

## Introduction à la Géométrie Algébrique. Le langage des schémas

### Table des matières

<b>1</b>	<b>Définition des schémas</b>	<b>3</b>
1.1	Pourquoi les schémas . . . . .	3
1.2	L'ensemble sous-jacent à un schéma affine . . . . .	5
1.3	L'espace topologique d'un schéma affine . . . . .	5
1.4	Interlude 1 : catégories et foncteurs . . . . .	7
1.5	Interlude 2 : faisceaux . . . . .	10
1.6	Le faisceau de fonctions d'un schéma affine . . . . .	14
1.7	Interlude 3 : image directe et image inverse de faisceaux . . . . .	15
1.8	Définition des schémas et des morphismes de schémas . . . . .	18
<b>2</b>	<b>Premières propriétés, premières constructions</b>	<b>20</b>
2.1	Recollement . . . . .	20
2.2	Sous-schémas . . . . .	23
2.3	Fermés irréductibles et points . . . . .	26
2.4	Schémas noethériens . . . . .	29
2.5	Schémas réduits et intègres . . . . .	31
2.6	Produits fibrés . . . . .	32
<b>3</b>	<b>Exemples de schémas</b>	<b>36</b>
3.1	Variétés classiques . . . . .	36
3.2	Schémas sur un corps non algébriquement clos . . . . .	37
3.3	Schémas locaux . . . . .	41
3.4	Schémas non réduits . . . . .	44
3.5	Schémas arithmétiques . . . . .	46
<b>4</b>	<b>Modules sur les schémas</b>	<b>47</b>
4.1	Modules sur les espaces annelés . . . . .	47
4.2	Modules quasi-cohérents sur les schémas . . . . .	49
4.3	Algèbres quasi-cohérentes et spectre relatif . . . . .	53
4.4	Idéaux quasi-cohérents et sous-schémas fermés . . . . .	54
4.5	Modules cohérents . . . . .	56
4.6	Faisceaux inversibles . . . . .	57
<b>5</b>	<b>Morphismes</b>	<b>61</b>
5.1	Morphismes séparés . . . . .	61
5.2	Morphismes affines et quasi-compacts . . . . .	63
5.3	Morphismes de type fini, finis et quasi-finis . . . . .	65
5.4	Morphismes propres . . . . .	66
5.5	Critères valuatifs . . . . .	67
5.6	Aperçu de quelques résultats sur les morphismes de schémas . . . . .	71

## Introduction à la Géométrie Algébrique. Le langage des schémas

Cours du 7 septembre 2015

### Références

[GÉOMÉTRIE ALGÈBRE]

- [EH] D. EISENBUD, J. HARRIS, *The geometry of schemes*, Graduate Texts in Math. 197, Springer-Verlag, 2000.
- [GW] U. GÖRTZ, T. WEDHORN, *Algebraic Geometry 1, Schemes with examples and exercises*, Advanced Lectures in Mathematics, Vieweg-Teubner, 2010.
- [Har] R. HARTSHORNE, *Algebraic geometry*, Graduate Texts in Math. 52, Springer-Verlag, 1977.
- [Liu] Q. LIU, *Algebraic geometry and arithmetic curves*, Oxford Graduate Texts in Math. no. 6, Oxford University Press, 2002.
- [Mu] D. MUMFORD, *The red book of varieties and schemes*, Second edition, Lecture Notes in Mathematics 1358, Springer-Verlag, 1999.
- [Per] D. PERRIN, *Géométrie Algébrique, une introduction*, EDP Sciences - CNRS éditions, 2001.

[ALGÈBRE COMMUTATIVE]

- [Ei] D. EISENBUD, *Commutative algebra with a view toward algebraic geometry*, Graduate Texts in Math., Springer-Verlag, 1995.
- [Mat] H. MATSUMURA, *Commutative ring theory*, Cambridge Studies in Advanced Math. 8, Cambridge University Press, 1989.
- [Na] M. NAGATA, *Local rings*, Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, No. 13 Interscience Publishers, John Wiley & Sons, 1962.

[THÉORIE DES CATÉGORIES ET THÉORIE DES ENSEMBLES]

- [Le] T. LEINSTER, *Basic category theory*, Cambridge Studies in Advanced Math. 143. Cambridge University Press, 2014.
- [Mac] S. MACLANE, *Categories for the working mathematician*, Graduate Texts in Math. no. 5, Springer-Verlag, 1978.
- [Awo] S. AWODEY, *Category Theory*, Oxford University Press, 2006.
- [Hal] P. HALMOS, *Introduction à la théorie des ensembles*, Gauthier-Villars, 1967.

∴

Dans ce cours, tous les anneaux considérés sont commutatifs et unitaires.

# 1 Définition des schémas

## 1.1 Pourquoi les schémas

**1.1.1 Variétés algébriques affines.** Nous rappelons d'abord brièvement ce que sont les variétés algébriques « classiques », qui composaient le sujet d'étude de la géométrie algébrique jusqu'à la fin des années 1950, puis nous expliquons la place que sont venus occuper les schémas au côté de celles-ci. Pour ces rappels, on peut se reporter à un cours de M1 d'algèbre et géométrie, ou au chapitre I du livre de D. Perrin [Per], ou au chapitre 1 de Hartshorne [Har].

Soit  $k$  un corps algébriquement clos. En géométrie algébrique classique, on étudie les *ensembles algébriques affines*, qui sont les lieux de zéros communs de polynômes  $f_1, \dots, f_r \in k[t_1, \dots, t_n]$  :

$$X = \{x \in k^n; f_1(x) = \dots = f_r(x) = 0\}.$$

L'ensemble  $X$  est muni de la *topologie de Zariski* dont les fermés sont les ensembles algébriques affines inclus dans  $X$ . L'espace affine  $\mathbb{A}^n(k) = k^n$  est un exemple, et tout ensemble algébrique affine est fermé dans un espace affine. On dit que  $X$  est une *variété affine* s'il est irréductible, i.e. s'il est non vide et n'est pas réunion de deux fermés propres. Par exemple, la courbe  $X \subset \mathbb{A}^2(k)$  d'équation  $y^2 = x^3 + 1$  est irréductible, alors que la courbe d'équation  $xy = 0$  est réductible, avec deux composantes irréductibles d'équations  $x = 0$  et  $y = 0$ . Un *morphisme* entre deux ensembles algébriques affines  $X \subset \mathbb{A}^n(k)$ ,  $Y \subset \mathbb{A}^m(k)$  est une application induite par une application à composantes polynomiales  $\mathbb{A}^n(k) \rightarrow \mathbb{A}^m(k)$ . À un ensemble algébrique affine  $X$  on associe l'idéal  $\mathfrak{a}_X \subset k[t_1, \dots, t_n]$  des fonctions nulles sur  $X$ , et l'*anneau des fonctions régulières* :

$$\Gamma(X) = k[t_1, \dots, t_n]/\mathfrak{a}_X.$$

Celui-ci est réduit, i.e. sans élément nilpotent (non nul). De plus  $X$  est une variété ssi  $\Gamma(X)$  est intègre. Si  $Y \subset X$  est un fermé, son idéal  $\mathfrak{a}_Y$  contient  $\mathfrak{a}_X$ , et l'anneau des fonctions régulières  $\Gamma(Y)$  est donc un quotient de  $\Gamma(X)$ . Si  $u : X \rightarrow Y$  est un morphisme, toute fonction  $f$  sur  $Y$  induit une fonction  $\Gamma(u) = f \circ u$  sur  $X$ , de sorte qu'on obtient un morphisme de  $k$ -algèbres  $\Gamma(Y) \rightarrow \Gamma(X)$ .

Le Nullstellensatz (théorème des zéros) de Hilbert permet de reconstruire  $X$  à partir de  $A = \Gamma(X)$ . Il affirme que tout idéal maximal  $m \subset A$  est de la forme  $(t_1 - x_1, \dots, t_n - x_n)$  pour un unique point  $x \in X$ . Le morphisme de quotient  $A \rightarrow A/m \simeq k$  s'identifie alors au morphisme d'évaluation  $f \mapsto f(x)$ . On est amené à associer à toute  $k$ -algèbre de type fini  $A$  son *spectre maximal* :

$$\mathrm{Spm}(A) = \{\text{idéaux maximaux de } A\}.$$

Un fermé de Zariski de  $\mathrm{Spm}(A)$  s'identifie à un ensemble  $\mathrm{Spm}(A/I)$  pour un idéal  $I \subset A$ . Grâce au Nullstellensatz, la préimage d'un idéal maximal par un morphisme de  $k$ -algèbres de type fini  $\varphi : A \rightarrow B$  est un idéal maximal. On peut donc définir une application  $\mathrm{Spm}(\varphi) : \mathrm{Spm}(B) \rightarrow \mathrm{Spm}(A)$  par  $n \mapsto \varphi^{-1}(n)$ . Les applications  $V \mapsto \Gamma(V)$  et  $A \mapsto \mathrm{Spm}(A)$  donnent une bijection

$$\{\text{ensembles algébriques affines sur } k\} \xleftarrow{1-1} \{k\text{-algèbres de type fini réduites}\}.$$

**1.1.2 Schémas affines.** Dans le membre de droite, les restrictions imposées aux anneaux (être une algèbre sur un corps algébriquement clos; de type fini; réduite) sont des obstacles pour traiter de nombreuses questions géométriques et arithmétiques. Il est souhaitable de les lever. Les schémas

affines réalisent ce souhait : ils généralisent les ensembles algébriques affines de manière à étendre la correspondance bijective :

$$\begin{array}{ccc}
 \{\text{ensembles algébriques affines sur } k\} & \xleftarrow{1-1} & \{k\text{-algèbres de type fini réduites}\} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \{\text{schémas affines}\} & \xleftarrow{1-1} & \{\text{anneaux}\}.
 \end{array}$$

On notera que la correspondance entre espaces et anneaux de fonctions est un phénomène classique qui existe dans d'autres contextes. L'exercice suivant présente un exemple.

**1.1.3 Exercice.** Soit  $X$  un espace topologique compact et  $A$  l'anneau des fonctions continues de  $X$  dans  $\mathbb{R}$ . Pour  $x \in X$ , on note  $m_x = \{f \in A; f(x) = 0\}$ . Montrez que  $X \rightarrow \text{Spm}(A), x \mapsto m_x$  est un homéomorphisme. On pourra consulter [Ei], chapitre 1, exercice 1.25.

**1.1.4 Schémas.** Les schémas sont ensuite obtenus à partir des schémas affines par le même procédé de globalisation que celui qui permet de définir les variétés algébriques abstraites générales à partir des ensembles algébriques affines. Nous reviendrons plus loin sur les idées de *globalisation* et de *recollement*. Pour l'instant, le point de vue qui nous sera utile passe par quelques rappels de géométrie différentielle. Soit  $M$  un espace topologique. Une structure de *variété différentielle* sur  $M$  est définie par une collection de *cartes* qui sont des homéomorphismes  $\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$  sur des ouverts  $U_\alpha$  recouvrant  $M$ , tels que les *changements de cartes*  $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}$  soient des difféomorphismes entre ouverts convenables de  $\mathbb{R}^n$ . On définit les *fonctions différentiables* sur un ouvert  $U \subset M$  comme les  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  telles que  $f \circ \phi_\alpha^{-1}$  est une fonction différentiable de  $\phi_\alpha(U \cap U_\alpha) \subset \mathbb{R}^n$  vers  $\mathbb{R}$ , pour tout  $\alpha$ . On note  $\mathcal{O}(U)$  l'anneau composé par ces fonctions. La collection  $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}(U)\}_{U \subset M}$  est un exemple de ce qu'on appelle un *faisceau*; elle détermine la structure de variété différentielle sur  $M$ , puisque les cartes  $\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$  sont déterminées par leurs fonctions coordonnées  $\phi_{\alpha,1}, \dots, \phi_{\alpha,n}$  qui sont éléments de  $\mathcal{O}(U_\alpha)$ .

On peut donc représenter une variété différentielle comme une paire  $(M, \mathcal{O})$  composée d'un espace topologique et un faisceau d'anneaux, localement isomorphe à  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{R}^n})$ . Cette approche est discutée par exemple dans la page wikipedia consacrée aux variétés différentiables, voir ici. C'est ce modèle qui servira pour la définition d'un schéma. Notre programme dans cette première section est le suivant : introduire les schémas affines, les faisceaux, et les « espaces localement annelés » qui donnent le cadre pour la définition générale d'un schéma.

**1.1.5 Exercice.** Soit  $X$  un espace topologique. Montrez que les conditions suivantes sont équivalentes :

- (1)  $X \neq \emptyset$  et  $X$  n'est pas réunion de deux fermés stricts,
- (2)  $X \neq \emptyset$  et deux ouverts non vides de  $X$  ont une intersection non vide,
- (3)  $X \neq \emptyset$  et tout ouvert non vide de  $X$  est dense,
- (4)  $X \neq \emptyset$  et tout ouvert de  $X$  est connexe.

Lorsqu'elles sont remplies, on dit que  $X$  est *irréductible*. Soit  $X$  quelconque et  $Y \subset X$  une partie. Montrez que  $Y$  est irréductible si et seulement si son adhérence  $\overline{Y}$  est irréductible.

## 1.2 L'ensemble sous-jacent à un schéma affine

**1.2.1 Le spectre premier d'un anneau.** Comme expliqué dans 1.1, on souhaite passer de certaines algèbres de type fini très particulières aux anneaux généraux. La définition du spectre maximal ne nécessite aucune hypothèse sur  $A$ , mais pour les anneaux quelconques, celui-ci contient trop peu d'information sur  $A$ . Un problème se pose notamment si l'on veut associer à tout morphisme d'anneaux  $\varphi : A \rightarrow B$  un morphisme  $\text{Spm}(\varphi) : \text{Spm}(B) \rightarrow \text{Spm}(A)$ , car en général  $\varphi^{-1}(n)$  n'est pas maximal, même si  $n \subset B$  est maximal. (Exemple : l'inclusion  $\varphi : \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ .) Ce problème ne se pose pas avec les idéaux premiers et avec le *spectre premier* de  $A$  :

$$\text{Spec}(A) = \{\text{idéaux premiers de } A\}.$$

En effet, si  $q \subset B$  est premier, l'injection  $A/\varphi^{-1}(q) \hookrightarrow B/q$  montre que  $\varphi^{-1}(q) \subset A$  est premier. On a donc une application  $\text{Spec}(\varphi) : \text{Spec}(B) \rightarrow \text{Spec}(A)$ ,  $q \mapsto \varphi^{-1}(q)$ . Nous aurons d'autres occasions de voir pourquoi le spectre premier est plus naturel que le spectre maximal.

On pense à  $\text{Spec}(A)$  comme un *espace*, i.e. un objet géométrique. Un idéal premier  $p \subset A$  définit un point de cet espace, noté  $[p]$ . Dans un souci de clarté, on évite le plus souvent de mélanger les notations de l'algèbre commutative et celles de la géométrie. Ainsi, si  $X = \text{Spec}(A)$ , on notera souvent  $x$  plutôt que  $[p]$  le point correspondant à un premier  $p \subset A$ .

Soit  $X = \text{Spec}(A)$  et  $x = [p]$ . On appelle *anneau local de  $x$*  l'anneau localisé  $\mathcal{O}_{X,x} := A_p = S^{-1}A$  avec  $S = A \setminus p$ . C'est un anneau local d'idéal maximal  $m_x := pA_p$ . On appelle *corps résiduel de  $x$*  le corps  $\kappa(x) := \mathcal{O}_{X,x}/m_x = A_p/pA_p = \text{Frac}(A/p)$ .

**1.2.2 Fonctions régulières.** Une des idées fortes de la théorie est que les éléments  $f \in A$  sont pensés comme des fonctions sur  $X = \text{Spec}(A)$ . On appelle donc  $A$  l'*anneau des fonctions régulières* sur  $X$ . Si  $x \in X$ , la *valeur de  $f$  en  $x$*  notée  $f(x)$  est l'image de  $f$  dans le corps résiduel  $\kappa(x)$  par l'application  $A \rightarrow A/p \rightarrow \text{Frac}(A/p)$ . Une fonction régulière prend donc ses valeurs dans des corps variables ; ce n'est pas une fonction au sens usuel, mais ce n'est pas très grave. Prenons l'exemple de  $A = \mathbb{Z}$ . Alors  $X = \{(0), (2), (3), (5), \dots\}$  et les corps résiduels sont  $\mathbb{Q}, \mathbb{F}_2, \mathbb{F}_3, \mathbb{F}_5$ , etc. La fonction  $f = 28$  prend les valeurs  $f(0) = 28 \in \mathbb{Q}, f(2) = 0 \in \mathbb{F}_2, f(3) = 1 \in \mathbb{F}_3, f(5) = 3 \in \mathbb{F}_5$ , etc.

Des conditions telles que  $f(x) = 0$ , ou  $f(x) \neq 0$ , ou  $f(x) = 1$ , ont un sens sans référence au corps  $\kappa(x)$ . Il est équivalent de dire que  $f(x) \neq 0$  pour tout  $x \in X$ , ou que  $f$  est inversible dans  $A$  : en effet, si  $f$  n'est pas inversible, d'après le lemme de Zorn il est inclus dans un idéal maximal  $p$ , et on a  $f(x) = 0$  pour  $x = [p] \in X$  ; la réciproque est immédiate. Pour conclure ces quelques mots sur les fonctions régulières, revenons sur le cas où  $A$  est de type fini sur un corps algébriquement clos  $k$ . Alors, pour tout idéal maximal  $m \subset A$  on a  $A/m \simeq k$  de sorte que dans ce cas  $f \in A$  définit une véritable fonction  $f : \text{Spm}(A) \subset \text{Spec}(A) \rightarrow k$ .

**1.2.3 Exercice.** Notons  $A_{\text{red}}$  l'anneau réduit de  $A$ , quotient de  $A$  par son nilradical (ensemble des éléments nilpotents). Soit  $X_{\text{red}} = \text{Spec}(A_{\text{red}})$ . Montrez que la flèche induite  $X_{\text{red}} \rightarrow X$  est une bijection. Indication : le nilradical est l'intersection de tous les premiers de  $A$  ([Mat], chap. 1, th. 1.2).

## 1.3 L'espace topologique d'un schéma affine

**1.3.1 Les fermés.** Soit  $I$  un idéal de  $A$ . Nous identifierons systématiquement les premiers qui contiennent  $I$  et les premiers de  $A/I$ . Un *fermé* de  $X = \text{Spec}(A)$  est par définition une partie de la forme

$$V(I) = \{p ; p \supset I\} = \text{Spec}(A/I).$$

Il est immédiat de vérifier que les  $V(I)$  sont les fermés d'une topologie, appelée la *topologie de Zariski* de  $X$ . En fait, c'est la topologie définie exactement pour que les fonctions régulières  $f \in A$  aient pour ensembles d'annulation des fermés (comme toute honnête fonction continue). On a  $V(I) = X$  ssi  $I$  est inclus dans le nilradical, et  $V(I) = \emptyset$  ssi  $I = A$ . Le schéma affine  $X_{\text{red}}$  est un fermé de  $X$ , et la flèche canonique  $X_{\text{red}} \rightarrow X$  est un homéomorphisme.

**1.3.2 Les ouverts.** Les ouverts de  $X$  sont les parties  $D(I) = X \setminus V(I)$ . Comme  $V(I) = \bigcap_{f \in I} V(f)$ , on a  $D(I) = \bigcup_{f \in I} D(f)$ . Les ouverts de la forme

$$D(f) = X \setminus V(f) = \{p ; p \not\in f\}$$

forment donc une base de la topologie de  $X$ . Ils sont particulièrement importants car ils sont eux-mêmes spectres d'anneaux. En effet, pour une partie multiplicative  $S \subset A$ , les premiers de  $A$  disjoints de  $S$  s'identifient aux premiers de  $S^{-1}A$ . Ainsi, si l'on note  $A_f = A[1/f]$  le localisé de  $A$  par rapport à la partie multiplicative  $S = \{1, f, f^2, \dots\}$ , on a  $D(f) = \text{Spec}(A_f)$ . Les  $D(f)$  sont appelés ouverts *distingués*, ou *principaux* de  $X$ .

**1.3.3 Spectre et morphismes.** Si  $\varphi : A \rightarrow B$  est un morphisme d'anneaux, l'application  $\text{Spec}(\varphi) : \text{Spec}(B) \rightarrow \text{Spec}(A)$  est continue, puisque la préimage du fermé  $V(I)$  est le fermé  $V(\varphi(I))$ .

**1.3.4 Propriétés de compacité.** La topologie de Zariski sur un spectre  $X = \text{Spec}(A)$  est assez différente de la topologie d'espaces plus familiers, comme les espaces métriques. L'étude la compacité nous sera utile plus tard : l'espace  $X$  est-il séparé (au sens de l'axiome de Hausdorff : deux points quelconques possèdent des voisinages ouverts disjoints) et quasi-compact (de tout recouvrement ouvert on peut extraire un sous-recouvrement fini) ? Voici les réponses.

La séparation n'a presque jamais lieu. Par exemple, lorsque  $A$  est intègre, l'espace topologique  $X = \text{Spec}(A)$  est irréductible puisque (voir exercice 1.1.5) chaque ouvert non vide est dense : en fait, le point correspondant à l'idéal premier  $p = (0)$  appartient à tous les ouverts non vides, et il est lui-même dense.

