Introduction à la Géométrie Algébrique. Le langage des schémas

Cours du 6 septembre 2016

Références

[Géométrie algébrique]

[EH] D. Eisenbud, J. Harris, *The geometry of schemes*, Graduate Texts in Math. 197, Springer-Verlag, 2000.

[GW] U. Görtz, T. Wedhorn, *Algebraic Geometry 1, Schemes with examples and exercises*, Advanced Lectures in Mathematics, Vieweg-Teubner, 2010.

[Har] R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, Graduate Texts in Math. 52, Springer-Verlag, 1977.

[Liu] Q. Liu, *Algebraic geometry and arithmetic curves*, Oxford Graduate Texts in Math. no. 6, Oxford University Press, 2002.

[Mu] D. Mumford, *The red book of varieties and schemes*, Second edition, Lecture Notes in Mathematics 1358, Springer-Verlag, 1999.

[Per] D. Perrin, *Géométrie Algébrique, une introduction*, EDP Sciences - CNRS éditions, 2001.

[Algèbre commutative]

[Ei] D. Eisenbud, *Commutative algebra with a view toward algebraic geometry*, Graduate Texts in Math., Springer-Verlag, 1995.

[Mat] H. Matsumura, *Commutative ring theory*, Cambridge Studies in Advanced Math. 8, Cambridge University Press, 1989.

[Na] M. Nagata, *Local rings*, Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, No. 13 Interscience Publishers, John Wiley & Sons, 1962.

[Théorie des catégories et théorie des ensembles]

[Le] T. Leinster, *Basic category theory*, Cambridge Studies in Advanced Math. 143. Cambridge University Press, 2014.

[Mac] S. MacLane, *Categories for the working mathematician*, Graduate Texts in Math. no. 5, Springer-Verlag, 1978.

[Awo] S. Awodey, *Category Theory*, Oxford University Press, 2006.

[Hal] P. Halmos, *Introduction à la théorie des ensembles*, Gauthier-Villars, 1967.

$\therefore$

Dans ce cours, tous les anneaux considérés sont commutatifs et unitaires.

1 Contexte et motivation

1.1 Constructions fondamentales en géométrie et en théorie des nombres

Une théorie mathématique féconde se développe à partir d'exemples fondamentaux, le plus souvent assez simples, et de certaines constructions naturelles qui amènent à en considérer de nouveaux, plus compliqués. Souvent, le cadre choisi initialement est trop restreint pour que toutes ces constructions puissent se faire, et c'est en essayant de l'élargir que certaines des plus grandes découvertes mathématiques ont été faites (les distributions, les groupes, les variétés abstraites, etc).

Ainsi, en géométrie différentielle, la droite réelle $\mathbb{R}$, l'intervalle $[0, 1]$, le cercle S^1 sont des exemples fondamentaux, et on en fabrique de nouveaux à l'aide de constructions telles que :

1. produits,
2. restrictions à un ouvert,
3. identifications et recollements,
4. ensembles d'applications, groupes d'automorphismes (etc),
5. « noyaux » (ensembles de zéros) et « images »,
6. intersections,
7. quotients et points fixes par des actions de groupes,
8. ensembles de paramètres (espaces projectifs, grassmanniennes),
9. fibrations (recollement d'espaces produits)...

De même, en théorie des nombres, l'anneau des entiers $\mathbb{Z}$ et son corps des fractions $\mathbb{Q}$ sont des exemples fondamentaux et au nombre des constructions naturelles, on trouve :

1. la localisation en un nombre premier,
2. la complétion,
3. la clôture intégrale,
4. l'étude de certains sous-groupes (ex : inversibles, carrés...),
5. le passage à une extension finie et la théorie de Galois,
6. le passage à une clôture algébrique...

La géométrie algébrique a été hantée depuis Kronecker (1823-1891) par le désir de trouver un cadre assez large pour contenir les constructions naturelles de la géométrie algébrique « classique » (c'est-à-dire antérieure à 1959) et de la théorie des nombres. La théorie des schémas réalise ce désir.

