Introduction à la Géométrie Algébrique. Le langage des schémas

Cours du 13 septembre 2016

Après ce petit rappel, nous poursuivons par quelques exemples.

2.1.3 Exemples. (1) Le spectre de $\mathbb{Z}$ est composé de l'idéal (0) et de tous les idéaux (p) engendrés par les nombres premiers p.

(2) La droite affine $\mathbb{A}^1_k$ sur un corps k est le spectre de l'anneau de polynômes $k[t]$. Comme celui-ci est principal, la description est semblable à celle du spectre de $\mathbb{Z}$. On trouve que l'ensemble $\mathbb{A}^1_k$ est composé de (0) et de tous les idéaux (p) engendrés par les polynômes irréductibles unitaires. Si k est algébriquement clos, les polynômes irréductibles sont de la forme $t-a$ avec $a \in k$, si bien que $\mathbb{A}^1_k = \{0\} \cup k$. Par rapport à la variété classique, on n'a ajouté que le point (0).

(3) Le plan affine $\mathbb{A}^2_k$. Pour simplifier, nous nous limitons au cas d'un corps algébriquement clos. Notons $A = k[x,y]$ l'anneau de polynômes en deux variables. Alors les idéaux premiers de A sont :

— l'idéal $p = (0)$ qui est un premier minimal ;
— les idéaux de la forme $p = (f)$ où f est un polynôme irréductible ;
— les idéaux de la forme $m = (x-a, y-b)$ pour un $(a,b) \in k^2$, qui sont les idéaux maximaux.

Démontrons ceci. Soit p un idéal premier. Si $p = (0)$ on a le premier type.

Si $p \neq (0)$, il contient un élément $f \in A$ non nul. En décomposant f en facteurs irréductibles, comme p est premier, on voit que l'un des facteurs est dans p. Quitte à remplacer f par ce facteur, on peut supposer f irréductible. Comme A est factoriel, l'idéal (f) est premier. Si $p = (f)$, on obtient les premiers du deuxième type.

Si $p \neq (f)$, il contient un élément $g \notin (f)$. Par le même raisonnement que précédemment, p contient un des facteurs irréductibles π de g, et nécessairement $\pi \notin (f)$. Quitte à remplacer g par π, on peut supposer g irréductible. On a donc trouvé f, g irréductibles distincts tels que $(f,g) \subset p$. Nous allons montrer qu'on peut de plus supposer que $f \in k[x]$ et $g \in k[y]$. Supposons que $f, g \notin k[x]$ et notons $R = k[x]$ et K son corps de fractions. D'après le théorème de Gauss sur la factorialité de $R[y]$, dans $K[y]$ les éléments f, g sont encore irréductibles distincts. Or $K[y]$ est un anneau principal, donc par le théorème de Bézout il existe $u, v \in K$ tels que $uf + vg = 1$. En chassant les dénominateurs de u et v on trouve $r, s, t \in k[x]$ tels que $rf + sg = t$. Ceci montre que p contient un polynôme en x. De même, on montre que p contient un polynôme en y. Quitte à remplacer ces polynômes par un de leurs facteurs irréductibles convenable (même raisonnement que précédemment), on peut les supposer irréductibles. On les note encore $f = f(x)$ et $g = g(y)$ pour simplifier. Comme k est algébriquement clos, il existe $a, b \in k$ tels que $f = x - a$ et $g = y - b$. Comme $(x-a, y-b)$ est maximal, finalement $p = (x-a, y-b)$. Ce sont les premiers du troisième type.

2.1.4 Fonctions régulières. Une des idées fortes de la théorie est que les élements $f \in A$ sont pensés comme des fonctions sur $X = \mathrm{Spec}(A)$. On appelle donc A l'*anneau des fonctions régulières* sur X. Si $x \in X$, le *germe de f en x* noté f_x est l'image de f dans l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$, et la *valeur de f en x* notée $f(x)$ est l'image de f dans le corps résiduel $\kappa(x)$ par l'application $A \to A/p \to \mathrm{Frac}(A/p)$.