La quasi-compacité, en revanche, est toujours vérifiée. En effet, soit  $(U_i)_{i \in I}$  un recouvrement de  $X$  par des ouverts. Quitte à le raffiner par un recouvrement par des ouverts principaux, on peut supposer que  $U_i = D(f_i)$ . Si l'idéal  $I \subset A$  engendré par les  $f_i$  est distinct de  $A$ , d'après le lemme de Zorn il est inclus dans un idéal maximal  $m$ , et ceci est impossible, car le point  $[m] \in X$  appartient à l'un des ouverts  $D(f_i)$ , ce qui signifie que  $f_i \notin m$ . On en déduit que  $I = A$ . En particulier  $1 \in I$ , donc il existe une écriture  $1 = a_1 f_1 + \dots + a_n f_n$  pour certains  $a_i \in A$ . On voit alors que  $X = D(f_1) \cup \dots \cup D(f_n)$  ce qui produit un sous-recouvrement fini, d'où la quasi-compacité.

**1.3.5 Exercice.** Soient  $f, g \in A$ . Montrez que les conditions suivantes sont équivalentes :

- (1)  $D(f) \subset D(g)$ ,
- (2) le morphisme de localisation  $A \rightarrow A_f$  se factorise à travers un morphisme  $A_g \rightarrow A_f$ ,
- (3) l'image de  $g$  dans  $A_f$  est inversible,
- (4) il existe  $a \in A$  et  $n \geq 1$  entier tels que  $f^n = ag$ .

Montrez que  $D(f) = D(g)$  si et seulement si  $A_g \rightarrow A_f$  est un isomorphisme.

## Introduction à la Géométrie Algébrique. Le langage des schémas

Cours du 14 septembre 2015

Il nous faut maintenant introduire quelques notions sur les faisceaux. Le vocabulaire des catégories, que nous avons évité jusqu'ici, donnera un cadre très utile pour présenter ces notions.

### 1.4 Interlude 1 : catégories et foncteurs

La théorie des catégories est basée sur l'idée que dans l'étude d'une famille donnée d'objets mathématiques, les applications entre ces objets sont au moins aussi importantes que les objets eux-mêmes. Ce phénomène est déjà visible pour les ensembles algébriques et les algèbres de type fini, vus précédemment. Nous utiliserons seulement les notions de base sur les catégories. Des références possibles pour compléter ces quelques éléments sont les livres de MacLane [Mac] et Leinster [Le].

**1.4.1 Définition.** Une *catégorie*  $C$  est la donnée de :

- une classe (ou collection)  $\text{Ob}(C)$  dont les éléments sont appelés *objets* de  $C$ ,<sup>1</sup>
- des ensembles notés  $\text{Hom}_C(X, Y)$  dont les éléments sont appelés *morphismes* ou *flèches* entre  $X$  et  $Y$ , pour chaque paire d'objets  $X, Y$ ,
- des applications  $\text{Hom}_C(X, Y) \times \text{Hom}_C(Y, Z) \rightarrow \text{Hom}_C(X, Z)$  appelées *compositions* et notées  $(f, g) \mapsto g \circ f$ , pour chaque triplet d'objets  $X, Y, Z$ , qui forment une loi associative possédant des éléments neutres à droite et à gauche notés  $\text{id}_X \in \text{Hom}_C(X, X)$  et appelés *identités*, pour tout objet  $X$  de  $C$ .

On note souvent  $X \in \text{Ob}(C)$  ou simplement  $X \in C$  pour dire que  $X$  est un objet de  $C$ . On note souvent  $f : X \rightarrow Y$  au lieu de  $f \in \text{Hom}_C(X, Y)$ . On note souvent  $gf$  au lieu de  $g \circ f$ .

**1.4.2 Exemples.** (1) La catégorie des ensembles notée  $\text{Ens}$ , la catégorie des groupes, la catégorie des variétés différentielles, etc.

(2) À toute catégorie  $C$  on peut associer sa catégorie *opposée*  $C^{\text{op}}$  définie par  $\text{Ob}(C^{\text{op}}) = \text{Ob}(C)$  et  $\text{Hom}_{C^{\text{op}}}(X, Y) = \text{Hom}_C(Y, X)$ .

**1.4.3 Définition.** Soit  $C$  une catégorie. Une *sous-catégorie*  $D$  de  $C$  est la donnée d'une sous-classe d'objets  $\text{Ob}(D)$  de  $\text{Ob}(C)$  et, pour chaque paire d'objets  $X, Y \in C$  d'un sous-ensemble  $\text{Hom}_D(X, Y) \subset \text{Hom}_C(X, Y)$ , telle que  $D$  contient les identités et est stable par composition. On dit que  $D$  est une sous-catégorie *pleine* si  $\text{Hom}_D(X, Y) = \text{Hom}_C(X, Y)$  pour tous  $X, Y$ .

---

1. La nature mathématique (classe ou ensemble) de  $\text{Ob}(C)$  est un point délicat qui est traité différemment selon les auteurs. Expliquons ceci très brièvement avec l'exemple de la catégorie des ensembles, i.e. la catégorie notée  $\text{Ens}$  dont les objets sont les ensembles et les applications sont les simples applications ensemblistes. Pour certains auteurs, on peut prendre pour  $\text{Ob}(\text{Ens})$  la classe de *tous* les ensembles; elle ne peut alors pas elle-même être un ensemble, à cause du paradoxe de Russell. Pour d'autres, comme la notion de *classe* vit aux frontières (floues) de la théorie des ensembles, il est préférable de travailler avec une catégorie ( $U$ - $\text{Ens}$ ) dont les objets, les ensembles éléments d'un univers  $U$  fixé, forment un véritable ensemble. On pourra lire [Mac], chap. I, § 6 pour plus de détails.

**1.4.4 Exemples, remarques.** (1) La catégorie des groupes abéliens est la sous-catégorie pleine de la catégorie des groupes dont les objets sont les groupes abéliens. (On notera que pour spécifier une sous-catégorie pleine, il suffit de spécifier ses objets.)

(2) La catégorie des espaces vectoriels avec pour morphismes les applications linéaires *injectives* est une sous-catégorie non pleine de la catégorie des espaces vectoriels usuelle (i.e. avec pour morphismes toutes les applications linéaires).

**1.4.5 Définition.** Soit  $C$  une catégorie et  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme dans  $C$ . On dit que  $f$  est :

- un *monomorphisme* (ou simplement un *mono*) si pour toute paire de morphismes  $g, h : W \rightarrow X$  telle que  $fg = fh$ , on a  $g = h$ .
- un *épimorphisme* (ou simplement un *épi*) si pour toute paire de morphismes  $g, h : Y \rightarrow Z$  telle que  $gf = hf$ , on a  $g = h$ .
- un *isomorphisme* (ou simplement un *iso*) s'il existe  $g : Y \rightarrow X$  tel que  $gf = \text{id}_X$  et  $fg = \text{id}_Y$ .

**1.4.6 Exercice.** (1) Dans une catégorie  $C$ , un iso est mono et épi.

(2) Dans la catégorie des ensembles, les monos, épis, isos sont les injections, surjections, bijections, respectivement. En particulier, un morphisme qui est mono et épi est iso.

(3) Dans la catégorie des anneaux commutatifs unitaires, le morphisme d'inclusion  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$  est un mono et un épi, mais pas un iso. Dans la catégorie des variétés différentielles, l'application  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  d'élévation au cube est un mono et un épi mais pas un iso.

**1.4.7 Définition.** Soient  $C, D$  deux catégories. Un *foncteur*  $F : C \rightarrow D$  est la donnée de :

- un objet  $F(X) \in D$  pour chaque objet  $X \in C$ ,
- un morphisme  $F(f) : F(X) \rightarrow F(Y)$  pour chaque morphisme  $f : X \rightarrow Y$  dans  $C$ ,

de telle sorte que  $F(\text{id}_X) = \text{id}_{F(X)}$  et  $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$  pour tous  $f, g$  composables.

Un *foncteur contravariant* de  $C$  dans  $D$  est un foncteur  $F : C^{\text{op}} \rightarrow D$ ; à chaque morphisme  $f : X \rightarrow Y$  dans  $C$  il associe donc un morphisme  $F(f) : F(Y) \rightarrow F(X)$ .

**1.4.8 Remarques.** (1) On peut composer deux foncteurs  $F : C \rightarrow D$  et  $G : D \rightarrow E$  de manière évidente. (Il y a en fait une catégorie des catégories, dont les morphismes sont les foncteurs.)

(2) Il est fréquent de définir un foncteur en donnant seulement les valeurs  $F(X)$  des objets, lorsque les valeurs  $F(f)$  des morphismes sont faciles à trouver avec le contexte. Par exemple, si  $C$  est une catégorie et  $X \in C$  un objet fixé, on définit un foncteur  $F : C \rightarrow \text{Ens}$  en posant  $F(Y) = \text{Hom}_C(X, Y)$ . (Comment est défini  $F(f)$ , pour un morphisme  $f : Y_1 \rightarrow Y_2$ ?) De même, si  $Y$  est fixé, on définit un foncteur  $G : C^{\text{op}} \rightarrow \text{Ens}$  en posant  $G(X) = \text{Hom}_C(X, Y)$ . (Même question.) On dit que Hom est un bifoncteur, contravariant en la première variable, covariant en la seconde.

(3) On prendra garde au fait que l'image d'un foncteur (définie de la manière naturelle) n'est pas une sous-catégorie en général.

**1.4.9 Définition.** Soit  $F : C \rightarrow D$  un foncteur. On dit que  $F$  est un *isomorphisme de catégories* s'il existe un foncteur  $G : D \rightarrow C$  tel que  $G \circ F = \text{id}_C$  et  $F \circ G = \text{id}_D$ .

La notion d'isomorphisme de catégories est naturelle, mais elle est souvent trop rigide dans les applications. Voici un exemple. Avec un corps  $k$  fixé, considérons la catégorie  $C$  des  $k$ -espaces vectoriels de dimension finie, avec pour morphismes les isomorphismes  $k$ -linéaires. Utilisant la notion de

dimension, on voit que les *classes d'isomorphisme* d'éléments de  $C$  forment un ensemble qui est en bijection avec  $\mathbb{N}$ . Si on voit  $\mathbb{N}$  comme une catégorie dont les objets sont les entiers naturels et les morphismes sont réduits aux identités  $\text{id}_n$  pour  $n \in \mathbb{N}$ , on peut même étendre la dimension en un foncteur  $\text{dim} : C \rightarrow \mathbb{N}$ . Cependant, ce foncteur ne peut pas être un isomorphisme, car il n'existe pas de bijection entre la classe (énorme, non dénombrable) des espaces vectoriels et l'ensemble  $\mathbb{N}$ . Au mieux existe-t-il un foncteur  $G : \mathbb{N} \rightarrow C$  qui associe à  $n \in \mathbb{N}$  l'espace vectoriel canonique  $k^n$ . Mais on n'a pas  $G \circ \text{dim} = \text{id}_C$ , car un espace vectoriel de dimension  $n$  est *isomorphe*, mais non *égal* à, l'espace  $k^n$ . La notion adaptée pour décrire cet exemple et bien d'autres est celle d'équivalence de catégories.

**1.4.10 Définition.** Soient  $F, G : C \rightarrow D$  deux foncteurs de mêmes source et but. Une *transformation naturelle*, ou simplement *morphisme de foncteurs*  $u : F \rightarrow G$  est la donnée d'un morphisme  $u(X) : F(X) \rightarrow G(X)$  pour tout  $X \in C$ , de telle sorte que  $G(\alpha) \circ u(X) = u(Y) \circ F(\alpha)$  pour tout morphisme  $\alpha : X \rightarrow Y$  dans  $C$ .

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{u(X)} & G(X) \\ F(\alpha) \downarrow & & \downarrow G(\alpha) \\ F(Y) & \xrightarrow{u(Y)} & G(Y) \end{array}$$

On peut composer les morphismes de foncteurs de manière naturelle. Les foncteurs de  $C$  vers  $D$  forment ainsi une catégorie  $\text{Fonct}(C, D)$ . On dispose donc de la notion générale d'isomorphisme : un morphisme de foncteurs  $u : F \rightarrow G$  est un iso lorsqu'il existe  $v : G \rightarrow F$  tel que  $v \circ u = \text{id}_F$  et  $u \circ v = \text{id}_G$ .

**1.4.11 Définition.** Une *équivalence de catégories* est un foncteur  $F : C \rightarrow D$  tel qu'il existe un foncteur  $G : D \rightarrow C$  et des isomorphismes de foncteurs  $G \circ F \xrightarrow{\sim} \text{id}_C$  et  $F \circ G \xrightarrow{\sim} \text{id}_D$ . Le foncteur  $G$  est alors appelé un *quasi-inverse* pour  $F$ .

Dans ce cas, le foncteur  $G : D \rightarrow C$  est aussi une équivalence, appelée *inverse* de  $F$ . Citons Awodey [Awo], page 148 : *Experience has shown that the mathematically significant properties of objects are those that are invariant under isomorphisms, and in category theory, identity of objects is a much less important relation than isomorphism. So it is really equivalence of categories that is the more important notion of "similarity" for categories. One can think of equivalence of categories as "isomorphism up to isomorphism."*

**1.4.12 Définition.** Soit  $F : C \rightarrow D$  un foncteur. On dit que  $F$  est

- *plein* si les applications  $\text{Hom}_C(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_D(FX, FY)$  sont injectives,
- *fidèle* si les applications  $\text{Hom}_C(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_D(FX, FY)$  sont surjectives,
- *pleinement fidèle* s'il est plein et fidèle.

On dit que  $F$  est *essentiellement surjectif* si tout  $Y \in D$  est isomorphe à  $FX$ , pour un  $X \in C$ .

Par exemple, toute sous-catégorie  $D \subset C$  détermine un foncteur d'inclusion  $i : D \rightarrow C$  qui est fidèle mais n'est plein que si  $D$  est une sous-catégorie pleine.

**1.4.13 Lemme.** *Un foncteur  $F : C \rightarrow D$  est une équivalence si et seulement s'il est pleinement fidèle et essentiellement surjectif.*

**Démonstration :** Voir [Le], Prop. 1.3.18 ou [Mac], chap. IV, § 4, th. 1 ou [Awo], Prop. 7.25. Noter que la partie « si » utilise une forme forte de l'axiome du choix.  $\square$

**1.4.14 Exercice.** Soit  $C$  une catégorie telle que pour tous  $X, Y \in C$  il existe un unique morphisme  $X \rightarrow Y$ . Soit  $C_0$  la catégorie composée d'un seul objet avec un seul morphisme, l'identité de cet objet. Montrez qu'il existe un unique foncteur  $C \rightarrow C_0$  et que c'est une équivalence de catégories.

Pour conclure cette brève introduction aux catégories en revenant à notre sujet, signalons que si  $k$  est un corps algébriquement clos, alors les foncteurs  $X \mapsto \Gamma(X)$  et  $A \mapsto \text{Spm}(A)$  sont des équivalences de catégories inverses entre la catégorie des ensembles algébriques affines sur  $k$  et la catégorie des  $k$ -algèbres de type fini réduites.

## 1.5 Interlude 2 : faisceaux

Comme nous l'avons indiqué dans 1.1, un schéma sera défini comme un couple composé d'un espace topologique et d'un faisceau d'anneaux d'un certain type. Nous aurons donc besoin d'être à l'aise avec quelques notions liées aux faisceaux sur un espace topologique  $X$ .

**1.5.1 Définition.** Un *préfaisceau d'ensembles*  $\mathcal{F}$  sur  $X$  est la donnée d'une collection d'ensembles  $\mathcal{F}(U)$  pour tous les ouverts  $U \subset X$ , et d'une collection d'applications appelées *restrictions*  $\text{res}_{V,U} : \mathcal{F}(V) \rightarrow \mathcal{F}(U)$  pour toute inclusion d'ouverts  $U \subset V$ , satisfaisant les propriétés suivantes :  $\text{res}_{U,U} = \text{id}_U$  pour tout  $U$ , et  $\text{res}_{V,U} \circ \text{res}_{W,V} = \text{res}_{W,U}$  pour toute chaîne  $U \subset V \subset W$ .

Un *morphisme de préfaisceaux*  $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  est la donnée d'applications  $\varphi(U) : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$  pour tous les ouverts  $U \subset X$ , qui commutent aux applications de restriction des préfaisceaux  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$  i.e.  $\text{res}_{V,U}^{\mathcal{G}} \circ \varphi(V) = \varphi(U) \circ \text{res}_{V,U}^{\mathcal{F}}$ .

Un *préfaisceau de groupes*, ou d'anneaux (etc) est une collection de groupes, d'anneaux (etc) munie d'applications de restriction qui sont des morphismes de groupes, d'anneaux (etc). Les notions de *morphisme de préfaisceaux de groupes, d'anneaux (etc)* sont définies naturellement.

La notation  $\Gamma(U, \mathcal{F})$  est aussi utilisée pour désigner  $\mathcal{F}(U)$ . Les éléments de  $\mathcal{F}(U)$  sont souvent appelés *sections de  $\mathcal{F}$  au-dessus de  $U$* <sup>2</sup>. Si  $U \subset V \subset X$  et  $s \in \mathcal{F}(V)$ , la restriction  $\text{res}_{V,U}(s)$  est souvent notée  $s|_U$ . Avec cette notation simplifiée, la relation  $\text{res}_{V,U}^{\mathcal{G}} \circ \varphi(V) = \varphi(U) \circ \text{res}_{V,U}^{\mathcal{F}}$  s'écrit  $\varphi(s)|_U = \varphi(s|_U)$  pour tous  $U, V, s$ .

**1.5.2 Remarque.** On peut reformuler cette définition en introduisant la catégorie  $\text{Ouv}(X)$  dont les objets sont les ouverts de  $X$ , et les morphismes sont les seules inclusions  $U \subset V$  (il n'y a donc pas de morphisme entre  $U$  et  $V$  si  $U \not\subset V$ ). En ces termes, un préfaisceau est simplement un foncteur contravariant  $\mathcal{F} : \text{Ouv}(X)^{\text{op}} \rightarrow \text{Ens}$ , et un morphisme de préfaisceaux est un morphisme de foncteurs.

On dispose donc de catégories de préfaisceaux d'ensembles, de groupes, d'anneaux (etc) sur  $X$ . Dans la suite, tant que les résultats énoncés ne dépendent pas du type particulier de faisceau considéré, nous ne le spécifierons pas. Nous noterons  $P(X)$  une catégorie que la lectrice ou le lecteur peut imaginer comme étant la catégorie des préfaisceaux d'ensembles, ou de groupes, ou d'anneaux.

---

2. Pour une raison historique : aux débuts de la théorie des faisceaux, ceux-ci étaient présentés plutôt comme des espaces topologiques munis d'une application continue  $\pi : \mathcal{F} \rightarrow X$ , et dans ce cadre les éléments de  $\mathcal{F}(U)$  correspondaient à des sections de  $\pi^{-1}(U) \rightarrow U$ . Voir par exemple l'exposé de Henri Cartan, *Faisceaux sur un espace topologique*, I, Séminaire Henri Cartan, 3 (1950-1951), Exp. No. 14, accessible ici. On peut aussi regarder l'exercice I.8 de [EH].

**1.5.3 Exercice.** Les monos, épis, isos de  $P(X)$  sont les morphismes  $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  tels que  $\varphi(U)$  est injectif, surjectif, bijectif pour tout ouvert  $U$ . En particulier, les isos sont les morphismes qui sont mono et épi.

Venons-en aux faisceaux. Ceux-ci servent à relier données locales et données globales. Si  $\mathcal{F}$  est un préfaisceau, ce qu'on entend par « données globales » c'est les sections de  $\mathcal{F}(X)$ . Ce qu'on entend par « données locales » c'est les sections de  $\mathcal{F}(U)$  pour de « petits » ouverts  $U$ , ou encore plus local, les éléments des *fibres* (en anglais : *stalks*)

$$\mathcal{F}_x = \varinjlim_{U \ni x} \mathcal{F}(U).$$

(On rappelle que cette limite inductive est l'ensemble des classes d'équivalence de paires  $(U, s)$  avec  $U \ni x$  ouvert et  $s \in \mathcal{F}(U)$ , pour la relation suivante :  $(U, s) \sim (U', s')$  si et seulement s'il existe  $V \subset U \cap U'$  contenant  $x$  tel que  $s|_V = s'|_V$ . Pour plus de rappels sur les limites inductives, voir [Le], ou [Ei], Appendix 6 ou [Mat], Appendix A.) L'opération « fibre en  $x$  » est un foncteur : pour tout morphisme de préfaisceaux  $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  on a un morphisme induit  $\varphi_x : \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x$  sur les fibres. Si  $U$  est un ouvert contenant  $x$  et  $s \in \mathcal{F}(U)$ , l'image de  $s$  par l'application  $\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}_x$  est appelée *germe de  $s$  au point  $x$* . Les fibres sont particulièrement importantes en géométrie algébrique car les ouverts de la topologie de Zariski sont très gros. Ce qu'on entend par « relier données locales et données globales » s'exprime dans la définition d'un faisceau.

**1.5.4 Définition.** Un *faisceau* (d'ensembles, de groupes, d'anneaux, etc)  $\mathcal{F}$  sur  $X$  est un préfaisceau tel que pour tout ouvert  $U \subset X$ , pour tout recouvrement ouvert  $(U_i)_{i \in I}$  de  $U$ , et toute collection de sections  $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$  qui coïncident sur les intersections  $U_i \cap U_j$ , il existe une unique section  $s \in \mathcal{F}(U)$  telle que  $s|_{U_i} = s_i$  pour tout  $i$ . Un *morphisme de faisceaux*  $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  est un morphisme de préfaisceaux.

On résume parfois la propriété de faisceau par un diagramme exact

$$\mathcal{F}(U) \rightarrow \prod_{i \in I} \mathcal{F}(U_i) \rightrightarrows \prod_{i, j} \mathcal{F}(U_i \cap U_j).$$

Voici en exercice une conséquence de la propriété de faisceau.

