Introduction à la Géométrie Algébrique. Le langage des schémas

Sujet d'examen, à rendre pour le mardi 24 novembre 2015

— *La notation accordera beaucoup d'importance à la clarté et à la précision des arguments et des références aux théorèmes utilisés.* —

Exercice 1 Soient X un schéma et $x \in X$ un point. Montrez que pour toute famille finie $U_1, \ldots, U_n$ de voisinages ouverts affines de x, il existe un voisinage ouvert affine de x qui est principal dans chacun des U_i. Montrez que le résultat n'est plus nécessairement vrai pour une famille infinie $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$.

Corrigé. Nous allons montrer le résultat par récurrence sur $n \geqslant 1$. Pour $n = 1$, il n'y a rien à démontrer. L'étape inductive utilisera le cas $n = 2$, donc nous le démontrons maintenant. Soient $U = \operatorname{Spec}(A)$ et $V = \operatorname{Spec}(B)$ deux ouverts affines de X contenant x. Notons $p \subset A$ et $q \subset B$ les idéaux premiers tels que $x = [p] = [q]$. Comme les ouverts principaux $D_U(f) = \operatorname{Spec}(A_f)$ forment une base de la topologie de U, il existe $f \in A$ tel que $\operatorname{Spec}(A_f) \subset V$ et cet ouvert contient x. Comme les ouverts principaux $D_V(g) = \operatorname{Spec}(B_g)$ forment une base de la topologie de V, il existe $g \in B$ tel que $\operatorname{Spec}(B_g) \subset \operatorname{Spec}(A_f)$ et cet ouvert contient x. Comme les morphismes entre schémas affines sont induits par des morphismes d'anneaux, on dipose donc de deux morphismes $u : B \to A_f$ et $v :\to B_g$ dont la composition est le morphisme de localisation canonique $B \to B_g$. Soient $a \in A$ et $m \in \mathbb{N}$ tels que $u(g) = a/f^m$. Alors l'image de $u(g)$ par le morphisme de localisation $i : A_f \to A_{af}$ est inversible, donc $i \circ u$ induit un morphisme $w : B_g \to A_{af}$. Par ailleurs on sait que $v(a/f^m) = v(u(g)) = g$ donc $v(a) = gv(f^m)$ est inversible dans B_g. On en déduit que v induit un morphisme $t : A_{af} \to B_g$. Par construction, les morphismes w et t sont inverses l'un de l'autre, donc les ouverts principaux $D_U(af)$ et $D_V(g)$ sont égaux comme ouverts de X et il contiennent x. On a terminé le cas $n = 2$. Passons au cas d'ouverts $U_1, \ldots, U_n$ avec $n \geqslant 3$. Par l'hypothèse de récurrence, il existe un voisinage ouvert V_1 de x qui est principal dans $U_1, \ldots, U_{n-1}$. D'après le cas $n = 2$, il existe un voisinage ouvert V_2 qui est principal dans V_1 et U_n. Comme un ouvert principal d'un ouvert principal d'un schéma affine Y est lui-même un ouvert principal de Y, l'ouvert affine V_2 est principal dans $U_1, \ldots, U_{n-1}$ donc dans tous les U_i. On a terminé la récurrence. Enfin, dans le cas d'un nombre infini d'ouverts U_i, en général il n'existe même pas d'ouvert inclus dans tous les U_i. Par exemple, soit $X = \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}} = \operatorname{Spec}(\mathbb{C}[z])$ la droite affine complexe et $U_i = D(z - i)$ l'ouvert complémentaire du point $z = i$, pour i entier. Comme tout ouvert de X est le complémentaire d'un nombre fini de points fermés, aucun n'est inclus dans tous les U_i.

Exercice 2 Soit X un espace topologique. On note Ab la catégorie des groupes abéliens et $\operatorname{Ab}(X)$ la catégorie des faisceaux de groupes abéliens sur X. On fixe un ouvert U et on note $\Gamma_U : \operatorname{Ab}(X) \to \operatorname{Ab}$ le foncteur défini par $\Gamma_U(\mathscr{F}) = \mathscr{F}(U)$.

(1) Le foncteur Γ_U possède-t-il toujours un adjoint à gauche ?

(2) Le foncteur Γ_U possède-t-il toujours un adjoint à droite ?

