Introduction à la Géométrie Algébrique. Le langage des schémas

Cours du 20 septembre 2016

2.4 Interlude 2 : faisceaux

Comme nous l'avons indiqué dans 1, un schéma sera défini comme un couple composé d'un espace topologique et d'un faisceau d'anneaux d'un certain type. Nous aurons donc besoin d'être à l'aise avec quelques notions liées aux faisceaux sur un espace topologique X.

2.4.1 Définition. Un *préfaisceau d'ensembles* $\mathscr{F}$ sur X est la donnée d'une collection d'ensembles $\mathscr{F}(U)$ pour tous les ouverts $U \subset X$, et d'une collection d'applications appelées *restrictions* $\mathrm{res}_{V,U} : \mathscr{F}(V) \to \mathscr{F}(U)$ pour toute inclusion d'ouverts $U \subset V$, satisfaisant les propriétés suivantes : $\mathrm{res}_{U,U} = \mathrm{id}_U$ pour tout U, et $\mathrm{res}_{V,U} \circ \mathrm{res}_{W,V} = \mathrm{res}_{W,U}$ pour toute chaîne $U \subset V \subset W$.

Un *morphisme de préfaisceaux* $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ est la donnée d'applications $\varphi(U) : \mathscr{F}(U) \to \mathscr{G}(U)$ pour tous les ouverts $U \subset X$, qui commutent aux applications de restriction des préfaisceaux $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ i.e. $\mathrm{res}^{\mathscr{G}}_{V,U} \circ \varphi(V) = \varphi(U) \circ \mathrm{res}^{\mathscr{F}}_{V,U}$.

Un préfaisceau de groupes, ou d'anneaux (etc) est une collection de groupes, d'anneaux (etc) munie d'applications de restriction qui sont des morphismes de groupes, d'anneaux (etc). Les notions de *morphisme de préfaisceaux de groupes, d'anneaux (etc)* sont définies naturellement.

La notation $\Gamma(U, \mathscr{F})$ est aussi utilisée pour désigner $\mathscr{F}(U)$. Les éléments de $\mathscr{F}(U)$ sont souvent appelés *sections de $\mathscr{F}$ au-dessus de U* [3]. Si $U \subset V \subset X$ et $s \in \mathscr{F}(V)$, la restriction $\mathrm{res}_{V,U}(s)$ est souvent notée $s_{|U}$. Avec cette notation simplifiée, la relation $\mathrm{res}^{\mathscr{G}}_{V,U} \circ \varphi(V) = \varphi(U) \circ \mathrm{res}^{\mathscr{F}}_{V,U}$ s'écrit $\varphi(s)_{|U} = \varphi(s_{|U})$ pour tous U, V, s.

2.4.2 Remarque. On peut reformuler cette définition en introduisant la catégorie $\mathrm{Ouv}(X)$ dont les objets sont les ouverts de X, et les morphismes sont les seules inclusions $U \subset V$ (il n'y a donc pas de morphisme entre U et V si $U \not\subset V$). En ces termes, un préfaisceau est simplement un foncteur contravariant $\mathscr{F} : \mathrm{Ouv}(X)^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ens}$, et un morphisme de préfaisceaux est un morphisme de foncteurs.

On dispose donc de catégories de préfaisceaux d'ensembles, de groupes, d'anneaux (etc) sur X. Dans la suite, tant que les résultats énoncés ne dépendent pas du type particulier de faisceau considéré, nous ne le spécifierons pas. Nous noterons $P(X)$ une catégorie que la lectrice ou le lecteur peut imaginer comme étant la catégorie des préfaisceaux d'ensembles, ou de groupes, ou d'anneaux.

2.4.3 Exercice. Les monos, épis, isos de $P(X)$ sont les morphismes $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ tels que $\varphi(U)$ est injectif, surjectif, bijectif pour tout ouvert U. En particulier, les isos sont les morphismes qui sont mono et épi.