**1.5.5 Exercice.** Soit  $\mathcal{F}$  un préfaisceau sur  $X$ . Pour chaque ouvert  $U$ , notons  $\mathcal{F}'(U)$  l'ensemble des collections  $(s(x)) \in \prod_{x \in U} \mathcal{F}_x$  qui *proviennent localement d'une section* au sens où tout point  $y \in U$  possède un voisinage ouvert  $V \subset U$  sur lequel tous les éléments  $s(x)$ ,  $x \in V$ , sont les germes d'une même section  $t \in \mathcal{F}(V)$ .

(a) Montrez que  $\mathcal{F}'$  est un faisceau.

(b) Soit  $\gamma(U) : \mathcal{F}(U) \rightarrow \prod_{x \in U} \mathcal{F}_x$  l'application qui envoie  $s$  sur la collection de germes  $(s_x)_{x \in U}$ . Montrez que les  $\gamma(U)$  induisent un morphisme de préfaisceaux  $\gamma : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'$  et que  $\gamma$  est un isomorphisme si  $\mathcal{F}$  est un faisceau.

On dispose aussi des notions de faisceaux en groupes, en anneaux, etc. Considérons le cas de la catégorie  $F(X)$  des faisceaux de groupes abéliens sur  $X$ . Dans les exercices suivants, on décrit ses monos, épis, isos. Ceux-ci sont souvent appelés injections, surjections et bijections de faisceaux, même si cette terminologie peut porter à confusion comme on va le voir.

**1.5.6 Exercice.** Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (a)  $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  est un mono,
- (b)  $\varphi(U)$  est injectif pour tout ouvert  $U$ ,
- (c)  $\varphi_x$  est injectif pour tout  $x \in X$ .

Pour les épimorphes, la situation n'est pas si simple, et c'est heureux car c'est précisément ce point qui fait tout l'intérêt de la notion de faisceau. En effet, il existe des épimorphes  $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  dans  $F(X)$  tels que  $\varphi(U)$  n'est pas surjectif, pour un certain ouvert  $U$ . Cf exercice I.10 dans [EH] :

- dans (a) les ouverts de Zariski sont trop gros pour extraire des racines carrées ;
- dans (b) les variétés projectives ont trop peu de fonctions globales.

**1.5.7 Exercice.** Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (a)  $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  est un épimorphisme,
- (b)  $\varphi$  est *localement surjectif* : pour tout ouvert  $U$  et tout  $t \in \mathcal{G}(U)$ , il existe un recouvrement ouvert  $U = \cup_{i \in I} U_i$  et des sections  $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$  telles que  $\varphi(s_i) = t|_{U_i}$  pour tout  $i$ ,
- (c)  $\varphi_x$  est surjectif pour tout  $x \in X$ .

**1.5.8 Exercice.** Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (a)  $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  est un iso,
- (b)  $\varphi$  est un mono et un épimorphisme,
- (c)  $\varphi_x$  est un iso, pour tout  $x \in X$ .

## Introduction à la Géométrie Algébrique. Le langage des schémas

Cours du 21 septembre 2015

**1.5.9 Faisceaux sur une base d'ouverts.** Pour terminer cette brève présentation des faisceaux, rappelons-nous que notre objectif est de définir le faisceau de fonctions  $\mathcal{O}_X$  d'un schéma affine  $X = \text{Spec}(A)$ . Comme les ouverts généraux de  $X$  sont assez compliqués, il est agréable de travailler seulement avec les ouverts principaux  $D(f) = \text{Spec}(A_f)$ , qui forment une base. Les valeurs d'un faisceau sur les seuls ouverts de cette base le déterminent entièrement.

**1.5.10 Définition.** Soit  $X$  un espace topologique et  $\mathcal{B}$  une base d'ouverts. Un  $\mathcal{B}$ -faisceau  $\mathcal{F}_0$  est la donnée d'une collection d'ensembles  $\mathcal{F}_0(V)$  pour tous les  $V \in \mathcal{B}$ , et d'applications de restriction  $\text{res}_{W,V}$  pour  $V \subset W$  éléments de  $\mathcal{B}$ , telles que pour tout  $V \in \mathcal{B}$ , pour tout recouvrement ouvert de  $V$  par des éléments  $V_i \in \mathcal{B}$ , et toute collection de sections  $s_i \in \mathcal{F}_0(V_i)$  qui coïncident sur tous les ouverts  $W \subset V_i \cap V_j$  appartenant à  $\mathcal{B}$ , il existe une unique section  $s \in \mathcal{F}_0(V)$  telle que  $s|_{V_i} = s_i$  pour tout  $i$ .

**1.5.11 Proposition.** Soit  $\mathcal{F}_0$  un  $\mathcal{B}$ -faisceau. Pour un ouvert quelconque  $U \subset X$ , posons

$$\mathcal{F}(U) = \varprojlim_{V \subset U, V \in \mathcal{B}} \mathcal{F}_0(V).$$

Alors  $\mathcal{F}$  est l'unique faisceau tel que  $\mathcal{F}(U) = \mathcal{F}_0(U)$  si  $U \in \mathcal{B}$ .

On rappelle que la limite projective dans le membre de droite est l'ensemble des collections  $(s_V)_{V \in \mathcal{B}}$ ,  $s_V \in \mathcal{F}_0(V)$ , telles que  $s_W = (s_V)|_W$  pour toute inclusion  $W \subset V$  dans  $\mathcal{B}$ . Pour des rappels sur les limites projectives (ou limites inverses), voir [Ei], Appendix 6 ou [Mat], Appendix A.

**Démonstration :** Si  $U \in \mathcal{B}$ , le système projectif des  $V \subset U$ ,  $V \in \mathcal{B}$  possède un élément maximal (ou initial) de sorte que  $\mathcal{F}(U) = \mathcal{F}_0(U)$ . S'il existe un faisceau  $\mathcal{F}$  avec cette propriété, alors chacune de ses sections  $s \in \mathcal{F}(U)$  est déterminée par la collection de ses restrictions  $s|_V$ ,  $V \in \mathcal{B}$ ,  $V \subset U$ , astreintes à coïncider sur les ouverts  $V \cap V'$ , c'est-à-dire sur tous les ouverts  $W \subset V \cap V'$  de  $\mathcal{B}$  (noter que  $V \cap V'$ , s'il n'est pas dans  $\mathcal{B}$ , est en tout cas recouvert par des éléments de  $\mathcal{B}$ ). Ainsi  $s$  peut être identifiée à l'ensemble des familles  $(s_V)_{V \in \mathcal{B}}$ ,  $s_V \in \mathcal{F}_0(V)$ , telles que  $s_W = (s_V)|_W$  pour toute inclusion  $W \subset V$  dans  $\mathcal{B}$ . C'est exactement l'expression donnée en termes de limite projective dans l'énoncé. Il reste à montrer que cette expression définit bien un faisceau ; ceci est laissé au lecteur.  $\square$

**1.5.12 Exercice.** Décrivez les morphismes de restriction du préfaisceau  $\mathcal{F}$  défini dans la proposition. Vérifiez que  $\mathcal{F}$  est bien un faisceau. Montrez que si  $\mathcal{F}_0, \mathcal{G}_0$  sont deux  $\mathcal{B}$ -faisceaux, alors toute collection d'applications  $\varphi(V) : \mathcal{F}_0(V) \rightarrow \mathcal{G}_0(V)$  pour  $V \in \mathcal{B}$ , commutant aux restrictions d'ouverts de  $\mathcal{B}$ , s'étend en un unique morphisme de faisceaux  $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ .

## 1.6 Le faisceau de fonctions d'un schéma affine

Soit  $A$  un anneau et  $X = \text{Spec}(A)$ . Nous voulons définir le *faisceau des fonctions régulières*  $\mathcal{O}_X$ . D'après 1.5.9, il suffit de définir un  $\mathcal{B}$ -faisceau, pour la base  $\mathcal{B}$  composée des ouverts principaux  $D(f)$ ,  $f \in A$ . Cette base possède la propriété agréable d'être stable par intersections finies puisque  $D(f_1) \cap D(f_2) = D(f_1 f_2)$ , ce qui simplifie la condition de coïncidence de la définition 1.5.10. Nous avons vu en 1.2.2 et 1.3.2 que  $D(f)$  est l'ensemble des points où  $f$  ne s'annule pas, et s'identifie au spectre de l'anneau  $A_f = A[1/f]$ . Ceci est en harmonie avec l'idée naturelle que sur l'ouvert où  $f$  ne s'annule pas, les quotients  $a/f^n$  définissent d'honnêtes fonctions.

**1.6.1 Proposition.** *Les données suivantes :*

- (1)  $\mathcal{O}_X(D(f)) = A_f$  pour tout  $f \in A$ ,
- (2)  $\text{res}_{D(g), D(f)} : A_g \rightarrow A_f$  égal au morphisme d'anneaux naturel (voir exercice 1.3.5), pour toute inclusion  $D(f) \subset D(g)$ ,

définissent un  $\mathcal{B}$ -faisceau.

**Démonstration :** D'abord il convient de noter que lorsque  $D(f) = D(g)$ , les anneaux  $A_f$  et  $A_g$  sont canoniquement isomorphes (voir exercice 1.3.5). Par conséquent, si  $U = D(f)$ , la définition  $\mathcal{O}_X(U) = A_f$  ne dépend pas du choix de  $f$ . Maintenant, fixons  $f \in A$  et montrons la propriété de  $\mathcal{B}$ -faisceau pour tous les recouvrements ouverts de  $D(f)$ . Celui-ci étant un spectre, et ses ouverts principaux étant des ouverts principaux dans  $X$ , quitte à remplacer  $A$  par  $A_f$  on se ramène au cas  $f = 1$ . Il reste à montrer que pour tout recouvrement ouvert de la forme  $X = \cup_i D(f_i)$ , toute famille d'éléments  $s_i \in A_{f_i}$  tels que  $s_i$  et  $s_j$  deviennent égaux dans  $A_{f_i f_j}$  se recolle en un unique  $s \in A$ .

D'abord une remarque. Pour tout entier  $\alpha \geq 1$  on a  $D(f) = D(f^\alpha)$ , donc  $X = \cup_i D(f_i^\alpha)$ . Comme  $X$  est quasi-compact (voir 1.3.4), il existe un sous-recouvrement fini  $D(f_1^\alpha), \dots, D(f_n^\alpha)$ . Ceci entraîne qu'il existe  $a_1, \dots, a_n$  dans  $A$  tels que  $1 = a_1 f_1^\alpha + \dots + a_n f_n^\alpha$ , par le même argument que dans 1.3.4. (Les  $a_i$  dépendent de  $\alpha$ , bien sûr.) Dans la suite de la preuve, nous utiliserons ce type d'écriture, appelé une *partition de l'unité*.

Montrons l'unicité. Si  $s$  et  $t$  sont égaux dans chaque  $A_{f_i}$ , alors pour chaque  $i$  il existe  $\alpha_i \geq 1$  tel que  $f_i^{\alpha_i}(s - t) = 0$ . Si  $\alpha = \max(\alpha_i)$ , on trouve  $f_i^\alpha(s - t) = 0$  pour tout  $i$ . En utilisant une partition de l'unité, on en déduit que  $s - t = 0$ .

Montrons maintenant l'existence. Soient  $\alpha, \beta \geq 1$  tels que, pour tous  $i, j$  on a  $s_i = d_i/f_i^\alpha$  et  $(f_i f_j)^\beta (f_j^\alpha d_i - f_i^\alpha d_j) = 0$ , ce qui traduit l'hypothèse que  $s_i$  et  $s_j$  deviennent égaux dans  $A_{f_i f_j}$ . Les entiers  $\alpha$  et  $\beta$  peuvent être choisis uniformes, par quasi-compacité. Fixons une partition de l'unité  $1 = \sum_j a_j f_j^{\alpha+\beta}$ . Posons  $s = \sum_j a_j f_j^\beta d_j$ . On a :

$$f_i^{\alpha+\beta} s = \sum_j a_j f_j^\beta f_i^{\alpha+\beta} d_j = \sum_j a_j f_j^{\alpha+\beta} f_i^\beta d_i = f_i^\beta d_i.$$

Ceci montre que dans  $A_{f_i}$  on a  $s = d_i/f_i^\alpha = s_i$ , pour tout  $i$ . □

Un schéma général sera défini comme une paire  $(X, \mathcal{O}_X)$  composée d'un espace topologique muni d'un faisceau d'anneaux, localement isomorphe à un schéma affine. Dans la catégorie où l'expression « localement isomorphe » prendra son sens, les morphismes relient les faisceaux via une image directe ou une image inverse. Il nous faut faire un troisième interlude pour présenter ces notions.

## 1.7 Interlude 3 : image directe et image inverse de faisceaux

Nous introduisons ces opérations d'abord pour les préfaisceaux, puis pour les faisceaux.

**1.7.1 Définition.** Soit  $f : X \rightarrow Y$  une application continue entre deux espaces topologiques.

(1) Si  $\mathcal{F} \in P(X)$  on définit  $f_*\mathcal{F} \in P(Y)$  par  $(f_*\mathcal{F})(V) = \mathcal{F}(f^{-1}V)$ , pour tout ouvert  $V \subset Y$ . Ce préfaisceau est appelé *image directe de  $\mathcal{F}$*  par l'application continue  $f$ .

(2) Si  $\mathcal{F} \in P(Y)$  on définit  $f^{-1}\mathcal{F} \in P(X)$  par  $(f^{-1}\mathcal{F})(U) = \varinjlim_{V \supset f(U)} \mathcal{F}(V)$ , pour tout ouvert  $U \subset X$ . Ce préfaisceau est appelé *image inverse de  $\mathcal{F}$*  par  $f$ .

Notez que dans (2), lorsque  $f(U)$  est ouvert, on a  $(f^{-1}\mathcal{F})(U) = \mathcal{F}(f(U))$ . Cependant, en général  $f(U)$  n'est pas ouvert et une telle formule n'est pas licite.

**1.7.2 Exemple : restriction à un ouvert.** Soit  $U \subset X$  un ouvert et  $i : U \rightarrow X$  l'inclusion. Le faisceau  $i^{-1}\mathcal{F}$  est noté  $\mathcal{F}|_U$  et appelé la *restriction de  $\mathcal{F}$  à  $U$* . On a  $(i^{-1}\mathcal{F})(V) = \mathcal{F}(i(V)) = \mathcal{F}(V)$  pour tout  $V \subset U$ .

**1.7.3 Exercice.** Montrez que  $f_*$  s'étend en un foncteur  $f_* : P(X) \rightarrow P(Y)$ , i.e. montrez comment associer à un morphisme  $\psi : \mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{F}_2$  de préfaisceaux sur  $X$  un morphisme  $f_*\psi : f_*\mathcal{F}_1 \rightarrow f_*\mathcal{F}_2$ . Montrez de même que  $f^{-1}$  s'étend en un foncteur  $f^{-1} : P(Y) \rightarrow P(X)$ .

**1.7.4 Exercice.** Soit  $f : X \rightarrow Y$  une application continue et  $x \in X$  un point.

(1) Soit  $\mathcal{F}$  un préfaisceau d'ensembles sur  $Y$ . Construisez une bijection naturelle  $(f^{-1}\mathcal{F})_x \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_{f(x)}$ .

(2) Soit  $\mathcal{F}$  un préfaisceau d'ensembles sur  $X$ . Construisez une application naturelle  $(f_*\mathcal{F})_{f(x)} \rightarrow \mathcal{F}_x$  et montrez qu'en général elle n'est ni injective ni surjective.

L'apparition de la limite inductive dans la définition de  $f^{-1}\mathcal{F}$  trouve en fait son origine dans la *formule d'adjonction* suivante :

**1.7.5 Proposition (Adjonction  $(f^{-1}, f_*)$ ).** Si  $f : X \rightarrow Y$  est continue, on a une bijection

$$\mathrm{Hom}_{P(X)}(f^{-1}\mathcal{G}, \mathcal{F}) = \mathrm{Hom}_{P(Y)}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F})$$

fonctorielle en les préfaisceaux  $\mathcal{F} \in P(X)$  et  $\mathcal{G} \in P(Y)$ .

**Démonstration :** On construit d'abord deux flèches naturelles  $\eta : \mathcal{G} \rightarrow f_*f^{-1}\mathcal{G}$  et  $\epsilon : f^{-1}f_*\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ . Pour  $\eta$ , on observe que comme l'ouvert  $V \subset Y$  contient  $f(f^{-1}V)$ , on a une application

$$\mathcal{G}(V) \rightarrow (f_*f^{-1}\mathcal{G})(V) = (f^{-1}\mathcal{G})(f^{-1}(V)) = \varinjlim_{W \supset f^{-1}V} \mathcal{G}(W)$$

qui à  $s \in \mathcal{G}(V)$  associe sa classe d'équivalence dans la limite inductive. La construction de  $\epsilon$  est laissée en exercice. La bijection annoncée se construit ainsi : à un morphisme  $u : f^{-1}\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F}$  on associe la composée  $v = f_*u \circ \eta : \mathcal{G} \rightarrow f_*f^{-1}\mathcal{G} \rightarrow f_*\mathcal{F}$ . Réciproquement, à un morphisme  $v : \mathcal{G} \rightarrow f_*\mathcal{F}$  on associe  $u = \epsilon \circ f^{-1}v$ . La preuve du fait que ces deux flèches sont inverses l'une de l'autre est laissée en exercice. Il reste à montrer que la bijection est fonctorielle en  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$ . Cela découle essentiellement du

fait que  $\eta = \eta_{\mathcal{G}}$  et  $\epsilon = \epsilon_{\mathcal{F}}$  sont fonctorielles. Ceci signifie (pour  $\eta$ ) qu'à tout morphisme  $\varphi : \mathcal{G}_1 \rightarrow \mathcal{G}_2$  de préfaisceaux sur  $Y$  est associé un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}_1 & \xrightarrow{\eta_{\mathcal{G}_1}} & f_* f^{-1} \mathcal{G}_1 \\ \varphi \downarrow & & \downarrow f_* f^{-1} \varphi \\ \mathcal{G}_2 & \xrightarrow{\eta_{\mathcal{G}_2}} & f_* f^{-1} \mathcal{G}_2. \end{array}$$

La preuve de ces faits est laissée en exercice. □

**1.7.6 Exercice.** Décrivez le morphisme de préfaisceaux  $\epsilon : f^{-1} f_* \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$  puis vérifiez que les applications  $u \mapsto f_* u \circ \alpha$  et  $v \mapsto \beta \circ f^{-1} v$  sont inverses l'une de l'autre.

**1.7.7 Remarque.** Insistons sur le fait que les propriétés formelles (fonctorielles, catégoriques) des objets qu'on manipule sont fondamentales. En l'occurrence, nous venons de rencontrer un exemple de la notion générale d'adjonction dans une catégorie : on dit que deux foncteurs  $F : C \rightarrow D$  et  $G : D \rightarrow C$  sont *adjoints* s'il existe une bijection  $\text{Hom}_D(FX, Y) = \text{Hom}_C(X, GY)$  fonctorielle en  $X \in C$  et  $Y \in D$  (on peut parler aussi d'un *isomorphisme de bifoncteurs*). On dit que  $F$  est adjoint à gauche de  $G$ , et  $G$  adjoint à droite de  $F$ . On montre que si  $F$  (resp.  $G$ ) possède un adjoint à gauche (resp. à droite), alors celui-ci est unique à isomorphisme unique près. Voir [Mac], chap. IV, § 1. De nombreux exemples sont familiers, en voici deux grandes familles (voir exercice 1.7.8) :

- (1) les adjoints à gauche de foncteurs d'oubli, appelés foncteurs d'*objets libres*.
- (2) les adjoints à gauche d'inclusions de catégories, ou *réflecteurs*.

Pour revenir aux préfaisceaux, la définition de  $f_* \mathcal{F}$  est naturelle et c'est la formule d'adjonction qui guide la définition de  $f^{-1} \mathcal{F}$ .

**1.7.8 Exercice.** (1) *Objets libres.* Montrez que le foncteur qui associe à un ensemble  $I$  le groupe libre sur l'ensemble de générateurs  $I$  est un adjoint à gauche du foncteur d'oubli qui associe à un groupe son ensemble sous-jacent. Montrez que le foncteur qui associe à un ensemble  $I$  l'algèbre de polynômes  $A[(X_i)_{i \in I}]$  est un adjoint à gauche du foncteur d'oubli qui associe à une  $A$ -algèbre commutative unitaire son ensemble sous-jacent.

(2) *Réflecteurs.* Montrez que le foncteur corps de fractions est adjoint à gauche de l'inclusion de la catégorie des corps commutatifs dans la catégorie des anneaux commutatifs intègres avec pour morphismes les injections d'anneaux. Montrez que le foncteur d'abélianisation  $G \mapsto G/[G, G]$  est adjoint à gauche de l'inclusion de la catégorie des groupes abéliens dans celle de tous les groupes (ici  $[G, G]$  est le groupe dérivé). Montrez que le foncteur  $M \mapsto M/M_{\text{tor}}$  est adjoint à gauche de l'inclusion de la catégorie des  $\mathbb{Z}$ -modules sans torsion dans celle de tous les  $\mathbb{Z}$ -modules (ici  $M_{\text{tor}}$  est le sous-module de torsion).

Si  $f : X \rightarrow Y$  est continue et  $\mathcal{F} \in F(X)$ , alors  $f_* \mathcal{F}$  tel qu'on l'a défini est un faisceau. En revanche, pour  $\mathcal{F} \in F(Y)$ , le préfaisceau  $f^{-1} \mathcal{F}$  n'est pas toujours un faisceau. Un exemple simple de ce phénomène est donné dans l'exercice suivant.