Dans la suite de cette section 1, pour expliquer l'idée des schémas, nous allons rappeler brièvement ce que sont les variétés algébriques classiques. Pour ces rappels, on peut se reporter au chapitre I du livre de D. Perrin [Per], ou au chapitre 1 de Hartshorne [Har].

1.2 Variétés algébriques classiques

1.2.1 Variétés affines. Soit k un corps algébriquement clos. Les *ensembles algébriques affines* sont les lieux de zéros communs de polynômes $f_1, \dots, f_r \in k[t_1, \dots, t_n]$:

$$X = \{x \in k^n ; f_1(x) = \cdots = f_r(x) = 0\}.$$

L'ensemble X est muni de la *topologie de Zariski* dont les fermés sont les ensembles algébriques affines inclus dans X. L'espace affine $\mathbb{A}^n(k) = k^n$ est un exemple, et tout ensemble algébrique affine est fermé dans un espace affine. On dit que X est une *variété affine* s'il est irréductible, i.e. s'il est non vide et n'est pas réunion de deux fermés propres (l'exercice 1.3.3 situé à la fin de cette section donne des détails sur la notion d'irréductibilité). Par exemple, la courbe $X \subset \mathbb{A}^2(k)$ d'équation $y^2 = x^3 + 1$ est irréductible, alors que la courbe d'équation $xy = 0$ est réductible, avec deux composantes irréductibles d'équations $x = 0$ et $y = 0$. Un *morphisme* entre deux ensembles algébriques affines $X \subset \mathbb{A}^n(k)$, $Y \subset \mathbb{A}^m(k)$ est une application induite par une application à composantes polynomiales $\mathbb{A}^n(k) \to \mathbb{A}^m(k)$. À un ensemble algébrique affine X on associe l'idéal $\mathfrak{a}_X \subset k[t_1, \dots, t_n]$ des fonctions nulles sur X, et l'*anneau des fonctions régulières* :

$$\Gamma(X) = k[t_1, \dots, t_n]/\mathfrak{a}_X.$$

Celui-ci est réduit, i.e. sans élément nilpotent (non nul). De plus X est une variété ssi $\Gamma(X)$ est intègre. Si $Y \subset X$ est un fermé, son idéal $\mathfrak{a}_Y$ contient $\mathfrak{a}_X$, et l'anneau des fonctions régulières $\Gamma(Y)$ est donc un quotient de $\Gamma(X)$. Si $u : X \to Y$ est un morphisme, toute fonction f sur Y induit une fonction $\Gamma(u) = f \circ u$ sur X, de sorte qu'on obtient un morphisme de k-algèbres $\Gamma(Y) \to \Gamma(X)$.

Le Nullstellensatz (théorème des zéros) de Hilbert permet de reconstruire X à partir de $A = \Gamma(X)$. Il affirme que tout idéal maximal $m \subset A$ est de la forme $m = (t_1 - x_1, \dots, t_n - x_n)$ pour un unique point $x \in X$. Le morphisme d'évaluation $\mathrm{ev}_x : A \to k$, $f \mapsto f(x)$, surjectif de noyau m, identifie alors A/m à k. On est amené à associer à toute k-algèbre de type fini A son *spectre maximal* :

$$\mathrm{Spm}(A) = \{\text{idéaux maximaux de } A\}.$$

Un fermé de Zariski de $\mathrm{Spm}(A)$ s'identifie à un ensemble $\mathrm{Spm}(A/I)$ pour un idéal $I \subset A$. Grâce au Nullstellensatz, la préimage d'un idéal maximal par un morphisme de k-algèbres de type fini $\varphi : A \to B$ est un idéal maximal. On peut donc définir une application $\mathrm{Spm}(\varphi) : \mathrm{Spm}(B) \to \mathrm{Spm}(A)$ par $n \mapsto \varphi^{-1}(n)$. On obtient un dictionnaire qui s'exprime presque par des bijections :

$$\big\{\text{ensembles algébriques affines sur } k\big\} \underset{\mathrm{Spm}(A) \leftarrow\!\shortmid A}{\overset{V \mapsto \Gamma(V)}{\rightleftarrows}} \big\{k\text{-algèbres de type fini réduites}\big\}.$$

J'écris « presque » car les objets de part et d'autre ne sont pas des ensembles ; le bon cadre pour formuler cela est celui des catégories, nous y reviendrons.