Corrigé. (1) La réponse est oui. Il s'agit de construire un foncteur $\Phi : \operatorname{Ab} \to \operatorname{Ab}(X)$ tel que pour tout groupe abélien M, tout morphisme $f : M \to \mathscr{F}(U)$ peut être étendu (de manière unique) en un morphisme $f' : \Phi(M) \to \mathscr{F}$. Définissons un préfaisceau $\mathscr{G} = \Phi(M)^{\mathrm{pre}}$ de la manière suivante : on pose $\mathscr{G}(V) = M$ si $V \subset U$ et $\mathscr{G}(V) = 0$ sinon ; et pour toute inclusion d'ouverts $W \subset V$, la restriction $\mathscr{G}(V) \to \mathscr{G}(W)$ est l'identité de M si $V \subset U$ et 0 sinon. Notons $\Phi(M)$ le faisceau associé à $\Phi(M)^{\mathrm{pre}}$. Pour tout morphisme de groupes abéliens $f : M \to \mathscr{F}(U)$, on peut définir un morphisme de préfaisceaux $f_0 : \Phi(M)^{\mathrm{pre}} \to \mathscr{F}$ en posant $f_0(V) = \mathrm{res}_{U,V} \circ f : M \to \mathscr{F}(V)$ si $V \subset U$, et $f_0(V) = 0$ sinon. Comme $\mathscr{F}$ est un faisceau f_0 s'étend en un morphisme de faisceaux $f' : \Phi(M) \to \mathscr{F}$. La vérification du fait que l'on obtient ainsi une bijection $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ab}(X)}(\Phi(M), \mathscr{F}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ab}}(M, \mathscr{F}(U))$ fonctorielle en M et $\mathscr{F}$ est assez formelle, et n'est pas détaillée ici.

(2) La réponse est non. Le problème est que Γ a tendance à détruire la surjectivité : il existe un espace X et un morphisme surjectif de faisceaux de groupes abéliens $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ tel que $\varphi(X) : \mathscr{F}(X) \to \mathscr{G}(X)$ n'est pas surjectif. Supposons choisis un tel X et un tel φ et supposons qu'il existe un adjoint à droite $\Psi : \mathrm{Ab} \to \mathrm{Ab}(X)$ pour Γ_X. Pour tout groupe abélien M, on dispose d'un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ab}(X)}(\mathscr{G}, \Psi(M)) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, hook] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ab}}(\mathscr{G}(X), M) \arrow[d] \\ \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ab}(X)}(\mathscr{F}, \Psi(M)) \arrow[r, "\sim"] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ab}}(\mathscr{F}(X), M) \end{tikzcd}$$

La flèche verticale de gauche est injective car φ est un épimorphisme de faisceaux. En revanche, si on choisit $M = \mathscr{G}(X)/\operatorname{im}(\varphi(X))$, la flèche verticale de droite n'est pas injective, puisque le morphisme de quotient $\mathscr{G}(X) \to \mathscr{G}(X)/\operatorname{im}(\varphi(X)) = M$ est non nul mais son image dans $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ab}}(\mathscr{F}(X), M)$ est nulle. Ceci montre que Γ_X ne peut pas avoir avoir d'adjoint à droite. Il nous reste à donner un exemple de morphisme surjectif de faisceaux $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ tel que $\varphi(X) : \mathscr{F}(X) \to \mathscr{G}(X)$ n'est pas surjectif. On a mentionné en cours les exemples de l'exercice I-10 de Eisenbud-Harris. Voici un autre exemple. Soit k un corps et $X = \mathbb{A}^2_k \smallsetminus \{0\}$ le complémentaire de l'origine dans le plan affine $\mathbb{A}^2_k = \mathrm{Spec}(k[s,t])$. (On sait d'après le cours que le foncteur Γ préserve la surjectivité pour les morphismes de faisceaux quasi-cohérents sur un schéma affine ; c'est pourquoi on choisit un schéma X non affine, cf exercice 2.1.10 du cours.) En recouvrant X par les ouverts $D(s)$ et $D(t)$ on voit facilement que $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) = k[s,t]$. Notons $i : Y \hookrightarrow X$ l'immersion du sous-schéma fermé $Y = V(t) = \mathbb{A}^1_k \smallsetminus \{0\} = \mathrm{Spec}(k[s, 1/s])$. Le morphisme surjectif de faisceaux $\varphi : \mathcal{O}_X \to i_*\mathcal{O}_Y$ a pour sections globales le morphisme non surjectif $\varphi(X) : k[s,t] \to k[s,1/s]$ déterminé par $s \mapsto s$ et $t \mapsto 0$.