**1.7.9 Exercice.** Soit  $X$  un espace topologique irréductible, par exemple  $X = \text{Spec}(A)$  avec  $A$  intègre. On rappelle que dans ce cas, tous les ouverts non vides de  $X$  sont denses, voir 1.3.4. Montrez que le préfaisceau défini par  $\mathcal{F}(U) = \mathbb{Z}$  est un faisceau. Supposons que  $X$  contient deux points fermés  $x_1 \neq x_2$  et notons  $f : \{x_1, x_2\} \hookrightarrow X$  l'inclusion. Montrez que le préfaisceau  $f^{-1}\mathcal{F}$  n'est pas un faisceau.

Il est donc crucial de savoir qu'on peut revenir dans la catégorie des faisceaux en associant à un préfaisceau une « meilleure approximation par un faisceau ». Ceci s'exprime ainsi.

**1.7.10 Proposition.** *Il existe un foncteur  $a : P(X) \rightarrow F(X)$  de faisceau associé ou faisceautisation qui est adjoint à gauche pour l'inclusion  $i : F(X) \hookrightarrow P(X)$ , i.e. on a*

$$\text{Hom}_{P(X)}(\mathcal{F}, i(\mathcal{G})) = \text{Hom}_{F(X)}(a(\mathcal{F}), \mathcal{G})$$

fonctoriellement en  $\mathcal{F} \in P(X)$  et  $\mathcal{G} \in F(X)$ . (On note  $i(\mathcal{G})$  pour souligner l'adjonction, mais on note  $\mathcal{G}$  dans la pratique.) Le morphisme canonique  $\mathcal{F} \rightarrow a(\mathcal{F})$ , correspondant à l'identité de  $\mathcal{G} = a(\mathcal{F})$  par adjonction, est un isomorphisme sur les fibres.

La situation est similaire à celle de l'exemple (2) de la remarque 1.7.7, c'est-à-dire que  $a$  est un adjoint de la famille des réflecteurs.

**Démonstration :** Soit  $\mathcal{F}$  un préfaisceau (de groupes abéliens). Pour  $U \subset X$  ouvert, soit  $\mathcal{F}'(U)$  l'ensemble des collections  $(s(x))_{x \in U}$ ,  $s(x) \in \mathcal{F}_x$ , qui proviennent localement d'une section, comme dans l'exercice 1.5.5. Alors  $\mathcal{F}'$  est un faisceau ; on pose  $a(\mathcal{F}) := \mathcal{F}'$ . On montre facilement que  $a$  s'étend en un foncteur. Si  $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  est un morphisme à valeurs dans un faisceau  $\mathcal{G}$ , on en déduit un morphisme  $\mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{G}'$ . Comme  $\mathcal{G}$  est un faisceau, on a  $\mathcal{G} \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}'$ , d'où on déduit un morphisme  $\mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{G}$  par lequel  $\varphi$  se factorise. Ceci montre que  $a$  vérifie la propriété attendue.  $\square$

On utilise la faisceautisation pour définir l'image inverse faisceautique :

**1.7.11 Définition.** L'image inverse d'un faisceau  $\mathcal{F} \in F(X)$  par une application continue  $f : Y \rightarrow X$  est le faisceau associé au préfaisceau  $f^{-1}(\mathcal{F})$  défini précédemment. On la note encore  $f^{-1}(\mathcal{F})$ .

**1.7.12 Proposition (Adjonction  $(f^{-1}, f_*)$ ).** Si  $f : X \rightarrow Y$  est continue, on a une bijection

$$\text{Hom}_{F(X)}(f^{-1}\mathcal{G}, \mathcal{F}) = \text{Hom}_{F(Y)}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F})$$

fonctorielle en les faisceaux  $\mathcal{F} \in F(X)$  et  $\mathcal{G} \in F(Y)$ .  $\square$

**1.7.13 Exercice.** Démontrez cette proposition.

**1.7.14 Exercice.** Soit  $X$  un espace topologique. Étant donné un ensemble  $E$  possédant au moins deux éléments, on définit le *préfaisceau constant de valeur  $E$*  en posant  $\mathcal{F}(U) = E$  pour tout ouvert  $U$ , et en prenant toutes les restrictions égales à l'identité de  $E$ . Donnez une condition nécessaire et suffisante pour que  $\mathcal{F}$  soit un faisceau. Dans le cas général, décrivez le faisceau associé  $\mathcal{F}'$ , que l'on appelle le *faisceau constant de valeur  $E$* .

**1.7.15 Exercice.** On construit quatre catégories dont les objets sont les paires  $(X, \mathcal{F})$  composées d'un espace topologique et un faisceau d'ensembles dessus. Les morphismes entre  $(X, \mathcal{F})$  et  $(Y, \mathcal{G})$  sont les paires  $(f, \varphi)$  où  $f : X \rightarrow Y$  est une application continue et  $\varphi$  est un certain morphisme de faisceaux. Les quatre catégories diffèrent par le morphisme  $\varphi$ .

(1) Dans  $C_1$ , on prend pour  $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow f^{-1}\mathcal{G}$  un morphisme de faisceaux sur  $X$ . Dans  $C_2$ , on prend pour  $\varphi : f_*\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  un morphisme de faisceaux sur  $Y$ . Justifiez qu'on obtient bien des catégories, en décrivant la composition naturelle des morphismes dans chacune. Montrez que  $C_1$  et  $C_2$  ne sont pas équivalentes (*suggestion : regardez les ensembles  $\text{Hom}_{C_i}((X, \mathcal{F}), (Y, \mathcal{G}))$  lorsque  $X = \emptyset$* ).

(2) Dans  $C_3$ , on prend pour  $\varphi : f^{-1}\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F}$  un morphisme de faisceaux sur  $X$ . Dans  $C_4$ , on prend pour  $\varphi : \mathcal{G} \rightarrow f_*\mathcal{F}$  un morphisme de faisceaux sur  $Y$ . Décrivez la composition naturelle des morphismes dans ces catégories. Montrez que  $C_3$  et  $C_4$  sont isomorphes.

Lorsque  $\mathcal{F}, \mathcal{G}$  représentent des faisceaux de fonctions (de n'importe quelle sorte) sur  $X, Y$ , la functorialité naturelle est *contravariante*, puisque  $f : X \rightarrow Y$  fait correspondre à une fonction  $u$  sur  $Y$  la fonction  $u \circ f$  sur  $X$ . C'est donc la situation (2).

## 1.8 Définition des schémas et des morphismes de schémas

**1.8.1 Définition.** On appelle *espace localement annelé* ou *espace annelé en anneaux locaux* un couple  $(X, \mathcal{O}_X)$  composé d'un espace topologique et un faisceau d'anneaux dont les fibres  $\mathcal{O}_{X,x}$  sont des anneaux locaux. On note souvent  $X$  au lieu de  $(X, \mathcal{O}_X)$ . On appelle *morphisme d'espaces localement annelés* un couple  $(f, f^\#)$  composé d'une application continue  $f : X \rightarrow Y$  et d'un morphisme de faisceaux  $f^\# : \mathcal{O}_Y \rightarrow f_*\mathcal{O}_X$  tel que pour tout  $x \in X$  d'image  $y = f(x)$ , le morphisme naturel

$$\mathcal{O}_{Y,y} \xrightarrow{f_y^\#} (f_*\mathcal{O}_X)_y \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x}$$

est un morphisme d'anneaux locaux. On note souvent  $f : X \rightarrow Y$  au lieu de  $(f, f^\#)$ .

Le morphisme de faisceaux  $f^\# : \mathcal{O}_Y \rightarrow f_*\mathcal{O}_X$  est souvent appelé le *comorphisme* de  $f$ . On prendra garde au fait que, contrairement à ce que la terminologie et la notation peut laisser croire, *il n'est pas déterminé par  $f$* .

Si  $U$  est un ouvert de  $X$  et  $i : U \rightarrow X$  est l'inclusion, l'espace  $U$  muni du faisceau  $\mathcal{O}_U := \mathcal{O}_X|_U = i^{-1}\mathcal{O}_X$  (voir 1.7.2) est un espace localement annelé. Si  $f : X \rightarrow Y$  est un morphisme,  $V \subset Y$  un ouvert,  $U \subset X$  sa préimage, on a de même un morphisme d'espaces localement annelés induit  $f|_U : U \rightarrow V$ .

**1.8.2 Définition.** On appelle *schéma* un espace localement annelé  $(X, \mathcal{O}_X)$  qui possède un recouvrement ouvert  $X = \cup U_i$  tel que les espaces localement annelés  $(U_i, \mathcal{O}_{U_i})$  sont isomorphes à des schémas affines. Si  $X, Y$  sont deux schémas, un *morphisme de schémas* est un morphisme d'espaces annelés  $f : X \rightarrow Y$ . Le faisceau  $\mathcal{O}_X$  est appelé *faisceau de fonctions* ou *faisceau structural* du schéma  $X$ . L'espace topologique sous-jacent au schéma  $X$  est parfois noté  $|X|$  et appelé le *support* de  $X$ .

Écrivons explicitement comment s'effectue la composition d'un morphisme  $f : X \rightarrow Y$  avec un morphisme  $g : Y \rightarrow Z$  (voir aussi l'exercice 1.7.15). On considère le comorphisme  $f^\# : \mathcal{O}_Y \rightarrow f_*\mathcal{O}_X$

et son image directe  $g_*f^\# : g_*\mathcal{O}_Y \rightarrow g_*f_*\mathcal{O}_X$ . Alors, le morphisme composé  $X \rightarrow Z$  est le morphisme  $(h, h^\#)$  où  $h = g \circ f$  est la composée des applications continues, et  $h^\# = g_*f^\# \circ g^\#$  :

$$\mathcal{O}_Z \xrightarrow{g^\#} g_*\mathcal{O}_Y \xrightarrow{g_*f^\#} g_*f_*\mathcal{O}_X = h_*\mathcal{O}_X.$$

**1.8.3 Les schémas affines.** La catégorie des schémas affines est définie comme une sous-catégorie pleine de la catégorie des schémas. On peut (enfin) compléter la définition du foncteur spectre :

$$\text{Spec} : \{\text{anneaux}\} \longrightarrow \{\text{schémas affines}\},$$

déjà défini sur les objets, en décrivant son action sur les morphismes. Si  $\varphi : A \rightarrow B$  est un morphisme d'anneaux, on a défini une application continue  $f = \text{Spec}(\varphi) : Y = \text{Spec}(B) \rightarrow X = \text{Spec}(A)$  et nous devons lui adjoindre un morphisme de faisceaux  $f^\# : \mathcal{O}_X \rightarrow f_*\mathcal{O}_Y$  pour en faire un morphisme de schémas. On sait qu'il suffit de définir  $f^\#$  sur les ouverts principaux  $U = D(f)$ ,  $f \in A$ . Pour un tel ouvert, on a  $f^{-1}(U) = \{y = [q] \in Y; q \cap A \not\cong f\} = \{y = [q] \in Y; q \ni f\} = D(f)$  où l'on note encore  $f$  l'image de  $f$  dans  $B$ , pour simplifier. On aura donc  $f_*\mathcal{O}_Y(U) = \mathcal{O}_Y(f^{-1}(U)) = \mathcal{O}_Y(D(f)) = B_f$  et on peut définir :  $f^\#(U) : A_f \rightarrow B_f$  comme étant le morphisme d'anneaux naturel déduit de  $\varphi : A \rightarrow B$  par passage aux localisés. On vérifie que ces constructions font de  $f^\#$  un morphisme de faisceaux, et que  $\text{Spec}$  devient un foncteur comme désiré.

**1.8.4 Exercice.** Montrez que le foncteur *sections globales du faisceau de fonctions*  $X \mapsto \Gamma(X, \mathcal{O}_X) := \mathcal{O}_X(X)$  et le foncteur spectre  $A \mapsto \text{Spec}(A)$  sont des équivalences de catégories inverses :

$$\{\text{schémas affines}\} \xrightleftharpoons[\text{Spec}]{\Gamma} \{\text{anneaux}\}.$$

On a ainsi complété le diagramme de 1.1.2.

**1.8.5 Exercice.** Soit  $X = \text{Spec}(A)$  un schéma affine et  $U$  l'ouvert  $D(f)$  pour  $f \in A$ . Montrez que  $U = (U, \mathcal{O}_{X|U}) \simeq \text{Spec}(A_f)$ .

**1.8.6 Exercice.** Soit  $X$  un schéma et  $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$  une fonction régulière globale. Montrez que l'ensemble  $X_f = \{x \in X, f(x) \neq 0\}$  est un ouvert de  $X$ .

**1.8.7 Exercice.** (1) Soit  $A$  un anneau et  $X$  un schéma. Construisez une bijection naturelle :

$$\text{Hom}_{\text{Sch}}(X, \text{Spec}(A)) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\text{Ann}}(A, \Gamma(X, \mathcal{O}_X)).$$

Montrez que cette bijection est fonctorielle en  $A$  et  $X$  et interprétez-la comme fournissant l'existence d'un adjoint pour l'inclusion de la catégorie des schémas affines dans la catégorie de tous les schémas.

(2) On appelle *droite affine sur  $\mathbb{Z}$*  le schéma  $\mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^1 = \text{Spec}(\mathbb{Z}[t])$  où  $t$  est une indéterminée (voir aussi 2.1.5). En prenant  $A = \mathbb{Z}[t]$  dans (1), montrez que les fonctions régulières sur un ouvert  $U \subset X$ , i.e. les sections de  $\mathcal{O}_X$  sur  $U$ , s'identifient aux morphismes de schémas  $U \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^1$ .

(3) En prenant  $A = \mathbb{Z}$  dans (1), montrez que tout schéma possède un et un seul morphisme vers  $\text{Spec}(\mathbb{Z})$ . On dit que  $\text{Spec}(\mathbb{Z})$  est un *objet terminal* (ou *final*) de la catégorie des schémas.

## Introduction à la Géométrie Algébrique. Le langage des schémas

Cours du 28 septembre 2015

## 2 Premières propriétés, premières constructions

Dans cette partie, nous introduisons quelques propriétés et attributs des schémas. Nous donnons aussi quelques constructions et des premiers exemples, mais l'accent est surtout mis sur la présentation de concepts qui permettront de décrire des exemples plus concrets dans la partie suivante.

### 2.1 Recollement

En topologie, le procédé de *recollement* (*gluing* ou *glueing* en anglais) consiste à de donner des espaces topologiques  $X_i$  indicés par un ensemble  $I$ , et des ouverts  $X_{i,j} \subset X_i$  pour chaque paire d'indices  $i, j$  que l'on recolle au moyen d'homéomorphismes convenables  $\varphi_{i,j} : X_{i,j} \simeq X_{j,i}$  pour former un nouvel espace topologique  $X$  contenant les  $X_i$  comme ouverts. La construction réalise  $X$  comme un quotient de la somme disjointe  $\coprod X_i$  par une relation d'équivalence; il s'agit donc d'un cas particulier de la notion d'espace topologique quotient. Ce procédé est familier par exemple pour fabriquer la droite projective complexe comme réunion de deux copies de  $\mathbb{C}$  le long de leurs ouverts  $\mathbb{C}^*$ . Nous décrivons ici sa formulation dans le cadre des schémas.

**2.1.1 Proposition.** *Supposons donnés :*

- une famille de schémas  $\{X_i\}_{i \in I}$ ,
- des familles d'ouverts  $X_{i,j} \subset X_i$  pour  $i, j \in I$ ,
- des isomorphismes de schémas  $\varphi_{i,j} : X_{i,j} \xrightarrow{\sim} X_{j,i}$  pour  $i, j \in I$ ,

*satisfaisant les conditions :*

- $X_{i,i} = X_i$  et  $\varphi_{i,i} = \text{id}$  pour tout  $i$ ,
- $\varphi_{j,i} = \varphi_{i,j}^{-1}$ ,
- $\varphi_{i,j}(X_{i,j} \cap X_{i,k}) = X_{j,i} \cap X_{j,k}$  et  $(\varphi_{j,k} \circ \varphi_{i,j})|_{X_{i,j} \cap X_{i,k}} = \varphi_{i,k}|_{X_{i,j} \cap X_{i,k}}$  pour tous  $i, j, k$ .

*Alors il existe un unique schéma  $X$  possédant un recouvrement par des ouverts  $U_i \subset X$  isomorphes aux  $X_i$ , de telle manière que les intersections  $U_i \cap U_j$  sont isomorphes aux  $X_{i,j}$  et que les applications identiques  $U_i \cap U_j \rightarrow U_j \cap U_i$  s'identifient aux isomorphismes  $\varphi_{i,j}$ .*

Par exemple, si tous les  $X_{i,j}$  sont vides, on obtient le schéma *somme disjointe*  $X = \coprod X_i$ . Ce cas simple renferme déjà quelques subtilités que l'on voit sur des exemples proposés en exercice.

**2.1.2 Exercice.** (1) Montrez que  $\text{Spec}(A_1) \amalg \cdots \amalg \text{Spec}(A_n) \simeq \text{Spec}(A_1 \times \cdots \times A_n)$ .

(2) Soit  $k$  un corps. Soit  $X = \coprod_{i \in \mathbb{N}} X_i$  une somme disjointe dénombrable de  $k$ -points  $X_i = \text{Spec}(k)$ . Calculez  $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ . Montrez que  $X$  n'est pas un schéma affine. Montrez qu'il existe un morphisme  $X \rightarrow \text{Spec}(k^{\mathbb{N}})$  qui n'est pas surjectif.

**2.1.3 Preuve de 2.1.1 :** Nous allons expliquer la construction de  $X$  et laisser en exercice la vérification des propriétés annoncées. On note  $X'$  la somme disjointe des  $X_i$ ; ses éléments sont des paires  $(i, x)$  avec  $x \in X_i$ . On munit  $X'$  de la relation définie par  $(i, x_i) \sim (j, x_j)$  si et seulement si  $x_j = \varphi_{i,j}(x_i)$ . Les trois conditions de compatibilité assurent que la relation est réflexive, symétrique et transitive i.e. une relation d'équivalence. On note  $X$  le quotient de  $X'$  par cette relation d'équivalence et  $\pi : X' \rightarrow X$  l'application quotient. On munit  $X$  de la topologie quotient, i.e. une partie  $U \subset X$  est déclarée ouverte si et seulement si  $\pi^{-1}(U) \subset X'$  est ouvert. Il reste à munir  $X$  d'un faisceau de fonctions  $\mathcal{O}_X$ . Le candidat naturel est le faisceau des fonctions sur  $X'$  qui sont invariantes pour la relation d'équivalence; nous allons formaliser ceci précisément. Dans le cadre ensembliste, une relation d'équivalence est une certaine partie  $R \subset X' \times X'$ . Cette donnée est équivalente à celle de deux applications  $s, t : R \rightarrow X'$  telles que  $x_1 \sim x_2$  si et seulement s'il existe  $r \in R$  tel que  $x_1 = s(r)$ ,  $x_2 = t(r)$ . Une fonction  $f : X' \rightarrow Z$  est invariante pour la relation d'équivalence ssi  $f \circ s = f \circ t$ , ce qui s'écrit encore  $s^\# f = t^\# f$ . Ainsi formulées, ces idées s'adaptent sans problème. La relation d'équivalence sur  $X'$  est l'ensemble  $R = \coprod X_{i,j}$ . Le morphisme  $s : R \rightarrow X'$  est donné par les inclusions évidentes  $X_{i,j} \hookrightarrow X'$ , et on a un morphisme de faisceaux  $s^\# : \mathcal{O}_{X'} \rightarrow s_* \mathcal{O}_R$  qui fait de  $s$  un morphisme de schémas. De même  $t : R \rightarrow X'$  est donné par les morphismes  $X_{i,j} \xrightarrow{\varphi_{i,j}} X_{j,i} \hookrightarrow X'$ . On pose :

$$\mathcal{O}_X(U) = \{f \in \mathcal{O}_{X'}(U); s^\#(f) = t^\#(f)\}.$$

Pour finir, on vérifie que  $X$  est un schéma et qu'il satisfait les propriétés attendues. Signalons que la construction du faisceau  $\mathcal{O}_X$  peut être formulée d'une manière différente, susceptible d'apporter un éclairage complémentaire, dans la proposition 3.10 du livre Görtz et Wedhorn [GW].  $\square$

**2.1.4 Remarques.** (1) Il est bien sûr suffisant de se donner des  $X_{i,j}$  et des  $\varphi_{i,j}$  pour  $i \neq j$ , mais nous avons préféré inclure les données  $i = j$  pour mettre en évidence le fait que les trois conditions de compatibilité correspondent aux trois propriétés de la relation d'équivalence qui définit le recollement.

(2) La donnée des schémas  $X_i$ , des ouverts  $X_{i,j}$  et des isomorphismes  $\varphi_{i,j}$  peut sembler lourde à manipuler. En fait, dans la plupart des situations concrètes, ces objets sont souvent « naturels » au point où la vérification des conditions de compatibilité est à peu près triviale. Comme il est écrit dans [EH], § I.2.4 : *In these and indeed in almost all applications, we don't really need to give the maps  $\psi_{\alpha\beta}$  explicitly : we are actually given a topological space  $|X|$  and a family of open subsets  $|X_\alpha|$ , each endowed with the structure of an affine scheme — that is, with a structure sheaf  $\mathcal{O}_{X_\alpha}$  — in such a way that  $\mathcal{O}_{X_\alpha}(X_\alpha \cap X_\beta)$  is naturally identified with  $\mathcal{O}_{X_\beta}(X_\alpha \cap X_\beta)$ . For example, they might both be given as subsets of a fixed set.* Nous allons tout de suite illustrer cette observation.