1.2.2 Exemples. La droite affine $V = \mathbb{A}^1(k)$ a pour anneau de fonctions $A = k[T]$, la courbe plane $W \subset \mathbb{A}^2(k)$ d'équation $y^2 = x^3$ a pour anneau de fonctions $B = k[X, Y]/(Y^2 - X^3)$, et le morphisme d'ensembles algébriques $\varphi : V \to W$ défini par $\varphi(t) = (t^2, t^3)$ correspond au morphisme de k-algèbres $\psi : k[X, Y]/(Y^2 - X^3) \to k[T]$ qui envoie X sur T^2 et Y sur T^3. Il est important d'être très à l'aise avec ce dictionnaire. Ici j'ai utilisé des petites lettres pour les points et des grandes lettres pour les fonctions (les indéterminées des polynômes), mais quand on sera à l'aise je n'utiliserai généralement que des petites lettres car cela donne des écritures plus légères.

1.2.3 Exercice. On notera que la correspondance entre espaces et anneaux de fonctions est un phénomène classique qui existe dans d'autres contextes. Voici un exemple. Soit X un espace topologique compact et A l'anneau des fonctions continues de X dans $\mathbb{R}$. Pour $x \in X$, on note $m_x = \{f \in A ; f(x) = 0\}$. Montrez que $X \to \mathrm{Spm}(A)$, $x \mapsto m_x$ est un homéomorphisme. On pourra consulter [Ei], chapitre 1, exercice 1.25.

1.2.4 Variétés abstraites. Les géomètres classiques étudiaient également les ensembles algébriques projectifs (ou quasi-projectifs), c'est-à-dire fermés (ou localement fermés) dans l'espace projectif $\mathbb{P}^n(k)$. Le livre de A. Weil, *Foundations of Algebraic Geometry* publié en 1946 a introduit les ensembles algébriques abstraits, que l'on peut définir comme des espaces topologiques X possédant un recouvrement ouvert par des ensembles algébriques affines X_i. Les variétés algébriques abstraites sont les ensembles algébriques abstraits qui sont irréductibles, comme ci-dessus. Un morphisme $f : X \to Y$ entre deux tels ensembles est une application continue telle qu'il existe des recouvrements ouverts $X = \cup X_i$, $Y = \cup Y_j$ par des ensembles algébriques affines $X_i \subset \mathbb{A}^{n_i}(k)$ et $Y_j \subset \mathbb{A}^{m_j}(k)$, et des applications à composantes polynomiales $f_{i,j} : \mathbb{A}^{n_i}(k) \to \mathbb{A}^{m_j}(k)$ satisfaisant $f_{i,j}(X_i) \subset Y_j$ et $f_{|X_i} = f_{i,j}$.

1.3 L'idée des schémas

1.3.1 Schémas affines. Dans le membre de droite de la correspondance

$$\big\{\text{ensembles algébriques affines sur } k\big\} \rightleftarrows \big\{k\text{-algèbres de type fini réduites}\big\},$$

les restrictions imposées aux anneaux (être une algèbre sur un corps algébriquement clos ; de type fini ; réduite) sont des obstacles pour traiter de nombreuses questions géométriques et arithmétiques. Ce n'est qu'après les avoir levés que, au sein de la théorie des schémas :