Exercice 3 Soit $n \geqslant 1$ un entier. Pour tout schéma S, on pose $\mathcal{A}_S = \mathcal{O}_S^{\oplus n}$ et on note e_i le i-ième vecteur de la base canonique de $\Gamma(S, \mathcal{A}_S) = \Gamma(S, \mathcal{O}_S)^{\oplus n}$. On appelle *$\mathcal{O}_S$-algèbre (associative, unitaire) libre de rang n* la donnée d'un morphisme de faisceaux $m : \mathcal{A}_S \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{A}_S \to \mathcal{A}_S$ qui munit $\mathcal{A}_S$ d'une structure de $\mathcal{O}_S$-algèbre associative avec e_1 pour unité. Pour tout morphisme de schémas $f : S' \to S$, on dispose d'une image inverse naturelle $m' = f^*m$ qui fait de $\mathcal{A}_{S'}$ une $\mathcal{O}_{S'}$-algèbre libre de rang n.

(1) En observant qu'un morphisme m comme ci-dessus est déterminé par les images des $e_i \otimes e_j$, démontrez qu'il existe un schéma X_n et une bijection fonctorielle en S :

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sch}}(S, X_n) \xrightarrow{\ \sim\ } \big\{\mathcal{O}_S\text{-algèbres associatives, unitaires, libres de rang } n\big\}.$$

(2) Décrivez X_n pour $n = 2$. Est-il réduit ? irréductible ?

(3) Décrivez X_n pour $n = 3$. Est-il réduit ? irréductible ?

Corrigé. (1) Un morphisme de faisceaux arbitraire $m : \mathcal{A}_S \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{A}_S \to \mathcal{A}_S$ est déterminé par les n^3 sections $a_{i,j,k} \in \Gamma(S, \mathcal{O}_S)$, avec $i,j,k \in \{1,\dots,n\}$, telles que $m(e_i \otimes e_j) = \sum_{k=1}^n a_{i,j,k} e_k$. Ce morphisme définit une loi de composition associative si et seulement si $m(m(e_i \otimes e_j) \otimes e_l) = m(e_i \otimes m(e_j \otimes e_l))$ pour tous $i,j,l \in \{1,\dots,n\}$. Ceci s'écrit :

$$\sum_{t=1}^n \sum_{k=1}^n a_{i,j,k} a_{k,l,t} e_t = \sum_{t=1}^n \sum_{s=1}^n a_{j,l,s} a_{i,s,t} e_t$$

ou encore $\sum_{k=1}^n a_{i,j,k}a_{k,l,t} = \sum_{s=1}^n a_{j,l,s}a_{i,s,t}$ pour tous i, j, l, t. Par ailleurs le morphisme m définit une loi de composition avec e_1 pour unité si et seulement si $m(e_i \otimes e_1) = m(e_1 \otimes e_i) = e_i$ pour tout i, c'est-à-dire si et seulement si $a_{i,1,l} = \delta_{i,l}$ et $a_{1,j,l} = \delta_{j,l}$ pour tous i, j, l. Notons $A = (A_{i,j,k})$ un n^3-uplet de variables et pour tous $i, j, l, t \in \{1, \dots, n\}$ introduisons :

(i) le polynôme quadratique $f_{i,j,l,t}(A) = \sum_{k=1}^n A_{i,j,k}A_{k,l,t} - \sum_{s=1}^n A_{j,l,s}A_{i,s,t}$,

(ii) les polynômes $g_{i,l}(A) = A_{i,1,l} - \delta_{i,l}$ et $h_{j,l}(A) = A_{1,j,l} - \delta_{j,l}$.

On vient de voir ci-dessus qu'un morphisme $m : \mathcal{A}_S \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{A}_S \to \mathcal{A}_S$ est une loi associative, d'unité e_1, si et seulement si les constantes $a_{i,j,k}$ telles que $m(e_i \otimes e_j) = \sum_{k=1}^n a_{i,j,k}e_k$ sont des zéros communs des polynômes $f_{i,j,l,t}$, $g_{i,l}$, $h_{j,l}$. Posons :

$$R_n = \frac{\mathbb{Z}[(A_{i,j,k})_{1 \leqslant i,j,k \leqslant n}]}{(f_{i,j,l,t}, g_{i,l}, h_{j,l})_{1 \leqslant i,j,l,t \leqslant n}}$$

et $X_n = \mathrm{Spec}(R_n)$. D'après ce qui précède, nous avons une bijection entre l'ensemble des structures de $\mathcal{O}_S$-algèbre associative avec e_1 pour unité, et l'ensemble des morphismes d'anneau $u : R_n \to \Gamma(S, \mathcal{O}_S)$, celui-ci étant défini par $u(A_{i,j,k}) = a_{i,j,k}$. D'après la propriété universelle d'un schéma affine (1.8.7 du cours), l'ensemble des morphismes d'anneau mentionné est en bijection avec $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sch}}(S, X_n)$. Par construction, ces bijections sont fonctorielles en S.

