisme $w : W \to Z$ tel que $u = p_1 w$ et $v = p_2 w$. On dit que u et v sont les *composantes* de w et on note $w = (u, v)$. Lorsqu'il existe, le produit fibré est unique à unique isomorphisme près et il est noté $X \times_{f,S,g} Y$ ou simplement $X \times_S Y$.

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[dr, dashed, "w"] \arrow[drr, bend left, "v"] \arrow[ddr, bend right, "u"'] & & \\
& X \times_S Y \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & Y \arrow[d, "g"] \\
& X \arrow[r, "f"] & S
\end{tikzcd}$$

Par exemple, dans la catégorie des ensembles le produit fibré est l'ensemble $\{(x, y);\ f(x) = g(y)\}$ muni des deux projections naturelles.

Dans la catégorie des schémas, le produit fibré existe et nous allons le construire par recollement à partir du cas affine. Pour cela, on a besoin du *produit tensoriel d'algèbres* dont nous rappelons sans preuve la définiton et une description sommaire.

3.5.9 Proposition. *Soit R un anneau.*

(1) *Soient M, N deux R-modules. Il existe un R-module $M \otimes_R N$ et une application R-bilinéaire $b : M \times N \to M \otimes_R N$ avec la propriété universelle suivante : pour tout R-module P et toute application R-bilinéaire $u : M \times N \to P$, il existe un unique morphisme de R-modules $u' : M \otimes_R N \to P$ tel que $u = u' \circ b$. Le couple $(M \otimes_R N, u)$ est appelé le* produit tensoriel des modules M et N. *Ses éléments sont des sommes finies de tenseurs élémentaires $m \otimes n = u(m, n)$.*

(2) *Soient A, B deux R-algèbres. Muni de la multiplication obtenue en posant $(a \otimes b).(a' \otimes b') = aa' \otimes bb'$ et en étendant par bilinéarité, le R-module $A \otimes_R B$ est une R-algèbre de neutre multiplicatif $1 \otimes 1$. Il est muni de deux morphismes de R-algèbres $u : A \to \otimes A \otimes_R B$, $a \mapsto a \otimes 1$ et $v : B \to \otimes A \otimes_R B$, $b \mapsto 1 \otimes B$. Le triplet $(A \otimes_R B, u, v)$ vérifie la propriété universelle suivante : pour toute R-algèbre C et pour tout couple de morphismes de R-algèbres $f : A \to C$, $g : B \to C$, il existe un unique morphisme de R-algèbres $h : A \otimes_R B \to C$ tel que $f = h \circ u$ et $g = h \circ v$. Le triplet $(A \otimes_R B, u, v)$ est appelé* produit tensoriel des algèbres A et B.

Démonstration : Voir [Ei] ou [Mat]. □

On peut noter que dans bien des situations, le produit tensoriel $A \otimes_R B$ peut être identifié à une algèbre connue, ce qui en donne une description plus commode que la description abstraite. Par exemple, si X et Y sont des indéterminées ou des familles d'indéterminées, en observant que $R[X, Y]$ vérifie la propriété universelle du produit tensoriel d'algèbres on voit que $R[X] \otimes_R R[Y] \simeq R[X, Y]$.

3.5.10 Théorème. *Le produit fibré $X \times_S Y$ de deux morphismes $f : X \to S$ et $g : Y \to S$ existe dans la catégorie des schémas.*

Démonstration : Premier cas : $X = \mathrm{Spec}(A)$, $Y = \mathrm{Spec}(B)$, $S = \mathrm{Spec}(R)$ tous trois affines. Dans ce cas, se donner des morphismes $u : W \to X$ et $v : W \to Y$ tels que $fu = gv$ est équivalent à se donner des morphismes d'anneaux $u' : A \to \Gamma(W, \mathcal{O}_W)$ et $v' : B \to \Gamma(W, \mathcal{O}_W)$ tels que $u'f' = v'g'$, d'après 3.3.2. Comme la somme amalgamée de A et B le long de R dans la catégorie des anneaux commutatifs unitaires est leur produit tensoriel, on en déduit qu'il existe un unique morphisme d'anneaux $w' : A \otimes_R B \to \Gamma(W, \mathcal{O}_W)$ par lequel u' et v' se factorisent. Au morphisme w' est associé un morphisme de schémas $w : W \to \mathrm{Spec}(A \otimes_R B)$. Ceci montre que $X \times_S Y = \mathrm{Spec}(A \otimes_R B)$.

Deuxième cas : seul S est affine. Choisissons des recouvrements ouverts affines $X = \cup X_i$ et $Y = \cup Y_k$ et notons $X_{i,j} = X_i \cap X_j$, $Y_{k,l} = Y_k \cap Y_l$. D'après le premier cas, les produits fibrés $Z_{i,k} := X_i \times_S Y_k$ existent. Notons $Z = Z_{i,j,k,l}$ le sous-schéma ouvert $p_1^{-1}(X_{i,j}) \cap p_2^{-1}(Y_{k,l})$ dans $Z_{i,k} = X_i \times_S Y_k$, où $p_1 : Z_{i,k} \to X_i$ et $p_2 : Z_{i,k} \to Y_k$ sont les projections. Utilisant la proposition 2.7.8, on vérifie immédiatement que Z possède la propriété universelle du produit fibré $X_{i,j} \times_S Y_{k,l}$. Ceci réalise ce produit fibré comme un ouvert de $Z_{i,k}$ et la même construction permet de le voir comme un ouvert de $Z_{i,l}$, $Z_{j,k}$ et $Z_{j,l}$. On peut alors recoller les schémas $Z_{i,k}$ le long des ouverts $Z_{i,j,k,l}$ pour former un schéma $X \times_S Y$. (Il s'agit d'un recollement ordinaire dans lequel l'ensemble d'indices de la famille de schémas à recoller est un produit cartésien de deux ensembles.) Vérifions que c'est bien le produit fibré attendu. Étant donnés $u : W \to X$ et $v : W \to Y$ tels que $fu = gv$, on considère les ouverts $W_{i,k} = u^{-1}(X_i) \cap v^{-1}(Y_k)$ dans W. On construit des morphismes $W_{i,k} \to X_i \times_S Y_k$ qui se recollent en un morphisme $W \to X \times_S Y$.

Troisième cas : cas général. Soit $S = \cup S_i$ un recouvrement de S par des ouverts affines. Soient $X_i = f^{-1}(S_i)$ et $Y_i = g^{-1}(S_i)$ qui sont ouverts dans X et Y. Par restriction, on dispose de morphismes $f_i : X_i \to S_i$ et $g_i : Y_i \to S_i$. D'après le deuxième cas, les produits fibrés $X_i \times_{S_i} Y_i$ existent. Il n'est pas difficile de voir que les produits fibrés $X_{i,j} \times_{S_{i,j}} Y_{i,j}$ existent également et se réalisent comme des ouverts dans $X_i \times_{S_i} Y_i$ et dans $X_j \times_{S_j} Y_j$. Ces derniers se recollent donc pour former un schéma $X \times_S Y$ pour lequel on vérifie comme précédemment la propriété de produit fibré. $\square$

Table des matières