1. l'intersection schématique de la parabole $\{y = x^2\}$ et de la droite $\{y = a\}$ dans le plan complexe sera de cardinal 2 même lorsque $a = 0$,
2. les variétés sur des corps non algébriquement clos et qui n'ont aucun point (sous-entendu sur le corps), comme la conique réelle $x^2 + y^2 + 1 = 0$, ne seront pas plus pathologiques que les autres,
3. la catégorie des groupes algébriques commutatifs sur un corps quelconque sera *abélienne* i.e. vérifiera d'aussi bonnes propriétés que la catégorie des groupes commutatifs (existence de noyaux et images, théorèmes d'isomorphismes, etc),
4. de nombreux espaces de paramètres (espaces projectifs, grassmanniennes, structures complexes sur une surface de genre g) existeront et vérifieront une propriété universelle.

Les schémas affines généralisent donc les ensembles algébriques affines de manière à étendre la correspondance à tous les anneaux :

$$\begin{tikzcd}
\big\{\text{ensembles algébriques affines sur } k\big\} \arrow[r, leftrightarrow, "1-1"] \arrow[d, hook, dashed] & \big\{k\text{-algèbres de type fini réduites}\big\} \arrow[d, hook] \\
\big\{\text{schémas affines}\big\} \arrow[r, leftrightarrow, dashed, "1-1"] & \big\{\text{anneaux}\big\}.
\end{tikzcd}$$

1.3.2 Schémas. Les schémas sont ensuite obtenus à partir des schémas affines par le même procédé de globalisation que celui qui permet de définir les variétés algébriques abstraites générales à partir des ensembles algébriques affines. Nous reviendrons plus loin sur les idées de *globalisation* et de *recollement*. Pour l'instant, le point de vue qui nous sera utile passe par quelques rappels de géométrie différentielle. Soit M un espace topologique. Une structure de *variété différentielle* sur M est définie par une collection de *cartes* qui sont des homéomorphismes $\phi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^n$ sur des ouverts U_α

recouvrant M, tels que les *changements de cartes* $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}$ soient des difféomorphismes entre ouverts convenables de $\mathbb{R}^n$. On pourrait même prendre tous les U_α égaux à la boule unité ouverte de rayon 1.

En géométrie algébrique cette définition ne fonctionne pas bien, car les variétés algébriques ne possèdent pas des bases d'ouverts tous isomorphes, en fait pas même homéomorphes (leur *structure locale* est plus variée). On contourne cette difficulté de la manière suivante.

On définit les *fonctions différentiables* sur un ouvert $U \subset M$ comme les $f : U \to \mathbb{R}$ telles que $f \circ \phi_\alpha^{-1}$ est une fonction différentiable de $\phi_\alpha(U \cap U_\alpha) \subset \mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}$, pour tout α. On note $\mathcal{O}(U)$ l'anneau composé par ces fonctions. La collection $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}(U)\}_{U \subset M}$ est un exemple de ce qu'on appelle un *faisceau*; elle détermine la structure de variété différentielle sur M, puisque les cartes $\phi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^n$ sont déterminées par leurs fonctions coordonnées $\phi_{\alpha,1}, \dots, \phi_{\alpha,n}$ qui sont éléments de $\mathcal{O}(U_\alpha)$. On peut donc représenter une variété différentielle comme une paire $(M, \mathcal{O})$ composée d'un espace topologique et un faisceau d'anneaux, localement isomorphe à $(\mathbb{R}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{R}^n})$ [1].

C'est ce modèle qui servira pour la définition d'un schéma. Notre programme dans cette première section est le suivant : introduire les schémas affines, les faisceaux, et les « espaces localement annelés » qui donnent le cadre pour la définition générale d'un schéma.

1.3.3 Exercice. Soit X un espace topologique. Montrez que les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) $X \neq \varnothing$ et X n'est pas réunion de deux fermés stricts,

(2) $X \neq \varnothing$ et deux ouverts non vides de X ont une intersection non vide,

(3) $X \neq \varnothing$ et tout ouvert non vide de X est dense,

(4) $X \neq \varnothing$ et tout ouvert de X est connexe.