(2) Pour $n = 2$, notons $1 := e_1$ et $x := e_2$. Notons aussi e_ie_j au lieu de $m(e_i \otimes e_j)$. Alors la multiplication est entièrement déterminée par la constante $a \in \Gamma(S, \mathcal{O}_S)$ telle que $x^2 = ax + b$. Il n'y a aucune autre contrainte sur a, b et la multiplication ainsi définie est automatiquement associative. Ceci montre que $X_2 = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[A, B]) = \mathbb{A}^2_{\mathbb{Z}}$. Ce schéma est réduit et irréductible.

(3) Pour $n = 3$, notons $1 := e_1$, $x := e_2$, $y = e_3$. Notons aussi ef à la place de $m(e, f)$. Pour faciliter les calculs, nous adopterons les notations suivantes pour les constantes de structure :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x^2 & = & a + bx + cy \\ xy^2 & = & d + ex + fy \\ yx^2 & = & g + hx + iy \\ y^2 & = & j + kx + ly. \end{array} \right.$$

Les conditions d'associativité sont données par les huit conditions suivantes :

$(x^2)x = x(x^2)$	$(x^2)y = x(xy)$	$(xy)x = x(yx)$	$(xy)y = x(y^2)$
$c(d-g) = 0$	$bd + cj = ea + fd$	$ea + fg = ha + id$	$ed + fj = ka + ld$
$c(e-f) = 0$	$be + ck = d + eb + fe$	$d + eb + fh = g + hb + ie$	$e^2 + fk = j + kb + le$
$c(f-i) = 0$	$a + bf + cl = ec + f^2$	$ec + fi = hc + if$	$d + ef + lf = kc + lf$

$(yx)x = y(x^2)$	$(yx)y = y(xy)$	$(y^2)x = y(yx)$	$(y^2)y = y^2(y)$
$ha + ig = bg + cj$	$hd + ij = eg + fj$	$ka + lg = hg + ij$	$k(d-g) = 0$
$g + hb + ih = bh + ck$	$he + ik = eh + fk$	$j + kb + lh = h^2 + ik$	$k(e-h) = 0$
$hc + i^2 = a + bi + cl$	$g + hf + il = d + ei + fl$	$kc + li = g + hi + il$	$k(f-i) = 0$

On peut simplifier ces équations pour obtenir le système équivalent suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a & = & f(f-b) + c(e-l) \\ d & = & ck - ef \\ g & = & ck - hi \\ j & = & k(f-b) + e(e-l) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} c(e-h) = c(f-i) = 0 \\ k(e-h) = k(f-i) = 0 \\ (f+i-b)(e-h) = (f+i-b)(f-i) = 0 \\ (e+h-l)(e-h) = (e+h-l)(f-i) = 0 \end{array} \right.$$

Le premier ensemble d'équations implique que l'anneau de fonctions R_3 de X_3 est un quotient de $A = \mathbb{Z}[b,c,e,f,h,i,k,l]$. Le deuxième ensemble de huit équations engendre un idéal qui est l'idéal produit pq, où $p=(e-h,f-i)$ et $q=(c,k,f+i-b,e+h-l)$. Ainsi $R_3 = \mathbb{Z}[b,c,e,f,h,i,k,l]/pq$.

Montrons que $X_3 = \mathrm{Spec}(R_3)$ n'est pas irréductible, et plus précisément qu'il possède deux composantes irréductibles correspondant aux deux premiers minimaux $p' = pR_3$ et $q' = qR_3$. C'est un petit lemme général : si p,q sont deux idéaux premiers dans un anneau A, alors l'anneau $B = A/pq$ possède deux idéaux premiers minimaux qui sont pB et qB. On observe d'abord que pB et qB sont premiers car $B/pB \simeq A/p$ et $B/qB \simeq A/q$. Par ailleurs, tout idéal premier de B se relève en un idéal premier $r \subset A$ qui contient pq. Or r étant premier, $pq \subset r$ entraîne que $p \subset r$ ou $q \subset r$. Ceci démontre à la fois que pB, qB sont minimaux et ce sont les seuls premiers minimaux dans B.