Une fonction régulière prend donc ses valeurs dans des corps variables ; ce n'est pas une fonction au sens usuel, mais ce n'est pas très grave. Prenons l'exemple de $A = \mathbb{Z}$. Alors $X = \{(0), (2), (3), (5), \ldots\}$ et les corps résiduels sont $\mathbb{Q}$, $\mathbb{F}_2$, $\mathbb{F}_3$, $\mathbb{F}_5$, etc. La fonction $f = 28$ prend les valeurs $f(0) = 28 \in \mathbb{Q}$, $f(2) = 0 \in \mathbb{F}_2$, $f(3) = 1 \in \mathbb{F}_3$, $f(5) = 3 \in \mathbb{F}_5$, etc.

Des conditions telles que $f(x) = 0$, ou $f(x) \neq 0$, ou $f(x) = 1$, ont un sens sans référence au corps $\kappa(x)$. Il est équivalent de dire que $f(x) \neq 0$ pour tout $x \in X$, ou que f est inversible dans A : en effet, si f n'est pas inversible, d'après le lemme de Zorn il est inclus dans un idéal maximal p, et on a $f(x) = 0$ pour $x = [p] \in X$; la réciproque est immédiate.

Pour conclure ces quelques mots sur les fonctions régulières, revenons sur le cas où A est de type fini sur un corps algébriquement clos k. Alors, pour tout idéal maximal $m \subset A$ on a $A/m \simeq k$ de sorte que dans ce cas $f \in A$ définit une véritable fonction $f : \mathrm{Spm}(A) \subset \mathrm{Spec}(A) \to k$.

2.1.5 Exercice. Notons A_{red} l'anneau réduit de A, quotient de A par son nilradical (ensemble des éléments nilpotents). Soit $X_{\mathrm{red}} = \mathrm{Spec}(A_{\mathrm{red}})$. Montrez que la flèche induite $X_{\mathrm{red}} \to X$ est une bijection. Indication : le nilradical est l'intersection de tous les premiers de A ([Mat], chap. 1, th. 1.2).

2.2 L'espace topologique d'un schéma affine

2.2.1 Les fermés. Soit I un idéal de A. Nous identifierons systématiquement les premiers qui contiennent I et les premiers de A/I. Un *fermé* de $X = \mathrm{Spec}(A)$ est par définition une partie de la forme

$$V(I) = \{p\, ; p \supset I\} = \mathrm{Spec}(A/I).$$

Il est immédiat de vérifier que les $V(I)$ sont les fermés d'une topologie, appelée la *topologie de Zariski* de X. En fait, c'est la topologie définie exactement pour que les fonctions régulières $f \in A$ aient pour ensembles d'annulation des fermés (comme toute honnête fonction continue). On a $V(I) = X$ ssi I est inclus dans le nilradical, et $V(I) = \varnothing$ ssi $I = A$. Le schéma affine X_{red} est un fermé de X, et la flèche canonique $X_{\mathrm{red}} \to X$ est un homéomorphisme.

2.2.2 Les ouverts. Les ouverts de X sont les parties $D(I) = X \smallsetminus V(I)$. Comme $V(I) = \cap_{f \in I} V(f)$, on a $D(I) = \cup_{f \in I} D(f)$. Les ouverts de la forme

$$D(f) = X \smallsetminus V(f) = \{p\, ; p \not\ni f\}$$

forment donc une base de la topologie de X. Ils sont particulièrement importants car ils sont eux-mêmes spectres d'anneaux. En effet, pour une partie multiplicative $S \subset A$, les premiers de A disjoints de S s'identifient aux premiers de $S^{-1}A$. Ainsi, si l'on note $A_f = A[1/f]$ le localisé de A par rapport à la partie multiplicative $S = \{1, f, f^2, \ldots\}$, on a $D(f) = \mathrm{Spec}(A_f)$. Les $D(f)$ sont appelés ouverts *distingués*, ou *principaux* de X.