Lorsqu'elles sont remplies, on dit que X est *irréductible*. Soit X quelconque et $Y \subset X$ une partie. Montrez que Y est irréductible si et seulement si son adhérence $\overline{Y}$ est irréductible.

2 Définition des schémas

2.1 L'ensemble sous-jacent à un schéma affine

Notations de base sur les idéaux : soient $\varphi : A \to B$ un morphisme d'anneaux, I un idéal de A, J un idéal de B. On note IB l'idéal engendré par $\varphi(I)$ dans B. On note $\varphi^{-1}(J)$ l'idéal préimage de J par φ; on le note aussi souvent $J \cap A$ même lorsque q n'est pas injectif. On dit souvent « un premier » au lieu de « un idéal premier ».

2.1.1 Le spectre premier d'un anneau. Comme expliqué dans 1, on souhaite passer de certaines algèbres de type fini très particulières aux anneaux généraux. La définition du spectre maximal ne nécessite aucune hypothèse sur A, mais pour les anneaux quelconques, celui-ci contient trop peu d'information sur A. Un problème se pose notamment si l'on veut associer à tout morphisme d'anneaux $\varphi : A \to B$ un morphisme $\mathrm{Spm}(\varphi) : \mathrm{Spm}(B) \to \mathrm{Spm}(A)$, car en général $\varphi^{-1}(n)$ n'est pas

1. Voir la page wikipedia `https://en.wikipedia.org/wiki/Differentiable_manifold` pour une discussion des différentes approches de la définition d'une variété différentielle.

maximal, même si $n \subset B$ est maximal. (Exemple : l'inclusion $\varphi : \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$.) Ce problème ne se pose pas avec les idéaux premiers et avec le *spectre premier* de A :

$$\operatorname{Spec}(A) = \{\text{idéaux premiers de } A\}.$$

En effet, si $q \subset B$ est premier, l'injection $A/\varphi^{-1}(q) \hookrightarrow B/q$ montre que $\varphi^{-1}(q) \subset A$ est premier. On a donc une application $\operatorname{Spec}(\varphi) : \operatorname{Spec}(B) \to \operatorname{Spec}(A)$, $q \mapsto \varphi^{-1}(q)$. Nous aurons d'autres occasions de voir pourquoi le spectre premier est plus naturel que le spectre maximal.

On pense à $\operatorname{Spec}(A)$ comme un *espace*, i.e. un objet géométrique. Un idéal premier $p \subset A$ définit un point de cet espace, noté $[p]$. Dans un souci de clarté, on évite le plus souvent de mélanger les notations de l'algèbre commutative et celles de la géométrie. Ainsi, si $X = \operatorname{Spec}(A)$, on notera souvent x plutôt que $[p]$ le point correspondant à un premier $p \subset A$.

Soit $X = \operatorname{Spec}(A)$ et $x = [p]$. On appelle *anneau local de x* l'anneau localisé $\mathcal{O}_{X,x} := A_p = S^{-1}A$ avec $S = A \smallsetminus p$. C'est un anneau local d'idéal maximal $m_x := pA_p$. On appelle *corps résiduel de x* le corps $\kappa(x) := \mathcal{O}_{X,x}/m_x = A_p/pA_p = \operatorname{Frac}(A/p)$.

La notion de localisation en l'algèbre commutative a fait son apparition, et comme nous l'utiliserons en permanence, nous insérons un bref rappel sous forme d'une proposition.