**2.1.5 Exemple 1 : l'espace affine sur un schéma.** Soit  $S$  un schéma et  $n \geq 0$  un entier.

Lorsque  $S = \text{Spec}(A)$ , l'espace affine sur  $S$  est le schéma  $\mathbb{A}_S^n = \mathbb{A}_A^n := \text{Spec}(A[t])$  où  $t = (t_1, \dots, t_n)$  est un  $n$ -uplet d'indéterminées. On note  $\pi : \mathbb{A}_S^n \rightarrow S$  le morphisme déduit de l'injection  $A \rightarrow A[t_1, \dots, t_n]$ . Pour construire l'espace affine sur un schéma  $S$  général, nous aurons besoin de savoir que la préimage  $\pi^{-1}(V) \subset \mathbb{A}_S^n$  d'un ouvert affine  $V \subset S$  s'identifie canoniquement au schéma  $\mathbb{A}_V^n$ . Commençons par le cas d'un ouvert affine principal. Fixons  $f \in A$ . On a d'une part  $A[t][1/f] = A[1/f][t]$  et d'autre part, pour tout  $p \subset A[t_1, \dots, t_n]$  premier :  $f \notin p$  dans  $A[t_1, \dots, t_n] \iff f \notin p \cap A$  dans  $A$ . Ces deux faits impliquent les deux égalités :

$$(\star) \quad \mathbb{A}_{D(f)}^n = D(f.1_{A[t]}) = \pi^{-1}(D(f.1_A)).$$

Si  $V = \text{Spec}(B)$  est un ouvert affine quelconque de  $S$ , on peut le recouvrir par des affines principaux en nombre fini  $D(f_1), \dots, D(f_r)$ . (Il n'est pas vrai qu'un ouvert affine d'un schéma affine est toujours principal.) On observe qu'un ouvert principal  $D(f)$  de  $S$  inclus dans  $V$  est aussi principal dans  $V$ , égal à  $D(f \cdot 1_B)$ . D'après  $(\star)$  il s'ensuit que  $\mathbb{A}_{D(f_i)}^n$  est l'ouvert préimage de  $D(f_i)$  dans  $\mathbb{A}_V^n$ . On obtient :

$$\pi^{-1}(V) = \pi^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^r D(f_i)\right) = \bigcup_{i=1}^r \pi^{-1}(D(f_i)) = \bigcup_{i=1}^r \mathbb{A}_{D(f_i)}^n \subset \mathbb{A}_V^n.$$

Or dans  $B$ , l'égalité d'idéaux  $(f_1, \dots, f_r) = B$  montre qu'un premier  $p \subset B[t]$  ne peut contenir tous les  $f_i$ . En conséquence la dernière inclusion est une égalité, comme désiré.

Lorsque  $S$  est arbitraire, choisissons un recouvrement ouvert affine  $S_i = \text{Spec}(A_i)$ . Notons  $X_i = \mathbb{A}_{S_i}^n$  et  $X_{i,j} \subset X_i$  l'ouvert préimage de  $S_i \cap S_j$  par  $\pi_i : X_i \rightarrow S_i$ . Pour tout ouvert affine  $V \subset S_i \cap S_j$ , les ouverts  $\pi_i^{-1}(V)$  et  $\pi_j^{-1}(V)$  s'identifient canoniquement à l'espace affine  $\mathbb{A}_V^n$  sur  $V$ . En particulier on dispose d'isomorphismes  $\pi_i^{-1}(V) \simeq \pi_j^{-1}(V)$  qui se recollent en un isomorphisme  $\varphi_{i,j} : X_{i,j} \xrightarrow{\sim} X_{j,i}$ . La vérification de la condition de compatibilité  $\varphi_{j,k} \circ \varphi_{i,j} = \varphi_{i,k}$  sur l'ouvert  $X_{i,j} \cap X_{i,k}$  peut se faire localement au-dessus d'ouverts affines  $V \subset S_i \cap S_j \cap S_k$ , auquel cas elle est triviale car elle se réduit à l'identité. La proposition 2.1.1 s'applique et on note  $X = \mathbb{A}_S^n$  le schéma obtenu par recollement. Le fait que ce schéma soit indépendant du recouvrement ouvert  $S = \cup S_i$  choisi est l'objet de l'exercice suivant.

**2.1.6 Exercice.** Soit  $X$  un espace topologique et  $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$  un recouvrement ouvert. On appelle *raffinement* de  $\mathcal{U}$  une paire composée d'un recouvrement ouvert  $\mathcal{V} = \{V_j\}_{j \in J}$  et d'une application  $\lambda : J \rightarrow I$  telle que  $V_j \subset U_{\lambda(j)}$  pour tout  $j \in J$ . On note  $\mathcal{V} \prec \mathcal{U}$  et on dit que  $\mathcal{V}$  *raffine*  $\mathcal{U}$ .

(1) Montrez que deux raffinements  $\mathcal{V}, \mathcal{V}'$  de  $\mathcal{U}$  possèdent un raffinement commun. Montrez que si  $X$  est un schéma et si  $\mathcal{V}, \mathcal{V}'$  sont composés d'ouverts affines, on peut choisir un raffinement commun composé d'ouverts affines.

(2) Soient  $\{S_i\}_{i \in I}$  et  $\{S'_j\}_{j \in J}$  deux recouvrements ouverts affines d'un schéma  $S$ . On note  $X$  et  $X'$  les schémas « espaces affines » construits par recollement par la méthode de 2.1.5. Montrez que si  $\{S'_j\}$  est un raffinement de  $\{S_i\}$ , il y a un isomorphisme canonique  $X' \rightarrow X$ .

(3) Déduisez-en que l'espace affine  $X = \mathbb{A}_S^n$  est indépendant du choix du recouvrement  $\{S_i\}$ , à isomorphisme canonique près.

**2.1.7 Exercice.** Décrivez les différents types de points de  $X = \mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^1$ , la droite affine sur  $\mathbb{Z}$ , comme dans [EH], § II.4.3, exercice II-37.

**2.1.8 Exemple 2 : l'espace projectif sur un schéma.** Commençons par le cas  $S = \text{Spec}(A)$  affine. Considérons des indéterminées  $t_0, \dots, t_n$  et l'anneau  $K = A[t_0, \dots, t_n, \frac{1}{t_0 \dots t_n}]$ . Pour tout entier  $i \in \{0, \dots, n\}$ , les  $n$  éléments  $t_0/t_i, \dots, t_{i-1}/t_i, t_{i+1}/t_i, \dots, t_n/t_i$  sont algébriquement indépendants sur  $A$ . Ainsi l'anneau

$$A_i = A \left[ \frac{t_0}{t_i}, \dots, \frac{t_n}{t_i} \right]$$

est isomorphe à un anneau de polynômes sur  $A$ , donc le schéma  $X_i = \text{Spec}(A_i)$  est un espace affine de dimension  $n$  au-dessus de  $\text{Spec}(A)$ . Pour tout  $j \neq i$ , le schéma

$$X_{i,j} = D\left(\frac{t_j}{t_i}\right) = \text{Spec}\left(A \left[ \frac{t_0}{t_i}, \dots, \frac{t_n}{t_i}, \frac{t_i}{t_j} \right]\right)$$

est un ouvert principal de  $X_i$ . De l'isomorphisme d'anneaux

$$u_{i,j} : A \left[ \frac{t_0}{t_j}, \dots, \dots, \frac{t_n}{t_j}, \frac{t_j}{t_i} \right] \longrightarrow A \left[ \frac{t_0}{t_i}, \dots, \dots, \frac{t_n}{t_i}, \frac{t_i}{t_j} \right]$$

égal à l'égalité comme sous-anneaux de  $K$ , on déduit un isomorphisme de schémas :

$$\varphi_{i,j} = \text{Spec}(u_{i,j}) : X_{i,j} \longrightarrow X_{j,i}.$$

Le fait que les  $u_{i,j}$  soient des morphismes identiques dans un anneau ambiant  $K$  fait que toutes les conditions de compatibilité nécessaires au recollement sont automatiques. Par exemple, la condition  $(\varphi_{j,k} \circ \varphi_{i,j})|_{X_{i,j} \cap X_{i,k}} = \varphi_{i,k}|_{X_{i,j} \cap X_{i,k}}$  revient à dire que les trois anneaux

$$A \left[ \frac{t_0}{t_i}, \dots, \dots, \frac{t_n}{t_i}, \frac{t_i}{t_j}, \frac{t_i}{t_k} \right] , \quad A \left[ \frac{t_0}{t_j}, \dots, \dots, \frac{t_n}{t_j}, \frac{t_j}{t_i}, \frac{t_j}{t_k} \right] , \quad A \left[ \frac{t_0}{t_k}, \dots, \dots, \frac{t_n}{t_k}, \frac{t_k}{t_i}, \frac{t_k}{t_j} \right]$$

sont égaux. On en déduit que les  $X_i$  se recollent en un schéma que l'on note  $X = \mathbb{P}_S^n = \mathbb{P}_A^n$ . Pour un schéma  $S$  général, on procède comme dans le cas de l'espace affine  $\mathbb{A}_S^n$  en recouvrant  $S$  par des ouverts affines pour construire  $X = \mathbb{P}_S^n$  par recollement.

**2.1.9 Exercice.** Comparez la « droite affine avec origine dédoublée » et la droite projective, obtenues en recollant de deux manières différentes deux droites affines : exercice [EH], I-44.

**2.1.10 Exercice.** (1) Soit  $k$  un corps,  $X = \mathbb{A}_k^2$  et  $U = X \setminus \{0\}$ . Calculez  $\Gamma(U, \mathcal{O}_U)$  à l'aide d'un recouvrement de  $U$  par deux ouverts principaux de  $X$ . Déduisez-en que  $U$  n'est pas affine.

(2) Soit  $X$  le plan affine avec origine dédoublée, obtenu en recollant  $X_1 = \mathbb{A}_k^2$  avec  $X_2 = \mathbb{A}_k^2$  le long de leur ouvert commun  $U_1 = U_2 = \mathbb{A}_k^n \setminus \{0\}$  (avec isomorphisme de recollement égal à l'identité). Montrez qu'il existe dans  $X$  deux ouverts affines dont l'intersection n'est pas affine.

## 2.2 Sous-schémas

Soit  $X$  un schéma. Si  $i : U \subset X$  est un ouvert de l'espace topologique sous-jacent à  $X$ , l'espace annelé  $(U, \mathcal{O}_U)$  avec  $\mathcal{O}_U := \mathcal{O}_{X|U} = i^{-1}\mathcal{O}_X$ , est un schéma. En effet, soit  $x \in U$  un point. Soit  $V = \text{Spec}(A)$  un ouvert affine de  $X$  contenant  $x$ . Comme les ouverts distingués de  $V$  forment une base de sa topologie, il existe  $f \in A$  tel que  $W = D(f) \subset U$ . Alors  $(W, \mathcal{O}_W) = (W, \mathcal{O}_{X|W}) = (W, \mathcal{O}_{U|W})$  est un schéma affine et on a ainsi recouvert  $U$  par des schémas affines. On dit que la structure de schéma sur  $U$  est *induite* par celle de  $X$ .

**2.2.1 Définition.** Un *sous-schéma ouvert* de  $X$  est un ouvert  $U \subset X$  muni de sa structure de schéma induit. Une *immersion ouverte* est un morphisme de schémas  $f : X' \rightarrow X$  qui se factorise en

$$X' \xrightarrow{g} U \xrightarrow{i} X$$

où  $g$  est un isomorphisme et  $i$  est l'inclusion d'un sous-schéma ouvert dans  $X$ .

La définition des sous-schémas fermés est un peu plus subtile.

**2.2.2 Remarque.** Si  $i : Y \rightarrow X$  est un fermé de l'espace topologique sous-jacent à  $X$ , le couple  $(Y, i^{-1}\mathcal{O}_X)$  n'est pas un schéma en général. Par exemple, soit  $k$  un corps et supposons que  $Y$  est le point origine  $y = \{t = 0\}$  dans la droite affine  $X = \mathbb{A}_k^1 = \text{Spec}(k[t])$ . Si  $Y$  est muni d'une structure de schéma, étant le seul voisinage de  $y$ , il est nécessairement affine. Si cette structure de schéma est donnée par  $(Y, i^{-1}\mathcal{O}_X)$ , l'anneau de fonctions de  $Y$  est égal à  $\Gamma(Y, i^{-1}\mathcal{O}_X) = \varinjlim_{U \ni y} \mathcal{O}_X(U) = \mathcal{O}_{X,y} = k[t]_{(t)}$ . Or le spectre de  $k[t]_{(t)}$  est composé de deux points, contradiction.

Dans le cas où  $X = \text{Spec}(A)$  est affine, ce sont les schémas  $Y = V(I) = \text{Spec}(A/I)$  qui jouent le rôle de sous-schémas fermés. Ils sont déterminés par leur idéal  $I \subset A$ . On note que  $I$  détermine un faisceau  $\mathcal{I}$  sur  $X$  par la formule  $\mathcal{I}(D(f)) = I_f \subset A_f$ . La fibre de ce faisceau en  $x = [p]$  est égale à  $I_p = IA_p$ . Comme  $p \supset I$  si et seulement si  $I_p \neq A_p$ , on a donc :

$$Y = V(\mathcal{I}) := \{x \in X, \mathcal{I}_x \neq \mathcal{O}_{X,x}\}.$$

## Introduction à la Géométrie Algébrique. Le langage des schémas

Cours du 29 septembre 2015

**2.2.3 Définition.** Un *sous-schéma fermé* de  $X$  est un fermé  $i : Y \hookrightarrow X$  muni d'un faisceau  $\mathcal{O}_Y$  tel que  $(Y, \mathcal{O}_Y)$  est un schéma et le faisceau  $i_*\mathcal{O}_Y$  est isomorphe au quotient  $\mathcal{O}_X/\mathcal{I}$  de  $\mathcal{O}_X$  par un faisceau d'idéaux  $\mathcal{I}$ . Une *immersion fermée* est un morphisme de schémas  $f : X' \rightarrow X$  qui se factorise en

$$X' \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{i} X$$

où  $g$  est un isomorphisme et  $i$  est l'inclusion d'un sous-schéma fermé dans  $X$ .

**2.2.4 Remarque.** Tous les faisceaux d'idéaux  $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_X$  ne peuvent pas apparaître ainsi, car la condition que  $(Y, \mathcal{O}_Y)$  soit un schéma leur impose une contrainte. Les faisceaux d'idéaux qui définissent des sous-schémas fermés sont ceux que nous nommerons *quasi-cohérents*.

Dans le cas affine  $X = \text{Spec}(A)$ , tout idéal  $I \subset A$  définit un sous-schéma fermé  $Y = \text{Spec}(A/I)$ . Le résultat suivant montre que la réciproque est vraie.

**2.2.5 Proposition.** *Si  $X = \text{Spec}(A)$  est un schéma affine, alors l'application  $I \mapsto Y = \text{Spec}(A/I)$  est une bijection entre l'ensemble des idéaux de  $A$  et l'ensemble des sous-schémas fermés de  $X$ .*

**Démonstration :** La difficulté principale est de montrer que tout sous-schéma fermé  $i : Y \hookrightarrow X$  est de la forme  $\text{Spec}(A/I)$ . Pour y parvenir, notons  $\varphi : A \rightarrow \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y)$  le morphisme obtenu en prenant les sections globales de  $i^\sharp$ , et  $I = \ker(\varphi)$ . On dispose alors d'une factorisation  $A \rightarrow A/I \hookrightarrow \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y)$ , et sur les spectres  $Y \rightarrow \text{Spec}(A/I) \hookrightarrow X$ . Quitte à remplacer  $A$  par  $A/I$ , on peut donc supposer que  $\varphi$  est injective et on est ramené à montrer que  $i$  est un isomorphisme.

Montrons que  $i$  est un homéomorphisme. Comme c'est une application injective et fermée, il suffit de montrer qu'elle est surjective. Soit  $D(f) \subset X$  un ouvert principal disjoint de  $Y$ . La fonction  $f$  est donc nulle en tout point de  $Y$ . Localement sur un ouvert affine  $\text{Spec}(B) \subset Y$ , ceci signifie que  $f$  appartient à tous les premiers  $p \subset B$  donc est nilpotente. Comme  $Y$  est quasi-compact (on utilise ici le fait facile qu'un fermé d'un espace quasi-compact est quasi-compact), on en déduit que  $f|_Y = \varphi(f)$  est nilpotente, donc  $f$  est nilpotente par injectivité de  $\varphi$ . Il s'ensuit que  $D(f) = \emptyset$  donc  $i$  est surjective.

Il reste à montrer que  $i^\sharp : \mathcal{O}_X \rightarrow i_*\mathcal{O}_Y$  est un isomorphisme. Comme ce morphisme est surjectif, il suffit de montrer l'injectivité. On montre que les applications sur les fibres  $\mathcal{O}_{X,x} \rightarrow \mathcal{O}_{Y,x}$  sont injectives, pour tout  $x \in Y$ . Comme  $\mathcal{O}_{X,x}$  est un localisé de  $A$ , il suffit de considérer un  $g \in A$  tel que le germe de  $\varphi(g)$  est nul. Ceci signifie qu'il existe un ouvert affine  $U \subset Y$  contenant  $x$  tel que  $\varphi(g)|_U = 0$ . Comme  $i$  est un homéomorphisme, on peut trouver  $s \in A$  tel que  $i^{-1}(D(s))$  contient  $x$  et est inclus dans  $U$ . Pour un recouvrement  $Y = Y_1 \cup \dots \cup Y_r$  par des ouverts affines, la fonction  $\varphi(g)$  est alors nulle en restriction à l'ouvert affine  $Y_i \cap D(\varphi(s))$ , donc il existe  $n_i$  tel que  $\varphi(s^{n_i}g) = 0$  dans  $\Gamma(Y_i, \mathcal{O}_{Y_i})$ . Pour  $n = \max(n_i)$ , on a alors  $\varphi(s^n g) = 0$  dans  $\Gamma(Y, \mathcal{O}_Y)$ . Comme  $\varphi$  est injectif, on déduit que  $s^n g = 0$  et ceci implique que le germe de  $g$  dans  $\mathcal{O}_{X,x}$  est nul, comme souhaité.  $\square$

**2.2.6 Définition.** Un *sous-schéma* de  $X$  est un sous-schéma fermé d'un sous-schéma ouvert de  $X$ . La terminologie *sous-schéma localement fermé* est parfois utilisée aussi. Une *immersion* est un morphisme de schémas  $f : X' \rightarrow X$  qui se factorise en

$$X' \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{i} X$$

où  $g$  est un isomorphisme et  $i$  est l'inclusion d'un sous-schéma  $Z$  dans  $X$ .

**2.2.7 Exercice.** Montrez qu'un sous-schéma ouvert d'un sous-schéma fermé de  $X$  est un sous-schéma de  $X$ . Déduisez-en qu'un sous-schéma d'un sous-schéma de  $X$  est un sous-schéma de  $X$ , et que la composée de deux immersions est une immersion. *Commentaire* : très souvent, un sous-schéma fermé d'un sous-schéma ouvert est un sous-schéma ouvert d'un sous-schéma fermé, mais il existe des exemples (un peu pathologiques) où ce n'est pas le cas (et la lectrice curieuse peut trouver un exemple ici). C'est pour cela que la définition de sous-schéma est ainsi faite.

**2.2.8 Exercice.** Montrez qu'une immersion est un monomorphisme de schémas. (Traitez séparément les immersions fermées et les immersions ouvertes.)

**2.2.9 Sous-schémas de support donné.** Nous avons vu qu'un sous-schéma ouvert  $U \subset X$  est déterminé par son support. La situation est très différente pour les sous-schémas fermés  $Y \subset X$ . Plus précisément, dans le cas affine on a les conditions équivalentes :

- (1)  $Y = V(I) = V(J)$  ensemblistement,
- (2) pour  $p \subset A$  premier,  $p \supset I \iff p \supset J$ ,
- (3)  $\sqrt{I} = \sqrt{J}$ .

En revanche, l'égalité des *sous-schémas*  $Y = V(I)$  et  $Z = V(J)$  implique :

$$I = \ker(\Gamma(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y)) = \ker(\Gamma(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow \Gamma(Z, \mathcal{O}_Z)) = J.$$

(Notez qu'un morphisme de schémas  $f : V \rightarrow W$  induit un morphisme d'anneaux  $\Gamma(W, \mathcal{O}_W) \rightarrow \Gamma(V, \mathcal{O}_V)$  obtenu en prenant les sections globales dans le comorphisme  $f^\sharp : \mathcal{O}_W \rightarrow f_*\mathcal{O}_V$ .) En particulier, les idéaux  $I^n$  pour  $n \geq 1$  définissent des sous-schémas fermés de même support ; il en va de même pour deux idéaux  $I, J$  tels que  $I^n \subset J \subset I^m$  pour  $m, n \geq 1$ . Ceci est lié au fait que si on ne se souvient d'une fonction régulière  $f \in A$  que ses valeurs  $\{f(x) \in \kappa(x), x \in X\}$ , alors l'annulation des  $f(x)^n$  est équivalente à celle des  $f(x)^m$ . La fonction elle-même, information plus subtile que la collection de ses valeurs, diffère.

**2.2.10 Exercice.** Soit  $X = \mathbb{A}_k^1 = \text{Spec}(k[t])$  la droite affine sur un corps et  $x = \{t = 0\}$  l'origine. Trouvez tous sous-schémas fermés de support  $\{x\}$ . Pour chaque tel sous-schéma  $i : Y \hookrightarrow X$ , et chaque fonction  $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ , décrivez ce que signifie l'annulation de  $f$  sur  $Y$ .