2.2.3 Spectre et morphismes. Si $\varphi : A \to B$ est un morphisme d'anneaux, l'application $\mathrm{Spec}(\varphi) : \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$ est continue, puisque la préimage du fermé $V(I)$ est le fermé $V(IB)$.

2.2.4 Propriétés de compacité. La topologie de Zariski sur un spectre $X = \mathrm{Spec}(A)$ est assez différente de la topologie d'espaces plus familiers, comme les espaces métriques. L'étude la compacité nous sera utile plus tard : l'espace X est-il séparé (au sens de l'axiome de Hausdorff : deux points quelconques possèdent des voisinages ouverts disjoints) et quasi-compact (de tout recouvrement ouvert on peut extraire un sous-recouvrement fini) ? Voici les réponses.

La séparation n'a presque jamais lieu. Par exemple, lorsque A est intègre, l'espace topologique $X = \mathrm{Spec}(A)$ est irréductible puisque (voir exercice 1.3.3) chaque ouvert non vide est dense : en fait, le point correspondant à l'idéal premier $p = (0)$ appartient à tous les ouverts non vides, et il est lui-même dense.

La quasi-compacité, en revanche, est toujours vérifiée. En effet, soit $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement de X par des ouverts. Quitte à le raffiner par un recouvrement par des ouverts principaux, on peut supposer que $U_i = D(f_i)$. Si l'idéal $I \subset A$ engendré par les f_i est distinct de A, d'après le lemme de Zorn il est inclus dans un idéal maximal m, et ceci est impossible, car le point $[m] \in X$ appartient à l'un des ouverts $D(f_i)$, ce qui signifie que $f_i \notin m$. On en déduit que $I = A$. En particulier $1 \in I$, donc il existe une écriture $1 = a_1 f_1 + \cdots + a_n f_n$ pour certains $a_i \in A$. On voit alors que $X = D(f_1) \cup \cdots \cup D(f_n)$ ce qui produit un sous-recouvrement fini, d'où la quasi-compacité.

2.2.5 Exemple. Utilisant le fait que $\mathbb{Z}$ et l'anneau de polynômes $k[t]$ sont principaux, on vérifie facilement que pour $X = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ ou pour $X = \mathbb{A}^1_k$ (avec k un corps), les fermés de X sont X tout entier et les ensembles finis.

2.2.6 Exercice. Soit $X = \mathbb{A}^2_k$ le plan affine sur un corps k. Pour chacun des trois types de points $x \in X$, décrits dans 2.1.3, calculez l'adhérence $\overline{\{x\}}$.

2.2.7 Exercice. Soient $f, g \in A$. Montrez que les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) $D(f) \subset D(g)$,

(2) le morphisme de localisation $A \to A_f$ se factorise à travers un morphisme $A_g \to A_f$,

(3) l'image de g dans A_f est inversible,

(4) il existe $a \in A$ et $n \geqslant 1$ entier tels que $f^n = ag$.

Montrez que $D(f) = D(g)$ si et seulement si $A_g \to A_f$ est un isomorphisme.

Il nous faut maintenant introduire quelques notions sur les faisceaux. Le vocabulaire des catégories, que nous avons évité jusqu'ici, donnera un cadre très utile pour présenter ces notions.

2.3 Interlude 1 : catégories et foncteurs

La théorie des catégories est basée sur l'idée que dans l'étude d'une famille donnée d'objets mathématiques, les applications entre ces objets sont au moins aussi importantes que les objets eux-mêmes. Ce phénomène est déjà visible pour les ensembles algébriques et les algèbres de type fini, vus précédemment. Nous utiliserons seulement les notions de base sur les catégories. Des références possibles pour compléter ces quelques éléments sont les livres de MacLane [Mac] et Leinster [Le].