2.1.2 Proposition. *Soient A un anneau et $S \subset A$ une partie multiplicative i.e. contenant* 1 *et stable par multiplication.*

(1) *Il existe un anneau $S^{-1}A$ et un morphisme d'anneaux $u : A \to S^{-1}A$, appelé* localisé de A par rapport à S*, tel que :*

(i) *pour tout $s \in S$, l'image $u(s)$ est inversible,*

(ii) *pour tout morphisme d'anneaux $f : A \to B$ tel que les éléments de $f(S)$ sont inversibles, il existe un unique morphisme d'anneaux $f' : S^{-1}A \to B$ tel que $f = f' \circ u$.*

(2) *Soit M un A-module. Il existe un $S^{-1}A$-module $S^{-1}M$ et un morphisme de A-modules $v : M \to S^{-1}M$, appelé* localisé de M par rapport à S*, tel que :*

(i) *pour tout $s \in S$, l'endomorphisme de multiplication $u(s) : S^{-1}M \to S^{-1}M$, $mx \mapsto u(s)x$ est un isomorphisme,*

(ii) *pour tout morphisme de A-modules $g : M \to N$ tel que $g(s) : N \to N$ est un isomorphisme pour tout $s \in S$, il existe un unique morphisme de A-modules $g' : S^{-1}M \to N$ tel que $g = g' \circ v$.*

(3) *Les applications $I \mapsto S^{-1}I$ et $J \mapsto J \cap A$ établissent des bijections entre l''ensemble des idéaux $I \subset A$ qui ne rencontrent pas S et l'ensemble des idéaux $J \subset S^{-1}A$ distincts de $S^{-1}A$. Ces bijections préservent les ensembles d'idéaux premiers de part et d'autre.*

Démonstration : (1) L'idée est que les éléments de $S^{-1}A$ sont les fractions a/s avec $a \in A$ et s_inS, avec pour opérations l'addition et la multiplication habituelles dans le calcul des fractions. Pour le construire précisément, on considère l'ensemble des couples $(a, s) \in A \times S$ que l'on munit de la relation d'équivalence suivante : $(a, s) \sim (a', s')$ si et seulement s'il existe $t \in S$ tel que $t(s'a - sa') = 0$. (Si S ne contient pas de diviseur de 0, l'élément t n'est pas utile, mais en toute généralité il est nécessaire pour qu'on ait bien une relation d'équivalence.) On note a/s la classe d'équivalence de (a, s). On définit $u : A \to S^{-1}A$ par $u(a) = a/1$. Si $s \in S$, il est clair que $u(s) = s/1$ est inversible d'inverse

$1/s$. Enfin pour vérifier la propriété universelle, si $f : A \to B$ est tel que les éléments de $f(S)$ sont inversibles, on définit $f' : S^{-1}A \to B$ par $f'(a/s) = f'(a)f(s)^{-1}$.

(2) On procède comme ci-dessus pour construire $S^{-1}M$ comme quotient de l'ensemble des couples (m, s) par la relation d'équivalence : « $(m, s) \sim (m', s')$ ssi il existe $t \in S$ tel que $t(s'm - sm') = 0$ », définir les opérations sur $S^{-1}M$ comme on pense, vérifier que c'est naturellement un $S^{-1}A$-module, définir v par $v(m) = m/1$, et enfin vérifier la propriété universelle.

(3) Exercice. Voir par exemple [Ei], chap. 2. □

Après ce petit rappel, nous poursuivons par quelques exemples.

2.1.3 Exemples. (1) Le spectre de $\mathbb{Z}$ est composé de l'idéal (0) et de tous les idéaux (p) engendrés par les nombres premiers p.

(2) La droite affine $\mathbb{A}^1_k$ sur un corps k est le spectre de l'anneau de polynômes $k[t]$. Comme celui-ci est principal, la description est semblable à celle du spectre de $\mathbb{Z}$. On trouve que l'ensemble $\mathbb{A}^1_k$ est composé de (0) et de tous les idéaux (p) engendrés par les polynômes irréductibles unitaires. Si k est algébriquement clos, les polynômes irréductibles sont de la forme $t - a$ avec $a \in k$, si bien que $\mathbb{A}^1_k = \{0\} \cup k$. Par rapport à la variété classique, on n'a ajouté que le point (0).

Table des matières