## 2.3 Fermés irréductibles et points

Les fermés irréductibles jouent un rôle essentiel pour comprendre la topologie d'un schéma ; nous allons décrire leur relation avec les points. Soulignons le fait que les énoncés suivants sont purement topologiques : seul l'espace topologique sous-jacent entre en jeu. On rappelle que la notion d'espace irréductible possède différentes définitions équivalentes, voir exercice 1.1.5. La lectrice qui voudrait plus de détails sur la notion d'irréductibilité d'un espace topologique peut consulter Bourbaki, Algèbre Commutative, chap. II, § 4, no 1.

**2.3.1 Définition.** Soit  $X$  un espace topologique. On appelle *composante irréductible* de  $X$  un fermé irréductible maximal, i.e. un fermé irréductible  $Y$  tel que pour toute inclusion  $Y \subset Y'$  avec  $Y'$  fermé irréductible, on a  $Y' = Y$ .

**2.3.2 Proposition.** *Tout espace topologique est recouvert par ses composantes irréductibles.*

**Démonstration :** Soit  $x \in X$  et  $E$  l'ensemble des fermés irréductibles de  $X$  qui contiennent  $x$ . On a  $E \neq \emptyset$  car  $\{x\} \in E$ . De plus, la relation d'inclusion est un ordre inductif sur  $E$ , c'est-à-dire que toute chaîne d'éléments de  $E$  possède une borne supérieure. D'après le lemme de Zorn,  $E$  possède un élément maximal  $Y$  qui est un fermé irréductible maximal. (Pour se rafraîchir les idées sur le lemme de Zorn, on peut consulter l'excellent livre de Paul Halmos [Hal].)  $\square$

**2.3.3 Lemme.** *Soit  $X = \text{Spec}(A)$  un schéma affine.*

- (1) *L'adhérence d'un point  $x = [p]$  est le fermé irréductible  $V(p)$ .*
- (2) *Les fermés irréductibles de  $X$  sont les ensembles  $V(p)$  avec  $p$  premier.*
- (3) *Pour tout fermé irréductible  $F \subset X$ , il existe un unique point  $\eta = \eta_F \in X$  tel que  $\overline{\{\eta\}} = F$ , appelé point générique de  $F$ . Les applications  $x \mapsto \overline{\{x\}}$  et  $F \mapsto \eta_F$  définissent une bijection :*

$$\text{Spec}(A) \xleftarrow{1-1} \{\text{fermés irréductibles de } X\}.$$

- (4) *La bijection précédente est décroissante : si  $x = [p]$  et  $y = [q]$  sont deux points de  $X$ , on a  $p \subset q$  si et seulement si  $\{y\} \subset \{x\}$ .*
- (5) *Les points fermés de  $X$  sont les  $x = [p]$  où  $p$  est un premier maximal.*
- (6) *Les composantes irréductibles sont les fermés  $V(p)$  où  $p$  est un premier minimal.*
- (7) *L'espace  $X$  est irréductible si et seulement si le nilradical de  $A$  est premier.*

**Démonstration :** (1) On a  $\overline{\{x\}} = \bigcap_{p \in V(I)} V(I) = \bigcap_{p \supset I} V(I) = V(p)$  en utilisant, pour la dernière égalité, le fait que  $I \subset J$  entraîne  $V(I) \supset V(J)$ .

(2) Un point  $x = [p]$  est irréductible, donc son adhérence  $V(p)$  aussi. Réciproquement, soit  $F = V(I)$  un fermé irréductible de  $X$ . Soit  $\sqrt{I} = \{x \in A; \exists n \geq 1, x^n \in I\}$  l'idéal racine de  $I$ . On sait que  $\sqrt{I} = \bigcap_{p \supset I} p$ , donc  $V(I) = V(\sqrt{I})$ . Quitte à remplacer  $I$  par  $\sqrt{I}$  on peut donc supposer que  $I$  est un idéal radical. Supposons que  $I$  n'est pas premier, alors il existe  $a, b \in A$  tels que  $a, b \notin I$  mais  $ab \in I$ . Alors  $V(I, a) \cup V(I, b) = V(I)$ . Par ailleurs, on a  $V(I, a) \subsetneq V(I)$  car sinon, tout idéal premier contenant  $I$  contient  $a$ , donc  $I = \sqrt{I} = \bigcap_{p \supset I} p$  contient  $a$ , contradiction. De même, on a  $V(I, b) \subsetneq V(I)$ . Ceci montre que  $V(I)$  n'est pas irréductible, contradiction. Donc  $I$  est premier.

(3) D'après le point (2), le fermé  $F$  est de la forme  $V(p)$  donc  $\eta = [p]$  convient. Soient  $p, q$  deux premiers tels que  $F = V(p) = V(q)$ . Alors  $p \in V(q)$  donc  $p \supset q$ . De même  $q \supset p$ , donc  $p = q$  ce qui montre l'unicité de  $\eta$ . La bijection annoncée est claire.

(4) Laissez à la lectrice.

(5), (6). Comme la bijection précédente est décroissante, elle fait correspondre éléments minimaux et éléments maximaux de part et d'autre. Donc les points fermés (i.e. les fermés irréductibles minimaux)

correspondent aux premiers maximaux, et les composantes irréductibles (i.e. les fermés irréductibles maximaux) correspondent aux premiers minimaux.

(7) L'espace  $X$  est irréductible ssi il n'a qu'une composante irréductible, ssi  $A$  ne possède qu'un premier minimal  $p$ . Ceci signifie que le nilradical, qui est l'intersection de tous les premiers (les minimaux suffisent, bien sûr), est égal à  $p$  i.e. est un idéal premier.  $\square$

L'énoncé 2.3.3(3) est valable pour un schéma quelconque :

**2.3.4 Proposition.** *Soit  $X$  un schéma. Alors tout fermé  $F \subset X$  possède un unique point générique  $\eta_F$  et les applications  $x \mapsto \overline{\{x\}}$  et  $F \mapsto \eta_F$  définissent une bijection :*

$$|X| \xleftarrow{1-1} \{\text{fermés irréductibles de } X\}.$$

**Démonstration :** Nous nous contenterons de construire le point générique d'un fermé irréductible ; le reste est plus facile et laissé en exercice. Nous utiliserons le fait que pour tout ouvert  $U \subset X$ , l'application  $F \mapsto F \cap U$  est une bijection de l'ensemble des fermés irréductibles de  $X$  qui rencontrent  $U$  vers l'ensemble des fermés irréductibles de  $U$ , dont l'inverse est  $G \mapsto \overline{G}$ . De plus cette bijection est compatible avec la restriction à un sous-ouvert, en un sens évident.

Soit  $F \subset X$  un fermé irréductible. Alors par définition  $F$  est non vide ; soit  $x \in F$  un point. Soit  $U \subset X$  un voisinage ouvert affine de  $x$  dans  $X$ . D'après le résultat dans le cas affine (lemme 2.3.3(3)), le fermé irréductible  $F \cap U$  possède un unique point générique  $\eta_U$  dans  $U$ . Soit  $V \subset X$  un autre voisinage ouvert affine de  $x$  dans  $X$ . Alors, pour tout choix d'un troisième voisinage ouvert affine  $W \subset U \cap V$  de  $x$ , on a  $\eta_U = \eta_W = \eta_V$  d'après l'assertion d'unicité dans le cas affine. Donc  $\eta_F := \eta_U$  ne dépend pas de  $U$ .  $\square$

L'ensemble des fermés irréductibles de  $X$  est muni de la relation d'inclusion. Si on traduit cette relation sur  $X$  à l'aide de la bijection précédente, on tombe sur les notions générales de spécialisation et de générisation dans un espace topologique.

**2.3.5 Définition.** Soient  $X$  un espace topologique et  $x, y$  deux points tels que  $\overline{\{y\}} \subset \overline{\{x\}}$ , ou de manière équivalente  $y \in \overline{\{x\}}$ . On dit alors que  $y$  est une *spécialisation* de  $x$ , ou que  $x$  est une *générisation* de  $y$ . On dit aussi que  $x$  se *spécialise* sur  $y$ , et on note  $x \rightsquigarrow y$ .

**2.3.6 Exercice.** (1) Dans un espace topologique, montrez que tout fermé est stable par spécialisation et tout ouvert est stable par générisation.

(2) Soit  $f : X \rightarrow Y$  une application continue entre espaces topologiques. Soient  $x_1, x_2 \in X$ . Montrez que  $x_1 \rightsquigarrow x_2$  implique  $f(x_1) \rightsquigarrow f(x_2)$ .

**2.3.7 Exercice.** Soient  $X$  un schéma et  $k$  un corps. Établissez une bijection entre  $\text{Hom}(\text{Spec}(k), X)$  et l'ensemble des paires  $(x, i)$  composées d'un point  $x \in X$  et d'une extension de corps  $i : \kappa(x) \rightarrow k$ .

## Introduction à la Géométrie Algébrique. Le langage des schémas

Cours du 6 octobre 2015

### 2.4 Schémas noethériens

Les propriétés de finitude d'un anneau noethérien ont pour conséquence des propriétés de finitude pour le spectre : par exemple, les chaînes de fermés irréductibles  $Y_1 \subsetneq Y_2 \subsetneq Y_3 \subsetneq \dots$ , qui correspondent aux chaînes d'idéaux premiers de l'anneau, sont de longueur finie. Sur un schéma général, il est clair que l'hypothèse de quasi-compacité est nécessaire pour conserver ces propriétés.

**2.4.1 Définition.** On dit qu'un schéma  $X$  est *localement noethérien* s'il possède un recouvrement par des ouverts affines dont les anneaux de fonctions sont noethériens. On dit qu'un schéma  $X$  est *noethérien* s'il est localement noethérien et quasi-compact.

**2.4.2 Proposition.** Soit  $X$  un schéma. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (1)  $X$  est localement noethérien,
- (2) pour tout ouvert affine  $U \subset X$ , l'anneau  $\mathcal{O}_X(U)$  est noethérien.

**Démonstration :** Seule l'implication (1)  $\Rightarrow$  (2) mérite un argument. Soit  $U = \text{Spec}(A)$  ouvert affine et  $\{I_k\}_{k \geq 0}$  une suite croissante d'idéaux de  $A$ . Utilisant le fait que  $X$  est localement noethérien et que tout localisé d'un anneau noethérien est noethérien, on voit que  $U$  peut être recouvert par des ouverts affines distingués  $D(f)$  d'anneaux de fonctions  $A_f$  noethériens. De plus, par quasi-compacité de  $U$  on peut supposer ce recouvrement fini. Alors, pour tout  $f$ , la suite d'idéaux localisés  $(I_k)_f$  est stationnaire, à partir d'un entier  $n$  que l'on peut supposer indépendant de  $f$ . Or, si  $I, J$  sont deux idéaux de  $A$  tels que  $I_f = J_f$  pour tout  $f$ , alors  $I = J$  (pour le voir, utiliser une partition de l'unité adaptée aux  $f^\alpha$  pour un entier  $\alpha$  bien choisi). Ceci montre que la suite  $I_k$  est stationnaire. Donc  $A$  est noethérien.  $\square$

Voici un exemple de schéma noethérien.

**2.4.3 Exemple.** Soit  $k$  un corps. Un schéma est *localement de type fini sur  $k$*  s'il possède un recouvrement par des ouverts affines dont les anneaux de fonctions sont des  $k$ -algèbres de type fini. On dit que  $X$  est *de type fini sur  $k$*  s'il est localement de type fini et quasi-compact. Par exemple, un sous-schéma d'un espace affine  $\mathbb{A}_k^n$  ou d'un espace projectif  $\mathbb{P}_k^n$  est de type fini sur  $k$ .

La propriété noethérienne a un pendant topologico-combinatoire introduit dans l'exercice suivant.

**2.4.4 Exercice.** On dit qu'un espace topologique  $X$  est *noethérien* si toute chaîne décroissante  $Y_0 \supset Y_1 \supset Y_2 \supset \dots$  de fermés est stationnaire.

(1) Soit  $X$  un espace noethérien. Montrez que (i) toute partie munie de la topologie induite est un espace noethérien (ii)  $X$  est quasi-compact (iii)  $X$  possède un nombre fini de composantes irréductibles (iv) toute composante irréductible contient un ouvert non vide de  $X$ .

(2) Montrez que le spectre d'un anneau noethérien est un espace topologique noethérien. Montrez que la réciproque est fautive en à l'aide d'un anneau non noethérien dont le spectre est ponctuel.

**2.4.5 Proposition.** *Tout sous-schéma d'un schéma (localement) noethérien est (localement) noethérien.*

**Démonstration :** Supposons  $X$  localement noethérien. Si  $U \subset X$  est un sous-schéma ouvert, le fait que  $U$  est encore localement noethérien est clair. Si  $Y \subset X$  est un sous-schéma fermé, c'est tout aussi clair. Le cas d'un sous-schéma quelconque s'en déduit. Supposons de plus  $X$  quasi-compact. Alors il est réunion d'un nombre fini d'ouverts affines dont le spectre est un espace noethérien, d'après 2.4.2 et 2.4.4(2). On en déduit que l'espace  $|X|$  lui-même est noethérien. Alors tout sous-schéma a pour support un espace noethérien, donc quasi-compact, d'après 2.4.4(1). Ceci conclut.  $\square$

**2.4.6 Exercice.** La proposition précédente implique que tout ouvert d'un schéma noethérien est quasi-compact. On peut construire un exemple de schéma affine (donc quasi-compact) qui possède des ouverts non quasi-compact de la manière suivante. Sur un corps  $k$ , on prend l'anneau produit  $A = k^{\mathbb{N}}$ . Montrez que  $X = \text{Spec}(A)$  contient comme ouvert le schéma non quasi-compact  $U = \coprod_{n \in \mathbb{N}} \text{Spec}(k)$ , somme disjointe dénombrable de  $k$ -points. Retrouvez le fait que  $U \neq X$  en expliquant pourquoi il existe un idéal premier de  $A$  qui n'est pas le noyau de l'une des projections naturelles  $A \rightarrow k$ .

**2.4.7 Définition.** Soit  $A$  un anneau. On appelle *dimension de Krull* de  $A$  et on note  $\dim(A)$  le supremum des longueurs  $r$  de chaînes  $p_0 \subsetneq p_1 \subsetneq \dots \subsetneq p_r$  d'idéaux premiers de  $A$ .

Soit  $X$  un espace topologique. On appelle *dimension combinatoire* de  $X$  et on note  $\dim(X)$  le supremum des longueurs  $r$  de chaînes  $Y_0 \supsetneq Y_1 \supsetneq \dots \supsetneq Y_r$  de fermés irréductibles de  $X$ .

La théorie de la dimension des anneaux noethériens est une partie très importante et subtile de l'algèbre commutative. Nous nous contentons d'en citer sans preuve quelques résultats marquants.

**2.4.8 Proposition.** *Soit  $A$  un anneau noethérien.*

- (1) *Si  $A$  est local, alors  $\dim(A) < \infty$ .*
- (2) *On a  $\dim(A) = \sup \{ \dim(A_p), p \subset A \text{ premier} \}$ .*
- (3) *Si  $A$  est une algèbre intègre de type fini sur un corps  $k$ , alors  $r = \dim(A) < \infty$  est égal au degré de transcendance sur  $k$  du corps de fractions de  $A$ . De plus, toutes les chaînes maximales de premiers sont de longueur  $r$ .*
- (4) *L'anneau  $A$  possède un nombre fini d'idéaux premiers minimaux.*
- (5) *Si  $A$  est un corps alors  $\dim(A) = 0$ . Si  $A = \mathbb{Z}$  alors  $\dim(A) = 1$ . Si  $t$  est une indéterminée, on a  $\dim(A[t]) = \dim(A) + 1$ .*
- (6) *Il existe un anneau noethérien de dimension infinie.*

**Démonstration :** Dans le livre de Eisenbud [Ei], ces résultats sont discutés dans l'introduction du chapitre 8 (notamment dans la section 8.1 qui est très intéressante), puis démontrés au fur et à mesure du chapitre. Par exemple (1) est conséquence de cor. 10.7, (3) est le th. A dans la section 13.1, (4) est le th. 3.1, (5) est cor. 10.13. Enfin pour (6) on peut trouver un exemple dans [Na], appendice A1, exemple 1 et reproduit dans [Ei], exer. 9.6 ou ici.  $\square$

**2.4.9 Exercice.** Montrez que  $\dim(A) = \dim(A_{\text{red}})$ .

## 2.5 Schémas réduits et intègres

**2.5.1 Définition.** On dit qu'un schéma  $X$  est *réduit* si pour tout ouvert  $U \subset X$ , l'anneau  $\mathcal{O}_X(U)$  est réduit. On dit qu'un schéma est *irréductible* si l'espace topologique sous-jacent  $|X|$  l'est. On dit qu'un schéma  $X$  est *intègre* si pour tout ouvert *non vide*  $U \subset X$ , l'anneau  $\mathcal{O}_X(U)$  est intègre.

**2.5.2 Exercice.** Montrez que  $X$  est réduit ssi pour tout  $x \in X$ , l'anneau local  $\mathcal{O}_{X,x}$  est réduit.

Pour tout ouvert  $U \subset X$ , on note  $\mathcal{N}_0(U)$  l'ensemble des fonctions nilpotentes de  $\mathcal{O}_X(U)$  et  $\mathcal{N}(U)$  l'ensemble des fonctions *localement* nilpotentes dans  $\mathcal{O}_X(U)$ . On appelle  $\mathcal{N}_0$  le *préfaisceau nilradical* de  $\mathcal{O}_X$  et  $\mathcal{N}$  le *faisceau nilradical* de  $\mathcal{O}_X$ , à cause de l'exercice suivant.

**2.5.3 Exercice.** Montrez que :

- (1)  $\mathcal{N}_0(U) = \mathcal{N}(U)$  pour tout  $U$  quasi-compact.
- (2) L'inclusion  $i : \mathcal{N}_0 \hookrightarrow \mathcal{N}$  identifie  $\mathcal{N}$  au faisceau associé à  $\mathcal{N}_0$ .
- (3) Le faisceau d'idéaux  $\mathcal{N}$  est quasi-cohérent.
- (4) Si  $X$  est noethérien,  $\mathcal{N}_0$  est un faisceau.
- (5) Si  $X = \coprod_{n \geq 0} \text{Spec}(k[t]/(t^n))$ , pour un corps  $k$ , alors  $\mathcal{N}_0$  n'est pas un faisceau.

L'exemple (4) montre que  $\mathcal{N}_0$  n'est pas toujours un faisceau, contrairement à ce qui est affirmé dans [EH], page 25. On peut même fabriquer un exemple dans lequel  $X$  est affine, en prenant le spectre de  $A = \prod_{n \geq 0} k[t]/(t^n)$  et en raisonnant de la même manière que dans l'exercice 2.4.6.

**2.5.4 Proposition.** Soit  $X$  un schéma et  $F \subset |X|$  un fermé. Alors, il existe un plus petit sous-schéma fermé  $Y \subset X$  de support  $F$ . C'est le seul sous-schéma fermé de  $X$  de support  $F$  qui soit réduit. Si  $F = |X|$ , ce sous-schéma fermé est le schéma réduit  $X_{\text{red}}$ , dont le faisceau d'idéaux est le nilradical  $\mathcal{N}$ .

**Démonstration :** Si  $X = \text{Spec}(A)$  est affine, le fermé  $F$  est de la forme  $V(I)$ , pour un idéal  $I \subset A$ . De plus, on a vu en 2.2.9 que parmi tous les idéaux qui conviennent, il y en a un qui est maximal : c'est le seul qui soit *radical* i.e. tel que  $I = \sqrt{I}$ . Ceci signifie que le quotient  $A/I$  est réduit, c'est-à-dire que le schéma  $V(I)$  est réduit. Si  $X$  est un schéma arbitraire, sur chaque ouvert affine  $U$  on dispose par ce qui précède d'un plus petit sous-schéma fermé  $Y_U$  de support  $F \cap U$ . Par unicité, les sous-schémas fermés  $Y_U$  coïncident sur les intersections  $U \cap V$ , donc se recollent en un unique sous-schéma fermé  $Y$  qui remplit les conditions demandées.  $\square$

**2.5.5 Proposition.** *Un schéma est intègre si et seulement s'il est irréductible et réduit.*

**Démonstration :** Si  $X$  n'est pas réduit, il n'est pas intègre. S'il n'est pas irréductible, il existe deux ouverts non vides disjoints  $U, V$ . Dans ce cas  $\mathcal{O}_X(u \cup V) = \mathcal{O}_X(U) \times \mathcal{O}_X(V)$  n'est pas intègre, donc  $X$  n'est pas intègre.