2.3.1 Définition. Une *catégorie* C est la donnée de :
— une classe (ou collection) $\mathrm{Ob}(C)$ dont les éléments sont appelés *objets* de C, [2]

2. La nature mathématique (classe ou ensemble) de $\mathrm{Ob}(C)$ est un point délicat qui est traité différemment selon les auteurs. Expliquons ceci très brièvement avec l'exemple de la catégorie des ensembles, i.e. la catégorie notée Ens dont les objets sont les ensembles et les applications sont les simples applications ensemblistes. Pour certains auteurs, on peut prendre pour $\mathrm{Ob}(\mathrm{Ens})$ la classe de *tous* les ensembles ; elle ne peut alors pas elle-même être un ensemble, à cause du paradoxe de Russell. Pour d'autres, comme la notion de *classe* vit aux frontières (floues) de la théorie des ensembles, il est préférable de travailler avec une catégorie (U-Ens) dont les objets, les ensembles éléments d'un *univers* U fixé, forment un véritable ensemble. On pourra lire [Mac], chap. I, § 6 pour plus de détails.

— des ensembles notés $\mathrm{Hom}_C(X,Y)$ dont les éléments sont appelés *morphismes* ou *flèches* entre X et Y, pour chaque paire d'objets X,Y,
— des applications $\mathrm{Hom}_C(X,Y) \times \mathrm{Hom}_C(Y,Z) \to \mathrm{Hom}_C(X,Z)$ appelées *compositions* et notées $(f,g) \mapsto g \circ f$, pour chaque triplet d'objets X,Y,Z, qui forment une loi associative possédant des élements neutres à droite et à gauche notés $\mathrm{id}_X \in \mathrm{Hom}_C(X,X)$ et appelés *identités*, pour tout objet X de C.

On note souvent $X \in \mathrm{Ob}(C)$ ou simplement $X \in C$ pour dire que X est un objet de C. On note souvent $f : X \to Y$ au lieu de $f \in \mathrm{Hom}_C(X,Y)$. On note souvent gf au lieu de $g \circ f$.

2.3.2 Exemples. (1) La catégorie des ensembles notée Ens, la catégorie des groupes, la catégorie des variétés différentielles, etc.

(2) À toute catégorie C on peut associer sa catégorie *opposée* C^{op} définie par $\mathrm{Ob}(C^{\mathrm{op}}) = \mathrm{Ob}(C)$ et $\mathrm{Hom}_{C^{\mathrm{op}}}(X,Y) = \mathrm{Hom}_C(Y,X)$.

2.3.3 Définition. Soit C une catégorie. Une *sous-catégorie* D de C est la donnée d'une sous-classe d'objets $\mathrm{Ob}(D)$ de $\mathrm{Ob}(C)$ et, pour chaque paire d'objets $X,Y \in C$ d'un sous-ensemble $\mathrm{Hom}_D(X,Y) \subset \mathrm{Hom}_C(X,Y)$, telle que D contient les identités et est stable par composition. On dit que D est une sous-catégorie *pleine* si $\mathrm{Hom}_D(X,Y) = \mathrm{Hom}_C(X,Y)$ pour tous X,Y.

2.3.4 Exemples, remarques. (1) La catégorie des groupes abéliens est la sous-catégorie pleine de la catégorie des groupes dont les objets sont les groupes abéliens. (On notera que pour spécifier une sous-catégorie pleine, il suffit de spécifier ses objets.)

(2) La catégorie des espaces vectoriels avec pour morphismes les applications linéaires *injectives* est une sous-catégorie non pleine de la catégorie des espaces vectoriels usuelle (i.e. avec pour morphismes toutes les applications linéaires).

2.3.5 Définition. Soit C une catégorie et $f : X \to Y$ un morphisme dans C. On dit que f est :
— un *monomorphisme* (ou simplement un *mono*) si pour toute paire de morphismes $g,h : W \to X$ telle que $fg = fh$, on a $g = h$.
— un *épimorphisme* (ou simplement un *épi*) si pour toute paire de morphismes $g,h : Y \to Z$ telle que $gf = hf$, on a $g = h$.
— un *isomorphisme* (ou simplement un *iso*) s'il existe $g : Y \to X$ tel que $gf = \mathrm{id}_X$ et $fg = \mathrm{id}_Y$.