3. Pour une raison historique : aux débuts de la théorie des faisceaux, ceux-ci étaient présentés plutôt comme des espaces topologiques munis d'une application continue $\pi : \mathscr{F} \to X$, et dans ce cadre les éléments de $\mathscr{F}(U)$ correspondaient à des sections de $\pi^{-1}(U) \to U$. Voir par exemple l'exposé de Henri Cartan, *Faisceaux sur un espace topologique, I*, Séminaire Henri Cartan, 3 (1950-1951), Exp. No. 14, accessible ici. On peut aussi regarder l'exercice I.8 de [EH].

Venons-en aux faisceaux. Ceux-ci servent à relier données locales et données globales. Si $\mathscr{F}$ est un préfaisceau, ce qu'on entend par « données globales » c'est les sections de $\mathscr{F}(X)$. Ce qu'on entend par « données locales » c'est les sections de $\mathscr{F}(U)$ pour de « petits » ouverts U, ou encore plus local, les éléments des *fibres* (en anglais : *stalks*)

$$\mathscr{F}_x = \varinjlim_{U \ni x} \mathscr{F}(U).$$

(On rappelle que cette limite inductive est l'ensemble des classes d'équivalence de paires (U, s) avec $U \ni x$ ouvert et $s \in \mathscr{F}(U)$, pour la relation suivante : $(U, s) \sim (U', s')$ si et seulement s'il existe $V \subset U \cap U'$ contenant x tel que $s_{|V} = s'_{|V}$. Pour plus de rappels sur les limites inductives, voir [Le], ou [Ei], Appendix 6 ou [Mat], Appendix A.) L'opération « fibre en x » est un foncteur : pour tout morphisme de préfaisceaux $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ on a un morphisme induit $\varphi_x : \mathscr{F}_x \to \mathscr{G}_x$ sur les fibres. Si U est un ouvert contenant x et $s \in \mathscr{F}(U)$, l'image de s par l'application $\mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}_x$ est appelée *germe de s au point x*. Les fibres sont particulièrement importantes en géométrie algébrique car les ouverts de la topologie de Zariski sont très gros. Ce qu'on entend par « relier données locales et données globales » s'exprime dans la définition d'un faisceau.

2.4.4 Définition. Un *faisceau* (d'ensembles, de groupes, d'anneaux, etc) $\mathscr{F}$ sur X est un préfaisceau tel que pour tout ouvert $U \subset X$, pour tout recouvrement ouvert $(U_i)_{i \in I}$ de U, et toute collection de sections $s_i \in \mathscr{F}(U_i)$ qui coïncident sur les intersections $U_i \cap U_j$, il existe une unique section $s \in \mathscr{F}(U)$ telle que $s_{|U_i} = s_i$ pour tout i. Un *morphisme de faisceaux* $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ est un morphisme de préfaisceaux.

On résume parfois la propriété de faisceau par un diagramme exact

$$\mathscr{F}(U) \to \prod_{i \in I} \mathscr{F}(U_i) \rightrightarrows \prod_{i,j} \mathscr{F}(U_i \cap U_j).$$

Voici en exercice une conséquence de la propriété de faisceau.

2.4.5 Exercice. Soit $\mathscr{F}$ un préfaisceau sur X. Pour chaque ouvert U, notons $\mathscr{F}'(U)$ l'ensemble des collections $(s(x)) \in \prod_{x \in U} \mathscr{F}_x$ qui *proviennent localement d'une section* au sens où tout point $y \in U$ possède un voisinage ouvert $V \subset U$ sur lequel tous les éléments $s(x)$, $x \in V$, sont les germes d'une même section $t \in \mathscr{F}(V)$.

(a) Montrez que $\mathscr{F}'$ est un faisceau.

(b) Soit $\gamma(U) : \mathscr{F}(U) \to \prod_{x \in U} \mathscr{F}_x$ l'application qui envoie s sur la collection de germes $(s_x)_{x \in U}$. Montrez que les $\gamma(U)$ induisent un morphisme de préfaisceaux $\gamma : \mathscr{F} \to \mathscr{F}'$ et que γ est un isomorphisme si $\mathscr{F}$ est un faisceau.