Montrons ensuite que X_3 est réduit. Le nilradical $\mathrm{Nil}(R_3)$ est égal à l'intersection des idéaux premiers ; dans cette intersection il suffit de considérer les premiers minimaux, donc $\mathrm{Nil}(R_3) = p' \cap q'$. Pour montrer que $\mathrm{Nil}(R_3) = 0$ il suffit donc de montrer que $p \cap q \subset pq$ dans $A = \mathbb{Z}[b,c,e,f,h,i,k,l]$. Soit $F \in A$ un élément de $p \cap q$. Comme $F \in p$ on peut écrire $F = (e-h)G + (f-i)H$ pour certains $G, H \in A$. Comme $F \in q$, son image dans A/q est nulle i.e. $(e-h)\overline{G} + (f-i)\overline{H} = 0$. Or $A/q \simeq \mathbb{Z}[e,f,h,i]$ est un anneau de polynômes en e,f,h,i dans lequel, par exemple par factorialité, l'équation précédente implique qu'il existe $K \in A$ tel que $\overline{G} = (f-i)\overline{K}$ et $\overline{H} = -(e-h)\overline{K}$. En relevant dans A, il existe $L, M \in q$ tels que $G = (f-i)K + L$ et $H = -(e-h)K + M$. On en déduit $F = (e-h)L + (f-i)M$ qui appartient à pq.

Exercice 4 (1) Soit $\alpha : X \to S$ un morphisme de schémas. On suppose qu'il existe un recouvrement ouvert $S = \cup_{i\in I} S_i$ tel que pour tout i le morphisme $\alpha_{|X_i} : X_i \to S_i$ est un isomorphisme, où l'on a noté $X_i = \alpha^{-1}(S_i)$. Montrez que f est un isomorphisme.

(2) Soit X un schéma et $A = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$. Montrez que X est affine si seulement s'il existe $n \geqslant 1$ fonctions $f_1, \dots, f_n \in A$ telles que l'ouvert $X_{f_i} = \{x \in X;\ f_i(x) \neq 0\}$ est un schéma affine et que l'idéal $(f_1, \dots, f_n)$ est égal à A.

Corrigé. (1) Posons $\alpha_i = \alpha_{|X_i} : X_i \to S_i$. Le morphisme α est injectif car si $x, x' \in X$ ont même image $s = \alpha(x) = \alpha(x')$, il existe i tel que $s \in S_i$, et le fait que α_i soit injectif implique $x = x'$. Le morphisme α est surjectif car pour tout $s \in S$, qui appartient à l'un des ouverts S_i, le fait que α_i soit surjectif entraîne qu'il existe $x \in X_i$ tel que $\alpha(x) = s$. Le morphisme α est continu car les ouverts de S qui sont inclus dans l'un des S_i forment une base de la topologie ; il suffit de vérifier que la préimage de l'un de ces ouverts est ouverte, ce qui découle de la continuité de u_i. Enfin α est ouvert car si $U \subset X$ est ouvert, il suffit de tester que $\alpha(U)$ est ouvert en restriction à chacun des S_i et cela résulte alors du fait que α_i est ouverte.

(2) Posons $S = \mathrm{Spec}(A)$. D'après la propriété universelle d'un schéma affine, il existe un morphisme canonique $\alpha_X : X \to S$. Utilisons la question (1) pour montrer que α_X est un isomorphisme. Les f_i induisent des fonctions globales sur S que nous noterons f_i' pour les distinguer des f_i en tant que fonctions globales sur X. Par construction de α_X, on a $f_i = f_i' \circ \alpha_X$ (si on voit les fonctions comme des morphismes $f_i : X \to \mathbb{A}^1$) c'est-à-dire $f_i = \alpha_X^\sharp(f_i')$ (si on voit les fonctions comme des sections du faisceau structural). Posons $S_i = D(f_i')$. Comme l'idéal $(f_1, \dots, f_n)$ est égal à A, les S_i recouvrent S. De plus, l'ouvert $\alpha_X^{-1}(S_i)$ est l'ensemble des $x \in X$ tels que $f_i'(\alpha_X(x)) \neq 0$, c'est-à-dire tels que $f_i(x) \neq 0$. En d'autres termes, on a $\alpha_X^{-1}(S_i) = X_{f_i}$. Par hypothèse ce schéma est affine, donc le morphisme canonique $\alpha_{X_{f_i}} : X_{f_i} \to \mathrm{Spec}(\Gamma(X_{f_i}, \mathcal{O}_{X_{f_i}}))$ est un isomorphisme. Or comme la construction de α_X est fonctorielle en X, on a $\alpha_{X|X_{f_i}} = \alpha_{X_{f_i}}$. Ainsi les restrictions $\alpha_{X|X_{f_i}}$ sont des isomorphismes pour tout i, et d'après (1) le morphisme α_X est un isomorphisme.