2.3.6 Exercice. (1) Dans une catégorie C, un iso est mono et épi.

(2) Dans la catégorie des ensembles, les monos, épis, isos sont les injections, surjections, bijections, respectivement. En particulier, un morphisme qui est mono et épi est iso.

(3) Dans la catégorie des anneaux commutatifs unitaires, le morphisme d'inclusion $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ est un mono et un épi, mais pas un iso. Dans la catégorie des variétés différentielles, l'application $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ d'élévation au cube est un mono et un épi mais pas un iso.

2.3.7 Définition. Soient C,D deux catégories. Un *foncteur* $F : C \to D$ est la donnée de :
— un objet $F(X) \in D$ pour chaque objet $X \in C$,
— un morphisme $F(f) : F(X) \to F(Y)$ pour chaque morphisme $f : X \to Y$ dans C,

de telle sorte que $F(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{FX}$ et $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$ pour tous f, g composables.

Un *foncteur contravariant* de C dans D est un foncteur $F : C^{\mathrm{op}} \to D$; à chaque morphisme $f : X \to Y$ dans C il associe donc un morphisme $F(f) : F(Y) \to F(X)$.

2.3.8 Remarques. (1) On peut composer deux foncteurs $F : C \to D$ et $G : D \to E$ de manière évidente. (Il y a en fait une catégorie des catégories, dont les morphismes sont les foncteurs.)

(2) Il est fréquent de définir un foncteur en donnant seulement les valeurs $F(X)$ des objets, lorsque les valeurs $F(f)$ des morphismes sont faciles à trouver avec le contexte. Par exemple, si C est une catégorie et $X \in C$ un objet fixé, on définit un foncteur $F : C \to \mathrm{Ens}$ en posant $F(Y) = \mathrm{Hom}_C(X, Y)$. (Comment est défini $F(f)$, pour un morphisme $f : Y_1 \to Y_2$?) De même, si Y est fixé, on définit un foncteur $G : C^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ens}$ en posant $G(X) = \mathrm{Hom}_C(X, Y)$. (Même question.) On dit que Hom est un bifoncteur, contravariant en la première variable, covariant en la seconde.

(3) On prendra garde au fait que l'image d'un foncteur (définie de la manière naturelle) n'est pas une sous-catégorie en général.

2.3.9 Définition. Soit $F : C \to D$ un foncteur. On dit que F est un *isomorphisme de catégories* s'il existe un foncteur $G : D \to C$ tel que $G \circ F = \mathrm{id}_C$ et $F \circ G = \mathrm{id}_D$.

La notion d'isomorphisme de catégories est naturelle, mais elle est souvent trop rigide dans les applications. Voici un exemple. Avec un corps k fixé, considérons la catégorie C des k-espaces vectoriels de dimension finie, avec pour morphismes les isomorphismes k-linéaires. Utilisant la notion de dimension, on voit que les *classes d'isomorphisme* d'éléments de C forment un ensemble qui est en bijection avec $\mathbb{N}$. Si on voit $\mathbb{N}$ comme une catégorie dont les objets sont les entiers naturels et les morphismes sont réduits aux identités id_n pour $n \in \mathbb{N}$, on peut même étendre la dimension en un foncteur $\dim : C \to \mathbb{N}$. Cependant, ce foncteur ne peut pas être un isomorphisme, car il n'existe pas de bijection entre la classe (énorme, non dénombrable) des espaces vectoriels et l'ensemble $\mathbb{N}$. Au mieux existe-t-il un foncteur $G : \mathbb{N} \to C$ qui associe à $n \in \mathbb{N}$ l'espace vectoriel canonique k^n. Mais on n'a pas $G \circ \dim = \mathrm{id}_C$, car un espace vectoriel de dimension n est *isomorphe*, mais non *égal à*, l'espace k^n. La notion adaptée pour décrire cet exemple et bien d'autres est celle d'équivalence de catégories.

2.3.10 Définition. Soient $F, G : C \to D$ deux foncteurs de mêmes source et but. Une *transformation naturelle*, ou simplement *morphisme de foncteurs* $u : F \to G$ est la donnée d'un morphisme $u(X) : F(X) \to G(X)$ pour tout $X \in C$, de telle sorte que $G(\alpha) \circ u(X) = u(Y) \circ F(\alpha)$ pour tout morphisme $\alpha : X \to Y$ dans C.