On dispose aussi des notions de faisceaux en groupes, en anneaux, etc. Considérons le cas de la catégorie $F(X)$ des faisceaux de groupes abéliens sur X. Dans les exercices suivants, on décrit ses monos, épis, isos. Ceux-ci sont souvent appelés injections, surjections et bijections de faisceaux, même si cette terminologie peut porter à confusion comme on va le voir.

2.4.6 Exercice. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ est un mono,

(b) $\varphi(U)$ est injectif pour tout ouvert U,

(c) φ_x est injectif pour tout $x \in X$.

Pour les épis, la situation n'est pas si simple, et c'est heureux car c'est précisément ce point qui fait tout l'intérêt de la notion de faisceau. En effet, il existe des épis $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ dans $F(X)$ tels que $\varphi(U)$ n'est pas surjectif, pour un certain ouvert U. Cf exercice I.10 dans [EH] :

- dans (a) les ouverts de Zariski sont trop gros pour extraire des racines carrées ;
- dans (b) les variétés projectives ont trop peu de fonctions globales.

2.4.7 Exercice. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ est un épi,

(b) φ est *localement surjectif* : pour tout ouvert U et tout $t \in \mathscr{G}(U)$, il existe un recouvrement ouvert $U = \cup_{i\in I} U_i$ et des sections $s_i \in \mathscr{F}(U_i)$ telles que $\varphi(s_i) = t_{|U_i}$ pour tout i,

(c) φ_x est surjectif pour tout $x \in X$.

2.4.8 Exercice. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ est un iso,

(b) φ est un mono et un épi,

(c) φ_x est un iso, pour tout $x \in X$.

2.4.9 Faisceaux sur une base d'ouverts. Pour terminer cette brève présentation des faisceaux, rappelons-nous que notre objectif est de définir le faisceau de fonctions $\mathcal{O}_X$ d'un schéma affine $X = \mathrm{Spec}(A)$. Comme les ouverts généraux de X sont assez compliqués, il est agréable de travailler seulement avec les ouverts principaux $D(f) = \mathrm{Spec}(A_f)$, qui forment une base. Les valeurs d'un faisceau sur les seuls ouverts de cette base le déterminent entièrement.

2.4.10 Définition. Soit X un espace topologique et $\mathscr{B}$ une base d'ouverts. Un *$\mathscr{B}$-faisceau* $\mathscr{F}_0$ est la donnée d'une collection d'ensembles $\mathscr{F}_0(V)$ pour tous les $V \in \mathscr{B}$, et d'applications de restriction $\mathrm{res}_{W,V}$ pour $V \subset W$ éléments de $\mathscr{B}$, telles que pour tout $V \in \mathscr{B}$, pour tout recouvrement ouvert de V par des éléments $V_i \in \mathscr{B}$, et toute collection de sections $s_i \in \mathscr{F}_0(V_i)$ qui coïncident sur tous les ouverts $W \subset V_i \cap V_j$ appartenant à $\mathscr{B}$, il existe une unique section $s \in \mathscr{F}_0(V)$ telle que $s_{|V_i} = s_i$ pour tout i.

Il s'agit ni plus ni moins de la propriété de faisceau dans laquelle on s'astreint à ne mentionner que les ouverts éléments de la base $\mathscr{B}$ (ce qui donne une formulation un peu lourde).

2.4.11 Proposition. *Soit $\mathscr{F}_0$ un $\mathscr{B}$-faisceau. Pour un ouvert quelconque $U \subset X$, posons*

$$\mathscr{F}(U) = \varprojlim_{V \subset U, V \in \mathscr{B}} \mathscr{F}_0(V).$$

Alors $\mathscr{F}$ est l'unique faisceau tel que $\mathscr{F}(U) = \mathscr{F}_0(U)$ si $U \in \mathscr{B}$.

On rappelle que la limite projective dans le membre de droite est l'ensemble des collections $(s_V)_{V\in\mathscr{B}}$, $s_V \in \mathscr{F}_0(V)$, telles que $s_W = (s_V)_{|W}$ pour toute inclusion $W \subset V$ dans $\mathscr{B}$. Pour des rappels sur les limites projectives (ou limites inverses), voir [Ei], Appendix 6 ou [Mat], Appendix A.