Réciproquement, supposons  $X$  irréductible et réduit. Soit  $U$  un ouvert non vide et  $f, g \in \mathcal{O}_X(U)$  tels que  $fg = 0$ . Alors les fermés  $Z_f = \{x \in U; f(x) = 0 \in \kappa(x)\}$  et  $Z_g$  recouvrent  $X$  (le fait que ce sont des fermés découle de 1.8.6). Par irréductibilité, l'un des deux égale  $X$ , par exemple  $Z_f$ . Ceci signifie que le germe  $f_x$  est dans l'idéal maximal de  $\mathcal{O}_{X,x}$ , pour tout  $x \in U$ . Alors dans tout ouvert affine de  $U$  la fonction  $f$  est nilpotente, donc nulle sur  $U$  par hypothèse.  $\square$

## 2.6 Produits fibrés

**2.6.1 Produit de schémas.** Le produit de variétés est une opération fondamentale; en géométrie différentielle, c'est lui qui permet de définir la variété  $\mathbb{R}^n$  à partir de  $\mathbb{R}$ . En géométrie algébrique, il serait bienvenu qu'il permette de définir l'espace affine  $\mathbb{A}_k^n$  à partir de  $\mathbb{A}_k^1$ . Malheureusement, en ce qui concerne les espaces topologiques ce n'est pas du tout le cas. Par exemple, l'espace  $|\mathbb{A}_k^2|$  est beaucoup plus gros que  $|\mathbb{A}_k^1| \times |\mathbb{A}_k^1|$ . En effet, supposant le corps  $k$  algébriquement clos pour simplifier, on a  $|\mathbb{A}_k^1| = k \cup \{\eta_{\mathbb{A}^1}\}$  où  $\eta_{\mathbb{A}^1}$  est le point générique, alors que  $|\mathbb{A}_k^2|$  comprend  $k^2$  (points de dimension 0), les points génériques de courbes irréductibles planes (points de dimension 1), et un point générique  $\eta_{\mathbb{A}^2}$ . Il y a une application continue naturelle  $|\mathbb{A}_k^2| \rightarrow |\mathbb{A}_k^1| \times |\mathbb{A}_k^1|$  décrite ainsi :

- le point fermé  $(a, b) \in k^2$  est envoyé sur le couple  $(a, b)$ ,
- le point générique  $\eta_C$  d'une courbe verticale  $C = \{a\} \times \mathbb{A}^1(k)$  est envoyé sur  $(a, \eta_{\mathbb{A}^1})$ , le point générique  $\eta_C$  d'une courbe horizontale  $C = \mathbb{A}^1(k) \times \{b\}$  est envoyé sur  $(\eta_{\mathbb{A}^1}, b)$ , et le point générique  $\eta_C$  d'une courbe transverse est envoyé sur  $(\eta_{\mathbb{A}^1}, \eta_{\mathbb{A}^1})$ ,
- le point générique  $\eta_{\mathbb{A}^2}$  est envoyé sur  $(\eta_{\mathbb{A}^1}, \eta_{\mathbb{A}^1})$ .

On voit que les courbes transverses contribuent à grossir excessivement la fibre au-dessus de  $(\eta_{\mathbb{A}^1}, \eta_{\mathbb{A}^1})$ . En fait la bonne définition du produit est la définition *catégorique*, c'est celle que nous adoptons dans la catégorie des schémas.

**2.6.2 Définition.** Dans une catégorie  $\mathcal{C}$ , le *produit* de deux objets  $X, Y$  est un objet  $Z$  muni de deux morphismes  $p_1 : Z \rightarrow X$  et  $p_2 : Z \rightarrow Y$  tel que pour toute paire de morphismes  $u : W \rightarrow X$  et  $v : W \rightarrow Y$ , il existe un unique morphisme  $w : W \rightarrow Z$  tel que  $u = p_1 w$  et  $v = p_2 w$ .

**2.6.3 Exercice.** Démontrez que le produit  $\mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^1 \times \mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^1$  est égal à  $\mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^2$ .

**2.6.4 Produit fibré de schémas.** Le résultat de l'exercice ci-dessus met en évidence un phénomène curieux : on a  $\dim(\mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^2) = 3$  alors que  $\dim(\mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^1) + \dim(\mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^1) = 4$  (rappelons-nous que  $\dim(A[t]) = \dim(A) + 1$  pour  $A$  noethérien, voir 2.4.8). Ceci provient du fait que le schéma  $\text{Spec}(\mathbb{Z})$  est de dimension 1. Si on pose  $\dim^*(X) = \dim(X) - \dim(\text{Spec}(\mathbb{Z})) = \dim(X) - 1$ , on obtient  $\dim^*(\mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^n) = n$  et la relation

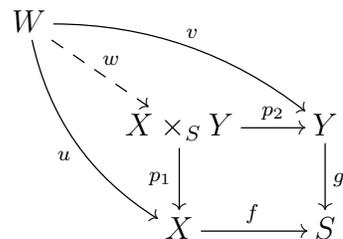
$$\dim^*(\mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^{n+m}) = \dim^*(\mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^n) + \dim^*(\mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^m)$$

a lieu. Pour comprendre pourquoi la définition de  $\dim^*$  est naturelle, il suffit de mettre  $\text{Spec}(\mathbb{Z})$  à sa juste place, qui est celle d'objet terminal de la catégorie des schémas. (Rappelons qu'un *objet*

*terminal* dans une catégorie  $C$  est un objet  $T \in C$  tel que tout objet  $X$  possède un unique morphisme  $X \rightarrow T$ .) La catégorie des espaces topologiques et celle des variétés différentielles ont un objet terminal qui est le point ; c'est parce qu'il est de dimension 0 qu'il ne perturbe pas la relation  $\dim(X \times Y) = \dim(X) + \dim(Y)$ .

Dans une catégorie qui possède un objet terminal, le produit est un cas particulier de produit fibré. Le produit fibré porte bien son nom : c'est un produit pour des objets *fibrés au-dessus d'une base*  $S$ , et c'est pour mesurer la dimension des fibres que l'invariant  $\dim^*$  est pertinent.

**2.6.5 Définition.** Dans une catégorie  $C$ , le *produit fibré* de deux morphismes  $f : X \rightarrow S$  et  $g : Y \rightarrow S$  est un objet  $Z$  muni de deux morphismes  $p_1 : Z \rightarrow X$  et  $p_2 : Z \rightarrow Y$  tels que  $fp_1 = gp_2$ , avec la propriété suivante : pour toute paire de morphismes  $u : W \rightarrow X$  et  $v : W \rightarrow Y$  tels que  $fu = gv$ , il existe un unique morphisme  $w : W \rightarrow Z$  tel que  $u = p_1w$  et  $v = p_2w$ . On dit que  $u$  et  $v$  sont les *composantes* de  $w$  et on note  $w = (u, v)$ . Lorsqu'il existe, le produit fibré est unique à unique isomorphisme près et il est noté  $X \times_{f,S,g} Y$  ou simplement  $X \times_S Y$ .



Par exemple, dans la catégorie des ensembles le produit fibré est l'ensemble  $\{(x, y); f(x) = g(y)\}$  muni des deux projections naturelles.

**2.6.6 Théorème.** *Le produit fibré  $X \times_S Y$  de deux morphismes  $f : X \rightarrow S$  et  $g : Y \rightarrow S$  existe dans la catégorie des schémas.*

**Démonstration :** Premier cas :  $X = \text{Spec}(A)$ ,  $Y = \text{Spec}(B)$ ,  $S = \text{Spec}(R)$  tous trois affines. Dans ce cas, se donner des morphismes  $u : W \rightarrow X$  et  $v : W \rightarrow Y$  tels que  $fu = gv$  est équivalent à se donner des morphismes d'anneaux  $u' : A \rightarrow \Gamma(W, \mathcal{O}_W)$  et  $v' : B \rightarrow \Gamma(W, \mathcal{O}_W)$  tels que  $u'f' = v'g'$ , d'après 1.8.7. Comme la somme amalgamée de  $A$  et  $B$  le long de  $R$  dans la catégorie des anneaux commutatifs unitaires est leur produit tensoriel, on en déduit qu'il existe un unique morphisme d'anneaux  $w' : A \otimes_R B \rightarrow \Gamma(W, \mathcal{O}_W)$  par lequel  $u'$  et  $v'$  se factorisent. Au morphisme  $w'$  est associé un morphisme de schémas  $w : W \rightarrow \text{Spec}(A \otimes_R B)$ . Ceci montre que  $X \times_S Y = \text{Spec}(A \otimes_R B)$ .

Deuxième cas : seul  $S$  est affine. Choisissons des recouvrements ouverts affines  $X = \cup X_i$  et  $Y = \cup Y_k$  et notons  $X_{i,j} = X_i \cap X_j$ ,  $Y_{k,l} = Y_k \cap Y_l$ . D'après le premier cas, les produits fibrés  $Z_{i,k} := X_i \times_S Y_k$  existent. Il n'est pas difficile de voir que le produit fibré  $X_{i,j} \times_S Y_{k,l}$  existe également et qu'on peut le réaliser comme un ouvert dans les schémas  $Z_{i,k}$ ,  $Z_{i,l}$ ,  $Z_{j,k}$  et  $Z_{j,l}$ . Plus précisément, notons  $Z = Z_{i,j,k,l}$  le sous-schéma ouvert  $p_1^{-1}(X_{i,j}) \cap p_2^{-1}(Y_{k,l})$  dans  $Z_{i,k} = X_i \times_S Y_k$ , où  $p_1 : Z_{i,k} \rightarrow X_i$  et  $p_2 : Z_{i,k} \rightarrow Y_k$  sont les projections. On vérifie immédiatement que  $Z$  possède la propriété universelle du produit fibré (catégorique)  $X_{i,j} \times_S Y_{k,l}$ . Ceci réalise ce produit fibré comme un ouvert de  $Z_{i,k}$  et la même construction permet de le voir comme un ouvert de  $Z_{i,l}$ ,  $Z_{j,k}$  et  $Z_{j,l}$ . On peut alors recoller les schémas  $Z_{i,k}$  le long des ouverts  $Z_{i,j,k,l}$  pour former un schéma  $X \times_S Y$ . (Il s'agit d'un recollement ordinaire dans lequel l'ensemble d'indices de la famille de schémas à recoller est un produit cartésien de deux ensembles.) Vérifions que c'est bien le produit fibré attendu. Étant donnés  $u : W \rightarrow X$  et  $v : W \rightarrow Y$  tels que  $fu = gv$ , on considère les ouverts  $W_{i,k} = u^{-1}(X_i) \cap v^{-1}(Y_k)$  dans  $W$ . On construit des morphismes  $W_{i,k} \rightarrow X_i \times_S Y_k$  qui se recollent en un morphisme  $W \rightarrow X \times_S Y$ .

Troisième cas : cas général. Soit  $S = \cup S_i$  un recouvrement de  $S$  par des ouverts affines. Soient  $X_i = f^{-1}(S_i)$  et  $Y_i = g^{-1}(S_i)$  qui sont ouverts dans  $X$  et  $Y$ . Par restriction, on dispose de morphismes

$f_i : X_i \rightarrow S_i$  et  $g_i : Y_i \rightarrow S_i$ . D'après le deuxième cas, les produits fibrés  $X_i \times_{S_i} Y_i$  existent. Il n'est pas difficile de voir que les produits fibrés  $X_{i,j} \times_{S_{i,j}} Y_{i,j}$  existent également et se réalisent comme des ouverts dans  $X_i \times_{S_i} Y_i$  et dans  $X_j \times_{S_j} Y_j$ . Ces derniers se recollent donc pour former un schéma  $X \times_S Y$  pour lequel on vérifie comme précédemment la propriété de produit fibré.  $\square$

**2.6.7 Schémas relatifs.** Nous avons vu que l'espace affine sur  $\mathbb{Z}$  est mieux compris comme un morphisme  $\mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^n \rightarrow \text{Spec}(\mathbb{Z})$  que comme un simple schéma. De même, les variétés sur un corps  $k$  doivent être vues comme des morphismes  $X \rightarrow \text{Spec}(k)$ . Plus généralement, dans de nombreux problèmes de géométrie algébrique on travaille avec un schéma de base  $S$  et le cadre naturel est celui de la catégorie  $\text{Sch}/S$  des *schémas au-dessus de  $S$*  ou  *$S$ -schémas* décrite ainsi :

- les objets sont les morphismes  $f : X \rightarrow S$  ;
- les morphismes entre  $f : X \rightarrow S$  et  $g : Y \rightarrow S$  sont les morphismes  $u : X \rightarrow Y$  tels que  $gu = f$ .

Un objet de  $\text{Sch}/S$  est parfois noté simplement  $X/S$ . Un morphisme entre  $X/S$  et  $Y/S$  est appelé un morphisme de  $S$ -schémas ou  $S$ -morphisme, et on note  $\text{Hom}_S(X, Y)$  au lieu de  $\text{Hom}_{\text{Sch}/S}(X, Y)$ . Par construction, le schéma  $S$  est un objet terminal de  $\text{Sch}/S$ . Le produit de deux  $S$ -schémas n'est autre que le produit fibré  $X \times_S Y$ .

Lorsque  $S = \text{Spec}(A)$ , on parle aussi de la catégorie  $\text{Sch}/A$  des  $A$ -schémas, on note  $\text{Hom}_A(X, Y)$  au lieu de  $\text{Hom}_S(X, Y)$ , etc. Si  $X$  est un  $A$ -schéma et  $A \rightarrow B$  est un morphisme d'anneaux, on note parfois abusivement  $X \otimes_A B$  au lieu de  $X \times_{\text{Spec}(A)} \text{Spec}(B)$ .

**2.6.8 Exercice.** Montrez que  $\mathbb{A}_S^n \simeq \mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^n \times S$  et  $\mathbb{P}_S^n \simeq \mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^n \times S$ . Déduisez-en une nouvelle preuve du fait que ces schémas ne dépendent pas des choix de recouvrements ouverts faits pour les construire dans 2.1.5 et 2.1.8.

**2.6.9 Exercice.** Soient  $X/S$  et  $Y/S$  deux  $S$ -schémas. Montrez qu'il existe une application naturelle  $|X \times_S Y| \rightarrow |X| \times_{|S|} |Y|$  et qu'elle est surjective.

**2.6.10 Exercice.** Soit  $S$  un schéma et  $S' \rightarrow S$  un morphisme.

- (1) Définissez un foncteur *changement de base*  $\text{Sch}/S \rightarrow \text{Sch}/S'$ ,  $X \mapsto X_{S'} := X \times_S S'$ .
- (2) Montrez que le changement de base par  $S'' \rightarrow S' \rightarrow S$  est le composé des changements de base par  $S' \rightarrow S$  et  $S'' \rightarrow S'$ .
- (2) Soit  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme de  $S$ -schémas. Montrez que si  $f$  est une immersion, alors pour tout  $S' \rightarrow S$ , le morphisme  $f_{S'} : X_{S'} \rightarrow Y_{S'}$  est une immersion. On dit que la propriété d'être une immersion est *stable par changement de base*.

## Introduction à la Géométrie Algébrique. Le langage des schémas

Cours du 13 octobre 2015

**2.6.11 Remarque.** Dans la construction du produit fibré  $X \times_S Y$  par recollement, un point décisif est l'unicité à unique isomorphisme près qui est assurée par la propriété universelle du produit fibré. C'est ce qui assure l'identification des produits fibrés  $X_{i,j} \times_S Y_{k,l}$  dans quatre schémas  $X_\alpha \times_S Y_\beta$ , dans la deuxième étape de la preuve du théorème 2.6.6. De la même manière, le recollement qui permet de fabriquer l'espace affine relatif  $\mathbb{A}_S^n$  est simplifié si on utilise sa propriété universelle dans la catégorie des  $S$ -schémas  $\text{Sch}/S$ . Pour la formuler, il faut comprendre que  $\mathbb{A}_S^n$  est donné avec  $n$  fonctions coordonnées  $t_1, \dots, t_n$ . La propriété est alors : pour tout  $S$ -schéma  $X$  et tout  $n$ -uplet de fonctions  $f_1, \dots, f_n \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ , il existe un unique morphisme de  $S$ -schémas  $u : X \rightarrow \mathbb{A}_S^n$  tel que  $f_i = u^\sharp(t_i)$  pour tout  $i$  (c'est une autre manière de dire la propriété de l'exercice 2.6.8). Armé de cette propriété universelle, on obtient (presque) gratuitement que la préimage d'un ouvert quelconque  $V \subset S$  dans  $\mathbb{A}_S^n$  s'identifie canoniquement à  $\mathbb{A}_V^n$ .

A contrario, en l'absence d'une propriété garantissant l'unicité en un sens très fort, le recollement peut être délicat. En conséquence, on peut douter du fait que la construction de l'espace projectif sur un schéma soit aussi facile qu'annoncé dans [EH], I.2.4 (« This is straightforward ») sachant que la propriété universelle de l'espace projectif est donnée seulement dans [EH], III.2.5.

**2.6.12 Fibres, intersections, diagonales, égalisateurs.** L'existence de produits fibrés de schémas a pour conséquence que certains objets habituels en géométrie ont un sens naturel comme schémas. Nous donnons quatre exemples.

(1) Soit  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme de schémas. Soit  $y \in Y$  un point vu comme un morphisme de schémas  $\text{Spec}(\kappa(y)) \rightarrow Y$ , cf 2.3.7. La *fibres de  $f$  en  $y$* , notée  $f^{-1}(y)$  ou  $X_y$ , est par définition le schéma  $X \times_Y \text{Spec}(\kappa(y))$ .

(2) Soient  $Y, Z$  deux sous-schémas d'un schéma  $X$ . L'*intersection de  $Y$  et  $Z$  dans  $X$* , notée  $Y \cap Z$ , est par définition le schéma  $Y \times_X Z$ .

(3) Soit  $f : X \rightarrow S$  un morphisme de schémas. La *diagonale relative de  $X/S$*  ou *diagonale du  $S$ -schéma  $X$*  est par définition le morphisme  $\Delta_{X/S} : X \rightarrow X \times_S X$  dont les deux composantes sont  $\text{id} : X \rightarrow X$ .

(4) Soient  $f, g : X \rightarrow Y$  deux morphismes de schémas de mêmes source et but. Soit  $(f, g) : X \rightarrow Y \times Y$  le morphisme de composantes  $f$  et  $g$ . Soit  $\Delta : Y \rightarrow Y \times Y$  la diagonale de  $Y$ . L'*égalisateur de  $f$  et  $g$*  est par définition le schéma  $X \times_{(f,g), Y \times Y, \Delta} Y$ .

**2.6.13 Exercice.** (1) On considère le morphisme d'élevation à la puissance  $n$ -ième dans la droite affine complexe, plus précisément le morphisme  $f : \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^1 \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^1$  donné par le morphisme de  $\mathbb{C}$ -algèbres  $\mathbb{C}[t] \rightarrow \mathbb{C}[t]$  qui envoie  $t$  sur  $t^n$ . Calculez la fibre au sens des schémas au-dessus d'un point fermé.

(2) Dans le plan affine complexe  $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$ , calculez l'intersection au sens des schémas de la parabole d'équation  $y = x^2$  et d'une droite horizontale d'équation  $y = a$ ,  $a \in \mathbb{C}$ .

(3) Calculez la diagonale relative du  $\mathbb{C}$ -schéma  $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^1$ . Calculez la diagonale relative de l'immersion donnée par un ouvert affine principal  $D(f) \hookrightarrow \text{Spec}(A)$ . Calculez la diagonale relative d'un monomorphisme de schémas.

### 3 Exemples de schémas

Dans la section 3.1 nous montrons comment les variétés et ensembles algébriques classiques s'identifient aux schémas de type fini, réduits, sur un corps, algébriquement clos. Ensuite, suivant le plan du chapitre II de [Ei], nous montrons la diversité des schémas plus généraux en donnant des exemples obtenus en enlevant l'un après l'autre les qualificatifs séparés par des virgules dans la phrase précédente. Précisément, nous donnons des exemples de schémas sur un corps non algébriquement clos, puis de schémas qui ne sont pas de type fini sur une base (nous prendrons l'exemple des schémas *locaux*), puis de schémas non réduits, et enfin de schémas arithmétiques i.e. sur une base qui n'est pas un corps, comme un anneau d'entiers dans un corps de nombres.

#### 3.1 Variétés classiques

**3.1.1 Variétés abstraites et variétés quasi-projectives.** Dans 1.1.1, pour simplifier nous n'avons parlé que d'ensembles algébriques affines, fermés dans l'espace affine  $\mathbb{A}^n(k)$  sur un corps algébriquement clos. Les géomètres classiques étudiaient également les ensembles algébriques (quasi-)projectifs i.e. (localement) fermés dans l'espace projectif  $\mathbb{P}^n(k)$ . La notion de quasi-projectivité existe aussi pour les schémas : il s'agit des schémas qui sont sous-schémas d'un espace projectif. Le livre de A. WEIL, *Foundations of Algebraic Geometry* publié en 1946 a introduit les ensembles algébriques abstraits, que l'on peut définir comme des espaces topologiques  $X$  possédant un recouvrement ouvert par des ensembles algébriques affines  $X_i$ . Un morphisme  $f : X \rightarrow Y$  entre deux tels ensembles est une application continue telle qu'il existe des recouvrements ouverts  $X = \cup X_i$ ,  $Y = \cup Y_j$  par des ensembles algébriques affines  $X_i \subset \mathbb{A}^{n_i}(k)$  et  $Y_j \subset \mathbb{A}^{m_j}(k)$ , et des applications à composantes polynomiales  $f_{i,j} : \mathbb{A}^{n_i}(k) \rightarrow \mathbb{A}^{m_j}(k)$  satisfaisant  $f_{i,j}(X_i) \subset Y_j$  et  $f|_{X_i} = f_{i,j}$ .

La théorie des schémas englobe ces variétés classiques. Ce fait est résumé dans l'énoncé suivant. Pour en faciliter la lecture, rappelons que les variétés sont les ensembles algébriques irréductibles et que les schémas de type fini sur  $k$  ont été définis dans 2.4.3.