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "u(X)"] \arrow[d, "F(\alpha)"'] & G(X) \arrow[d, "G(\alpha)"] \\ F(Y) \arrow[r, "u(Y)"] & G(Y) \end{tikzcd}$$

On peut composer les morphismes de foncteurs de manière naturelle. Les foncteurs de C vers D forment ainsi une catégorie $\mathrm{Fonct}(C, D)$. On dispose donc de la notion générale d'isomorphisme : un morphisme de foncteurs $u : F \to G$ est un iso lorsqu'il existe $v : G \to F$ tel que $v \circ u = \mathrm{id}_F$ et $u \circ v = \mathrm{id}_G$.

2.3.11 Définition. Une *équivalence de catégories* est un foncteur $F : C \to D$ tel qu'il existe un foncteur $G : D \to C$ et des isomorphismes de foncteurs $G \circ F \xrightarrow{\sim} \mathrm{id}_C$ et $F \circ G \xrightarrow{\sim} \mathrm{id}_D$. Le foncteur G est alors appelé un *quasi-inverse* pour F.

Dans ce cas, le foncteur $G : D \to C$ est aussi une équivalence, appelée *inverse* de F. Citons Awodey [Awo], page 148 : *Experience has shown that the mathematically significant properties of objects are those that are invariant under isomorphisms, and in category theory, identity of objects is a much less important relation than isomorphism. So it is really equivalence of categories that is the more important notion of "similarity" for categories. One can think of equivalence of categories as "isomorphism up to isomorphism."*

2.3.12 Définition. Soit $F : C \to D$ un foncteur. On dit que F est
— *plein* si les applications $\mathrm{Hom}_C(X,Y) \to \mathrm{Hom}_D(FX,FY)$ sont injectives,
— *fidèle* si les applications $\mathrm{Hom}_C(X,Y) \to \mathrm{Hom}_D(FX,FY)$ sont surjectives,
— *pleinement fidèle* s'il est plein et fidèle.
On dit que F est *essentiellement surjectif* si tout $Y \in D$ est isomorphe à FX, pour un $X \in C$.

Par exemple, toute sous-catégorie $D \subset C$ détermine un foncteur d'inclusion $i : D \to C$ qui est fidèle mais n'est plein que si D est une sous-catégorie pleine.

2.3.13 Lemme. *Un foncteur $F : C \to D$ est une équivalence si et seulement s'il est pleinement fidèle et essentiellement surjectif.*

Démonstration : Voir [Le], Prop. 1.3.18 ou [Mac], chap. IV, § 4, th. 1 ou [Awo], Prop. 7.25. Noter que la partie « si » utilise une forme forte de l'axiome du choix. ☐

2.3.14 Exercice. Soit C une catégorie telle que pour tous $X, Y \in C$ il existe un unique morphisme $X \to Y$. Soit C_0 la catégorie composée d'un seul objet avec un seul morphisme, l'identité de cet objet. Montrez qu'il existe un unique foncteur $C \to C_0$ et que c'est une équivalence de catégories.

Pour conclure cette brève introduction aux catégories en revenant à notre sujet, signalons que si k est un corps algébriquement clos, alors les foncteurs $X \mapsto \Gamma(X)$ et $A \mapsto \mathrm{Spm}(A)$ sont des équivalences de catégories inverses entre la catégorie des ensembles algébriques affines sur k et la catégorie des k-algèbres de type fini réduites.

Table des matières

1 Contexte et motivation **2**
1.1 Constructions fondamentales en géométrie et en théorie des nombres 2
1.2 Variétés algébriques classiques 2
1.3 L'idée des schémas 4

2 Définition des schémas **5**
2.1 L'ensemble sous-jacent à un schéma affine 5
2.2 L'espace topologique d'un schéma affine 9
2.3 Interlude 1 : catégories et foncteurs 10