Démonstration : Si $U \in \mathscr{B}$, le système projectif des $V \subset U$, $V \in \mathscr{B}$ possède un élément maximal (ou initial) de sorte que $\mathscr{F}(U) = \mathscr{F}_0(U)$. S'il existe un faisceau $\mathscr{F}$ avec cette propriété, alors chacune de ses sections $s \in \mathscr{F}(U)$ est déterminée par la collection de ses restrictions $s_{|V}$, $V \in \mathscr{B}$, $V \subset U$, astreintes à coïncider sur les ouverts $V \cap V'$, c'est-à-dire sur tous les ouverts $W \subset V \cap V'$ de $\mathscr{B}$ (noter que $V \cap V'$, s'il n'est pas dans $\mathscr{B}$, est en tout cas recouvert par des éléments de $\mathscr{B}$). Ainsi s peut être identifiée à l'ensemble des familles $(s_V)_{V \in \mathscr{B}}$, $s_V \in \mathscr{F}_0(V)$, telles que $s_W = (s_V)_{|W}$ pour toute inclusion $W \subset V$ dans $\mathscr{B}$. C'est exactement l'expression donnée en termes de limite projective dans l'énoncé. Il reste à montrer que cette expression définit bien un faisceau ; ceci est laissé au lecteur. □

2.4.12 Exercice. Décrivez les morphismes de restriction du préfaisceau $\mathscr{F}$ défini dans la proposition. Vérifiez que $\mathscr{F}$ est bien un faisceau. Montrez que si $\mathscr{F}_0, \mathscr{G}_0$ sont deux $\mathscr{B}$-faisceaux, alors toute collection d'applications $\varphi(V) : \mathscr{F}_0(V) \to \mathscr{G}_0(V)$ pour $V \in \mathscr{B}$, commutant aux restrictions d'ouverts de $\mathscr{B}$, s'étend en un unique morphisme de faisceaux $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$.

2.5 Le faisceau de fonctions d'un schéma affine

Soit A un anneau et $X = \mathrm{Spec}(A)$. Nous voulons définir le *faisceau des fonctions régulières* $\mathcal{O}_X$. D'après 2.4.9, il suffit de définir un $\mathscr{B}$-faisceau, pour la base $\mathscr{B}$ composée des ouverts principaux $D(f)$, $f \in A$. Cette base possède la propriété agréable d'être stable par intersections finies puisque $D(f_1) \cap D(f_2) = D(f_1 f_2)$, ce qui simplifie la condition de coïncidence de la définition 2.4.10.

Nous avons vu en 2.1.4 et 2.2.2 que $D(f)$ est l'ensemble des points où f ne s'annule pas, et s'identifie au spectre de l'anneau $A_f = A[1/f]$. Ceci est en harmonie avec l'idée naturelle que sur l'ouvert où f ne s'annule pas, les quotients a/f^n définissent d'honnêtes fonctions.

2.5.1 Proposition. *Les données suivantes :*

(1) $\mathcal{O}_X(D(f)) = A_f$ *pour tout* $f \in A$,

(2) $\mathrm{res}_{D(g),D(f)} : A_g \to A_f$ *égal au morphisme d'anneaux naturel (voir exercice 2.2.7), pour toute inclusion* $D(f) \subset D(g)$,

définissent un $\mathscr{B}$*-faisceau.*

Démonstration : D'abord il convient de noter que lorsque $D(f) = D(g)$, les anneaux A_f et A_g sont canoniquement isomorphes (voir exercice 2.2.7). Par conséquent, si $U = D(f)$, la définition $\mathcal{O}_X(U) = A_f$ ne dépend pas du choix de f. Maintenant, fixons $f \in A$ et montrons la propriété de $\mathscr{B}$-faisceau pour tous les recouvrements ouverts de $D(f)$. Celui-ci étant un spectre, et ses ouverts principaux étant des ouverts principaux dans X, quitte à remplacer A par A_f on se ramène au cas $f = 1$. Il reste à montrer que pour tout recouvrement ouvert de la forme $X = \cup_i D(f_i)$, toute famille d'éléments $s_i \in A_{f_i}$ tels que s_i et s_j deviennent égaux dans $A_{f_i f_j}$ se recolle en un unique $s \in A$.

D'abord une remarque. Pour tout entier $\alpha \geqslant 1$ on a $D(f) = D(f^\alpha)$, donc $X = \cup_i D(f_i^\alpha)$. Comme X est quasi-compact (voir 2.2.4), il existe un sous-recouvrement fini $D(f_1^\alpha), \dots, D(f_n^\alpha)$. Ceci entraîne qu'il existe $a_1, \dots, a_n$ dans A tels que $1 = a_1 f_1^\alpha + \cdots + a_n f_n^\alpha$, par le même argument que dans 2.2.4. (Les a_i dépendent de α, bien sûr.) Dans la suite de la preuve, nous utiliserons ce type d'écriture, appelé une *partition de l'unité*.

Montrons l'unicité. Si s et t sont égaux dans chaque A_{f_i}, alors pour chaque i il existe $\alpha_i \geqslant 1$ tel que $f_i^{\alpha_i}(s-t)=0$. Si $\alpha = \max(\alpha_i)$, on trouve $f_i^{\alpha}(s-t)=0$ pour tout i. En utilisant une partition de l'unité, on en déduit que $s-t=0$.

Montrons maintenant l'existence. Soient $\alpha, \beta \geqslant 1$ tels que, pour tous i,j on a $s_i = d_i/f_i^{\alpha}$ et $(f_if_j)^{\beta}(f_j^{\alpha}d_i - f_i^{\alpha}d_j)=0$, ce qui traduit l'hypothèse que s_i et s_j deviennent égaux dans $A_{f_if_j}$. Les entiers α et β peuvent être choisis uniformes, par quasi-compacité. Fixons une partition de l'unité $1=\sum_j a_j f_j^{\alpha+\beta}$. Posons $s=\sum_j a_j f_j^{\beta} d_j$. On a :

$$f_i^{\alpha+\beta}s = \sum_j a_j f_j^{\beta} f_i^{\alpha+\beta} d_j = \sum_j a_j f_j^{\alpha+\beta} f_i^{\beta} d_i = f_i^{\beta} d_i.$$

Ceci montre que dans A_{f_i} on a $s = d_i/f_i^{\alpha} = s_i$, pour tout i. □

2.5.2 Fibres de $\mathcal{O}_X$. Si $x=[p]$ est un point de $X=\mathrm{Spec}(A)$, dans 2.1.1 on a appelé *anneau local de x* l'anneau localisé $\mathcal{O}_{X,x} := A_p = S^{-1}A$ avec $S = A \smallsetminus p$. Vérifions que ceci est bien la fibre au point x du faisceau $\mathcal{O}_X$, de sorte que la notation utilisée est cohérente. La fibre de ce faisceau est la limite inductive $\varinjlim \mathcal{O}_X(U)$ prise sur tous les ouverts U contenant x. Comme les ouverts principaux forment une base, il suffit de considérer ceux-ci dans la limite inductive. Ainsi la fibre est égale à la limite inductive des anneaux A_f pour $f \notin p$, c'est-à-dire l'ensemble des classes d'équivalence d'éléments de la forme a/f^n avec $a \in A$ et $f \notin p$. On voit que cet ensemble est isomorphe au localisé de A par rapport à la partie $S = A \smallsetminus p$, c'est bien le localisé A_p.

Un schéma général sera défini comme une paire $(X, \mathcal{O}_X)$ composée d'un espace topologique muni d'un faisceau d'anneaux, localement isomorphe à un schéma affine. Dans la catégorie où l'expression « localement isomorphe » prendra son sens, les morphismes relient les faisceaux via une image directe ou une image inverse. Il nous faut faire un troisième interlude pour présenter ces notions.

2.6 Interlude 3 : image directe et image inverse de faisceaux

Nous introduisons ces opérations d'abord pour les préfaisceaux, puis pour les faisceaux.

2.6.1 Définition. Soit $f : X \to Y$ une application continue entre deux espaces topologiques.

(1) Si $\mathscr{F} \in P(X)$ on définit $f_*\mathscr{F} \in P(Y)$ par $(f_*\mathscr{F})(V) = \mathscr{F}(f^{-1}V)$, pour tout ouvert $V \subset Y$. Ce préfaisceau est appelé *image directe de $\mathscr{F}$* par l'application continue f.

(2) Si $\mathscr{F} \in P(Y)$ on définit $f^{-1}\mathscr{F} \in P(X)$ par $(f^{-1}\mathscr{F})(U) = \varinjlim_{V \supset f(U)} \mathscr{F}(V)$, pour tout ouvert $U \subset X$. Ce préfaisceau est appelé *image inverse de $\mathscr{F}$* par f.

Notez que dans (2), lorsque $f(U)$ est ouvert, on a $(f^{-1}\mathscr{F})(U) = \mathscr{F}(f(U))$. Cependant, en général $f(U)$ n'est pas ouvert et une telle formule n'est pas licite.

2.6.2 Exemple : restriction à un ouvert. Soit $U \subset X$ un ouvert et $i : U \to X$ l'inclusion. Le faisceau $i^{-1}\mathscr{F}$ est noté $\mathscr{F}_{|U}$ et appelé la *restriction de $\mathscr{F}$ à U*. On a $(i^{-1}\mathscr{F})(V) = \mathscr{F}(i(V)) = \mathscr{F}(V)$ pour tout $V \subset U$.

2.6.3 Exercice. Montrez que f_* s'étend en un foncteur $f_* : P(X) \to P(Y)$, i.e. montrez comment associer à un morphisme $\psi : \mathscr{F}_1 \to \mathscr{F}_2$ de préfaisceaux sur X un morphisme $f_*\psi : f_*\mathscr{F}_1 \to f_*\mathscr{F}_2$. Montrez de même que f^{-1} s'étend en un foncteur $f^{-1} : P(Y) \to P(X)$.

2.6.4 Exercice. Soit $f : X \to Y$ une application continue et $x \in X$ un point.

(1) Soit $\mathscr{F}$ un préfaisceau d'ensembles sur Y. Construisez une bijection naturelle $(f^{-1}\mathscr{F})_x \xrightarrow{\sim} \mathscr{F}_{f(x)}$.

(2) Soit $\mathscr{F}$ un préfaisceau d'ensembles sur X. Construisez une application naturelle $(f_*\mathscr{F})_{f(x)} \to \mathscr{F}_x$ et montrez qu'en général elle n'est ni injective ni surjective.

L'apparition de la limite inductive dans la définition de $f^{-1}\mathscr{F}$ trouve en fait son origine dans la *formule d'adjonction* suivante :

2.6.5 Proposition (Adjonction (f^{-1}, f_*)). Si $f : X \to Y$ est continue, on a une bijection

$$\mathrm{Hom}_{P(X)}(f^{-1}\mathscr{G}, \mathscr{F}) = \mathrm{Hom}_{P(Y)}(\mathscr{G}, f_*\mathscr{F})$$

fonctorielle en les préfaisceaux $\mathscr{F} \in P(X)$ et $\mathscr{G} \in P(Y)$.

Démonstration : On construit d'abord deux flèches naturelles $\eta : \mathscr{G} \to f_*f^{-1}\mathscr{G}$ et $\epsilon : f^{-1}f_*\mathscr{F} \to \mathscr{F}$. Pour η, on observe que comme l'ouvert $V \subset Y$ contient $f(f^{-1}V)$, on a une application

$$\mathscr{G}(V) \to (f_*f^{-1}\mathscr{G})(V) = (f^{-1}\mathscr{G})(f^{-1}(V)) = \varinjlim_{W \supset f(f^{-1}V)} \mathscr{G}(W)$$

qui à $s \in \mathscr{G}(V)$ associe sa classe d'équivalence dans la limite inductive. La construction de ϵ est laissée en exercice. La bijection annoncée se construit ainsi : à un morphisme $u : f^{-1}\mathscr{G} \to \mathscr{F}$ on associe la composée $v = f_*u \circ \eta : \mathscr{G} \to f_*f^{-1}\mathscr{G} \to f_*\mathscr{F}$. Réciproquement, à un morphisme $v : \mathscr{G} \to f_*\mathscr{F}$ on associe $u = \epsilon \circ f^{-1}v$. La preuve du fait que ces deux flèches sont inverses l'une de l'autre est laissée en exercice. Il reste à montrer que la bijection est fonctorielle en $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$. Cela découle essentiellement du fait que $\eta = \eta_{\mathscr{G}}$ et $\epsilon = \epsilon_{\mathscr{F}}$ sont fonctorielles. Ceci signifie (pour η) qu'à tout morphisme $\varphi : \mathscr{G}_1 \to \mathscr{G}_2$ de préfaisceaux sur Y est associé un carré commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{G}_1 \arrow[r, "\eta_{\mathscr{G}_1}"] \arrow[d, "\varphi"'] & f_*f^{-1}\mathscr{G}_1 \arrow[d, "f_*f^{-1}\varphi"] \\
\mathscr{G}_2 \arrow[r, "\eta_{\mathscr{G}_2}"] & f_*f^{-1}\mathscr{G}_2.
\end{tikzcd}$$

La preuve de ces faits est laissée en exercice. □

2.6.6 Exercice. Décrivez le morphisme de préfaisceaux $\epsilon : f^{-1}f_*\mathscr{F} \to \mathscr{F}$ puis vérifez que les applications $u \mapsto f_*u \circ \alpha$ et $v \mapsto \beta \circ f^{-1}v$ sont inverses l'une de l'autre.

2.6.7 Remarque. Insistons sur le fait que les propriétés formelles (fonctorielles, catégoriques) des objets qu'on manipule sont fondamentales. En l'occurrence, nous venons de rencontrer un exemple de la notion générale d'adjonction dans une catégorie : on dit que deux foncteurs $F : C \to D$ et $G : D \to C$ sont *adjoints* s'il existe une bijection $\mathrm{Hom}_D(FX, Y) = \mathrm{Hom}_C(X, GY)$ fonctorielle en $X \in C$ et $Y \in D$ (on peut parler aussi d'un *isomorphisme de bifoncteurs*). On dit que F est adjoint à gauche de G, et G adjoint à droite de F. On montre que si F (resp. G) possède un adjoint à gauche (resp. à droite), alors celui-ci est unique à isomorphisme unique près. Voir [Mac], chap. IV, § 1. De nombreux exemples sont familiers, en voici deux grandes familles (voir exercice 2.6.8) :

(1) les adjoints à gauche de foncteurs d'oubli, appelés foncteurs d'*objets libres.*

(2) les adjoints à gauche d'inclusions de catégories, ou *réflecteurs.*

Pour revenir aux préfaisceaux, la définition de $f_*\mathscr{F}$ est naturelle et c'est la formule d'adjonction qui guide la définition de $f^{-1}\mathscr{F}$.

2.6.8 Exercice. (1) *Objets libres.* Montrez que le foncteur qui associe à un ensemble I le groupe libre sur l'ensemble de générateurs I est un adjoint à gauche du foncteur d'oubli qui associe à un groupe son ensemble sous-jacent. Montrez que le foncteur qui associe à un ensemble I l'algèbre de polynômes $A[(X_i)_{i\in I}]$ est un adjoint à gauche du foncteur d'oubli qui associe à une A-algèbre commutative unitaire son ensemble sous-jacent.

(2) *Réflecteurs.* Montrez que le foncteur corps de fractions est adjoint à gauche de l'inclusion de la catégorie des corps commutatifs dans la catégorie des anneaux commutatifs intègres avec pour morphismes les injections d'anneaux. Montrez que le foncteur d'abélianisation $G \mapsto G/[G,G]$ est adjoint à gauche de l'inclusion de la catégorie des groupes abéliens dans celle de tous les groupes (ici $[G,G]$ est le groupe dérivé). Montrez que le foncteur $M \mapsto M/M_{\text{tor}}$ est adjoint à gauche de l'inclusion de la catégorie des $\mathbb{Z}$-modules sans torsion dans celle de tous les $\mathbb{Z}$-modules (ici M_{tor} est le sous-module de torsion).

Table des matières