**3.1.2 Théorème.** *Soit  $k$  un corps algébriquement clos. Il existe un foncteur pleinement fidèle de la catégorie des ensembles algébriques (abstraites) sur  $k$  dans la catégorie des  $k$ -schémas, qui induit les équivalences de catégories suivantes :*

$$\begin{array}{ccc}
 \{\text{ensembles algébriques abstraits}\} & \xrightarrow{\sim} & \{k\text{-schémas de type fini réduits}\} \\
 \cup & & \cup \\
 \{\text{ensembles algébriques quasi-projectifs}\} & \xrightarrow{\sim} & \{k\text{-schémas quasi-projectifs réduits}\} \\
 \cup & & \cup \\
 \{\text{variétés algébriques quasi-projectives}\} & \xrightarrow{\sim} & \{k\text{-schémas quasi-projectifs intègres}\}
 \end{array}$$

**Démonstration :** Le Nullstellensatz de Hilbert affirme que tout ensemble algébrique affine  $X$  détermine une  $k$ -algèbre de type fini réduite  $A = \Gamma(X)$  telle que  $X = \text{Spm}(A)$ . En particulier  $X = \text{Spm}(A)$  détermine le schéma  $X' = \text{Spec}(A)$ . De plus, une inclusion ouverte d'ensembles algébriques affines  $i : X_1 \rightarrow X_2$  induit un morphisme de  $k$ -algèbres  $A_2 \simeq A_1$  et une immersion ouverte de schémas  $i' : X'_1 \simeq X'_2$ , telle que  $i$  est un isomorphisme si et seulement si  $i'$  est un isomorphisme. Si  $X$  est un ensemble algébrique abstrait quelconque, choisissons un recouvrement ouvert par des ensembles

algébriques affines  $X_i$ , notons  $X_{i,j} = X_i \cap X_j$  et soit  $\varphi_{i,j} : X_{i,j} \rightarrow X_{j,i}$  l'identité de  $X_i \cap X_j$ . Par ce qui précède, ces données donnent naissance à une famille de schémas  $X'_i$  et de sous-schémas ouverts  $X'_{i,j} \subset X'_i$  avec des isomorphismes  $\varphi'_{i,j} : X'_{i,j} \rightarrow X'_{j,i}$  qui satisfont clairement les conditions de recollement. On note  $X'$  le schéma obtenu par recollement. Il n'est pas difficile de construire de même le morphisme de schémas  $f' : X_1 \rightarrow X_2$  associé à un morphisme d'ensembles algébriques  $f : X'_1 \rightarrow X'_2$ . On a ainsi défini le foncteur annoncé. Le fait que ce foncteur soit pleinement fidèle provient du fait que la bijection  $\text{Hom}(X_1, X_2) \simeq \text{Hom}(A_2, A_1) \simeq \text{Hom}(X'_1, X'_2)$  donnée par le Nullstellensatz pour  $X_1, X_2$  affines, s'étend par recollement au cas d'ensembles algébriques quelconques. Le fait que l'image essentielle de ce foncteur soit égale à la sous-catégorie pleine des  $k$ -schémas de type fini réduits peut se prouver en construisant un foncteur inverse  $X' \mapsto X$  par le même procédé que pour le foncteur direct, i.e. en définissant  $X' \mapsto A = \Gamma(X', \mathcal{O}_{X'}) \mapsto X = \text{Spm}(A)$  dans le cas affine et en recollant. Le fait qu'ensembles algébriques quasi-projectifs et  $k$ -schémas quasi-projectifs réduits se correspondent provient essentiellement du fait que  $(\mathbb{P}^n(k))' = \mathbb{P}^n_k$ , i.e. le schéma associé à la variété algébrique classique  $\mathbb{P}^n(k)$  est le schéma  $\mathbb{P}^n_k$ . Le fait que les variétés correspondent aux schémas intègres provient du fait qu'un schéma réduit est irréductible si et seulement s'il est intègre.  $\square$

On notera que, comme on l'a déjà dit, l'inclusion  $\text{Spm}(A) \hookrightarrow \text{Spec}(A)$  identifie  $\text{Spm}(A)$  à l'ensemble des points fermés, ou fermés irréductibles minimaux, de  $\text{Spec}(A)$ . Plus généralement, un ensemble algébrique abstrait  $X$  peut se voir comme l'ensemble des points fermés du support  $|X'|$  de son schéma associé; et le support  $|X'|$  d'un  $k$ -schéma de type fini réduit peut se voir comme l'ensemble des sous-variétés de la variété classique correspondante  $X$ .

**3.1.3 Exercice.** Soit  $k$  un corps algébriquement clos. On considère la variété algébrique classique  $\mathbb{A}^1(k) \setminus \{0\} = k^*$ , complémentaire du point origine 0 dans la droite affine sur  $k$ . Munie de la multiplication dans  $k^*$ , c'est un groupe algébrique qu'on l'appelle le *groupe multiplicatif* de  $k$  et qu'on note  $\mathbb{G}_m(k)$ .

- (1) La variété  $k^*$  est-elle réduite? quasi-projective? intègre?
- (2) Décrivez le  $k$ -schéma de type fini  $\mathbb{G}_{m,k}$  associé par l'équivalence de 3.1.2 à  $\mathbb{G}_m(k)$ .
- (3) Décrivez en termes schématiques les morphismes qui donnent la structure de « schéma en groupes » i.e. la multiplication  $\mathbb{G}_{m,k} \times_{\text{Spec}(k)} \mathbb{G}_{m,k} \rightarrow \mathbb{G}_{m,k}$  et le morphisme qui donne la section neutre  $\text{Spec}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}$ .
- (3) Pour tout  $n$  entier, calculez le morphisme d'élévation à la puissance  $n$ -ième, au sens de la multiplication itérée dans ce schéma en groupes.
- (4) Le noyau du morphisme de puissance  $n$ -ième, défini comme un égalisateur convenable (cf 2.6.12), est noté  $\mu_{n,k}$  et appelé *schéma en groupes des racines  $n$ -ièmes de l'unité*. Donnez sa définition précisément et décrivez-le : quel est son espace topologique sous-jacent? Est-il affine, irréductible, réduit?

## 3.2 Schémas sur un corps non algébriquement clos

Nous allons donner des exemples de schémas sur un corps  $k$  qui illustrent trois caractéristiques de la situation où  $k$  possède une arithmétique intéressante, c'est-à-dire n'est pas algébriquement clos :

- la présence ou non de points rationnels,

- la possibilité que le schéma soit défini sur un certain sous-corps,
- le fait que certaines propriétés soient perdues par changement de base à une clôture algébrique, et la nécessité de considérer les propriétés *géométriques*.

On fixe donc un corps  $k$ . Tout  $k$ -schéma  $X$  est muni d'un morphisme  $X \rightarrow \text{Spec}(k)$  appelé « morphisme de structure ». Les anneaux  $\mathcal{O}_X(U)$  de fonctions régulières sur des ouverts, les anneaux locaux et les corps résiduels de points  $x \in X$  sont des  $k$ -algèbres.

Un point rationnel du sous-schéma fermé de  $\mathbb{A}^n$  défini par des polynômes en  $n$  variables  $f_1, \dots, f_r$  doit correspondre à une solution  $a = (a_1, \dots, a_n)$  dans  $k^r$  du système  $f_1(x_1, \dots, x_n) = \dots = f_r(x_1, \dots, x_n) = 0$ . Si on pose  $A = k[x_1, \dots, x_n]/(f_1, \dots, f_r)$ , une telle solution détermine un unique morphisme de  $k$ -algèbres  $A \rightarrow k$  c'est-à-dire un unique morphisme  $\text{Spec}(k) \rightarrow X = \text{Spec}(A)$ . Si on veut considérer aussi les solutions  $a \in l^r$  pour des extensions  $l/k$ , on est amené à la définition suivante.

**3.2.1 Définition.** Soit  $l/k$  une extension de corps. Un *point  $l$ -rationnel*, ou  *$l$ -point*, ou *point à valeurs dans  $l$* , est un morphisme de  $k$ -schémas  $\text{Spec}(l) \rightarrow X$ . On dit parfois *point rationnel* au lieu de *point  $k$ -rationnel*. On note  $X(l) = \text{Hom}_k(\text{Spec}(l), X)$  l'ensemble des points  $l$ -rationnels de  $X$ .

**3.2.2 Remarques.** (1) Sur un corps algébriquement clos, cette notation est cohérente avec les notations  $\mathbb{A}^n(k)$  et  $\mathbb{P}^n(k)$  que nous avons utilisées pour désigner l'espace affine et l'espace projectif en tant que variétés algébriques classiques, qui sont les ensembles de points  $k$ -rationnels des schémas  $\mathbb{A}_k^n$  et  $\mathbb{P}_k^n$ . (Et la notation évidemment redondante  $\mathbb{A}_k^n(k)$  est simplifiée en  $\mathbb{A}^n(k)$ .)

(2) Pour toute extension de corps  $l/k$ , notons  $X_l = X \otimes_k l = X \times_{\text{Spec}(k)} \text{Spec}(l)$  qui est naturellement un  $l$ -schéma. On a alors une bijection naturelle entre  $X(l)$  et  $X_l(l)$ , i.e. entre points  $l$ -rationnels du  $k$ -schéma  $X$  et points rationnels du  $l$ -schéma  $X_l$ .

(3) Si  $l/k$  est une extension galoisienne, le groupe de Galois  $G = \text{Gal}(l/k)$  agit à droite sur  $X(l)$  de la manière suivante : à tout  $k$ -automorphisme  $\sigma : l \rightarrow l$  est associé un morphisme  $\text{Spec}(l) \rightarrow \text{Spec}(l)$  et on agit sur  $\text{Hom}_k(\text{Spec}(l), X)$  par précomposition.

**3.2.3 Proposition.** Soit  $k$  un corps et  $X$  un  $k$ -schéma localement de type fini. Soit  $\bar{k}$  une clôture algébrique, et notons  $G_l := \text{Gal}(l/k)$  le groupe des  $k$ -automorphismes d'une extension  $k \subset l \subset \bar{k}$ . Alors, l'ensemble  $|X|_0$  des points fermés de  $X$  est dense et on a :

$$|X|_0 = \bigcup_{\substack{l/k \text{ finie} \\ \text{galoisienne}}} X(l)/G_l = X(\bar{k})/G_{\bar{k}}.$$

Autrement dit, les points fermés de  $X$  sont en bijection avec les orbites de  $X(\bar{k})$  sous l'action du groupe de Galois.

Le symbole  $\cup$  qui apparaît désigne soit une réunion dans  $X(\bar{k})/G_{\bar{k}}$  soit une limite inductive.

**Démonstration :** L'énoncé est local sur  $X$  donc on peut remplacer  $X$  par un ouvert affine et donc supposer  $X = \text{Spec}(A)$  affine. Dire que l'ensemble des points fermés de  $X$  est dense revient à dire qu'un idéal  $I \subset A$  qui est inclus dans tous les idéaux maximaux est nilpotent. Ceci découle du fait que les algèbres de type fini sur un corps sont des *anneaux de Jacobson*, i.e. tout premier est intersection d'idéaux maximaux (plus généralement, la propriété de Jacobson est stable par passage

à une algèbre de type fini). Ce résultat est une forme forte du Nullstellensatz et on le trouve dans [Mat], th. 5.5 ou [Ei], th. 4.19.

Maintenant soit  $x \in X$  un point fermé, i.e.  $x = [m]$  avec  $m$  maximal. Alors le corps résiduel  $l := \kappa(x) = A/m$  est une extension finie de  $k$  d'après [Mat], th. 5.4. Ceci détermine un  $l$ -point de  $X$  puis une orbite sous  $G_l$ . Réciproquement, considérons une orbite de  $X(l)$  sous  $G_l$ . Elle est représentée par un morphisme de  $k$ -algèbres  $\varphi : A \rightarrow l$ . Le noyau  $m = \ker(\varphi)$  est un idéal maximal de  $A$ , qui ne dépend pas du choix d'un élément dans l'orbite de  $\varphi$  puisque  $\ker(\sigma\varphi) = \ker(\varphi)$ . Il détermine un point fermé de  $X$ .

Enfin, le fait que tout  $\bar{k}$ -point de  $X$  se factorise par un  $l$ -point pour une extension finie  $l/k$  provient du fait que si  $\varphi : A \rightarrow \bar{k}$  est un morphisme de  $k$ -algèbres, alors l'image est une  $k$ -algèbre intègre, algébrique et de type fini, donc un corps extension finie de  $k$ . On en déduit que l'ensemble  $|X|_0$  se décrit aussi comme  $X(\bar{k})/G_{\bar{k}}$ .  $\square$

**3.2.4 Exemple.** Le groupe de Galois de  $\mathbb{C}/\mathbb{R}$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  et engendré par la conjugaison complexe. Dans le  $\mathbb{R}$ -schéma  $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^1 = \text{Spec}(\mathbb{R}[t])$ , le point déterminé par l'idéal maximal  $(t^2 + 1)$  correspond à l'orbite du  $\mathbb{C}$ -point  $\mathbb{R}[t] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $t \mapsto i$ . L'autre point de l'orbite est le  $\mathbb{C}$ -point  $\mathbb{R}[t] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $t \mapsto -i$ .

**3.2.5 Remarque.** On trouvera une étude plus fine du lien entre le  $k$ -schéma  $X$  et le  $\bar{k}$ -schéma  $X \otimes_k \bar{k}$  dans Mumford [Mu], II, § 4.

**3.2.6 Exercice.** (1) Soit  $k$  un corps algébriquement clos. Montrez que dans la catégorie des ensembles algébriques classiques, les produits existent, et que ensemblistement l'ensemble algébrique produit  $X \times Y$  est le produit des ensembles algébriques  $X$  et  $Y$ . (On pourra commencer par le cas affine.)

(2) Montrez que l'équivalence de catégories du théorème 3.1.2 est compatible au produit.

(3) Montrez que si  $k$  n'est pas algébriquement clos, il est faux en général que l'ensemble des points fermés d'un schéma produit  $X \times_{\text{Spec}(k)} Y$  est égal au produit des ensembles de points fermés de  $X$  et  $Y$ . (On pourra regarder le cas où  $X = Y = \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^1$  dans [EH], II.2.)

**3.2.7 Définition.** Soit  $k$  un corps et  $X$  un  $k$ -schéma. On dit que  $X$  est *géométriquement réduit* (resp. *irréductible, intègre, connexe*) si  $X \otimes_k \bar{k}$  est réduit (resp. irréductible, intègre, connexe).

Il est équivalent de demander que  $X \otimes_k l$  soit réduit (irréductible, intègre, connexe) pour toute extension finie  $l/k$ . On montre facilement que si  $X$  est géométriquement *truc*, alors il est *truc*. Par exemple, dans le cas géométriquement réduit, on se ramène au cas affine et le résultat découle du fait qu'on a une injection d'anneaux  $A \hookrightarrow A \otimes_k \bar{k}$  donc  $A$  est réduit si  $A \otimes_k \bar{k}$  l'est.

Nous sommes plutôt intéressés par des exemples qui montrent que les assertions réciproques ne sont pas vraies en général.

**3.2.8 Exemples.** (1) Soit  $k$  un corps non parfait et  $a \in k$  un élément qui n'est pas une puissance  $p$ -ième. Soit  $l = k[t]/(t^p - a)$  qui est un corps, extension purement inséparable de degré  $p$  de  $k$ . Posons  $X = \text{Spec}(l)$ . Alors  $X$  est réduit (et même intègre). Soit  $\alpha \in l$  une racine  $p$ -ième de  $a$ , par exemple la classe de  $t$ . On a :

$$l \otimes_k l = l[t]/(t^p - a) = l[t]/((t - \alpha)^p).$$

Cet anneau n'est pas réduit, donc  $X \otimes_k l = \text{Spec}(l \otimes_k l)$  non plus. De manière générale, ce sont les extensions inséparables de corps qui sont responsables de la perte du caractère réduit par extension de corps.

(2) Soit  $k = \mathbb{Q}$  et  $X$  le sous-schéma fermé de  $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^2$  d'équation  $x^2 - 2y^2 = 0$ . Alors  $X$  est intègre, mais comme  $x^2 - 2y^2 = (x + \sqrt{2}y)(x - \sqrt{2}y)$ , le schéma  $X \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(\sqrt{2})$  n'est pas irréductible. De manière générale, ce sont les extensions séparables de corps qui sont responsables de la perte du caractère irréductible par extension de corps.

(3) Soit  $l/k$  une extension finie galoisienne non triviale de groupe de Galois  $G$ . On a un morphisme d'anneaux  $u : l \otimes_k l \rightarrow \prod_{\sigma \in G} l$  défini sur les tenseurs irréductibles par  $a \otimes b \mapsto (a\sigma(b))_{\sigma \in G}$ . On peut voir que  $u$  est un isomorphisme d'au moins deux manières :

- on observe que  $u$  peut être vu comme une application linéaire entre deux  $l$ -espaces vectoriels de dimension  $n = [l : k]$ , puisque  $u(a \otimes b) = au(1 \otimes b)$ . Comme  $l/k$  est séparable, elle est monogène et on peut en choisir un générateur  $\alpha$ . Alors  $\{1 \otimes 1, 1 \otimes \alpha, \dots, 1 \otimes \alpha^{n-1}\}$  est une  $l$ -base de  $l \otimes_k l$ . Notons  $G = \{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$ . Le déterminant de  $u$  dans les bases convenables est le déterminant de Vandermonde  $\det(\sigma_i(\alpha)^j) = \prod_{i < j} (\sigma_j(\alpha) - \sigma_i(\alpha))$ . Il est non nul.
- si on choisit un polynôme  $P \in k[t]$  dont  $l$  est le corps de décomposition, alors  $l$  est engendré par une racine  $\beta$  de  $P$  et ses conjugués  $\sigma_i(\beta)$ . Le morphisme  $u$  s'identifie au morphisme :

$$l \otimes_k l \simeq l[t]/(P(t)) \simeq \prod_{\sigma \in G} l[t]/(t - \sigma(\beta)) \simeq \prod_{\sigma \in G} l.$$

Considérons le  $k$ -schéma  $X = \text{Spec}(l)$ . Il résulte de ce qui précède que  $X \otimes_k l = \text{Spec}(l \otimes_k l) = \coprod_{\sigma \in G} \text{Spec}(l)$ . Ainsi  $X$  est connexe, mais pas géométriquement connexe. Ici aussi, les extensions séparables de corps causent la perte du caractère connexe par extension de corps.

**3.2.9 Définition.** Soit  $X$  un schéma sur un corps  $k$ . On dit que  $X$  peut être défini sur un sous-corps  $k_0 \subset k$  s'il existe un  $k_0$ -schéma  $X_0$  et un isomorphisme de  $k$ -schémas  $X \simeq X_0 \otimes_{k_0} k$ .

Le  $k_0$ -schéma  $X_0$ , s'il existe, n'est pas unique en général. Voici un exemple.

**3.2.10 Exemple.** La droite projective complexe  $X = \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$  peut être définie sur  $\mathbb{R}$  d'au moins deux manières. Notons  $X_0 \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$  la conique projective plane réelle d'équation  $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ . On a  $X_0 \not\simeq \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$  car la conique  $X_0$  ne possède pas de point  $\mathbb{R}$ -rationnel. Il est clair que  $X \simeq \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$  et nous allons voir que l'on a aussi  $X \simeq X_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ . Ce fait classique provient de la paramétrisation des coniques ayant un point rationnel. Plus précisément, si  $P$  est un point rationnel d'une conique projective plane  $C$ , les droites  $D_t$  passant par  $P$  sont paramétrées par les points  $t = (u : v)$  d'une droite projective. Elles intersectent la conique en un unique point  $Q$  distinct de  $P$ , sauf la tangente en  $P$  pour laquelle on prend  $Q = P$ . Ceci fournit l'isomorphisme désiré. Explicitement, en prenant le point  $\mathbb{C}$ -rationnel  $P = (i : 1 : 0)$  dans la conique  $X_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ , on obtient l'isomorphisme :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 &\longrightarrow X_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \\ (u : v) &\longmapsto (i(u^2 + v^2) : u^2 - v^2 : 2uv) \\ (y - ix : z) &\longleftarrow (x : y : z) \end{aligned}$$

La présence inévitable du  $i$  montre qu'un isomorphisme  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1 \rightarrow X_0$  peut être défini après changement de base à  $\mathbb{C}$ , alors qu'il n'en existe pas sur  $\mathbb{R}$ .

### 3.3 Schémas locaux

De nombreux schémas ne sont pas de type fini sur une base (par exemple un corps), témoignant de comportements très variés. Nous allons donner l'exemple des schémas locaux et montrer comment ils permettent d'obtenir de l'information fine concernant diverses notions de voisinages d'un point.

**3.3.1 Définition.** On appelle *schéma local* un schéma affine, spectre d'un anneau local.

Si  $X$  est local, spectre d'un anneau local  $A$ , il possède un unique point fermé  $x$  dont tous les autres points sont des générisations. L'anneau local de  $x$  dans  $X$  s'identifie naturellement à  $A$ .

Si  $X$  est un schéma arbitraire, on peut associer un schéma local  $X_x$  à tout point  $x$ .

**3.3.2 Définition.** On appelle *schéma local de  $X$  en  $x$*  le schéma  $X_x = \text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$ .

On peut « calculer » l'anneau local de la manière suivante. Dans la limite qui définit

$$\mathcal{O}_{X,x} = \varinjlim_{U; U \ni x} \mathcal{O}_X(U),$$

on peut se restreindre aux voisinages ouverts inclus dans un voisinage ouvert *affine* fixé  $U_0 = \text{Spec}(A)$ , car ceux-ci forment un système cofinal de tous les voisinages ouverts de  $x$ . On peut ensuite se restreindre aux ouverts affines distingués dans  $U_0$ , i.e.  $U = D(f)$ , pour la même raison. En notant  $x = [p]$  pour un premier  $p \subset A$ , on obtient :

$$\mathcal{O}_{X,x} = \varinjlim_{f; f \notin p} A_f = A_p.$$

**3.3.3 Proposition.** (1) *Il existe un unique morphisme de schémas  $j_x : X_x \rightarrow X$  qui envoie le point fermé  $t \in X_x$  sur  $x$  et tel que  $j_x^\# : \mathcal{O}_{X,x} \rightarrow \mathcal{O}_{X_x,t}$  est l'identité (via l'identification naturelle  $\mathcal{O}_{X_x,t} = \mathcal{O}_{X,x}$ ).*

(2) *Le morphisme  $j_x$  induit un homéomorphisme entre  $|X_x|$  et l'ensemble des générisations de  $x$  dans  $X$ . En particulier  $|X_x|$  s'identifie à l'ensemble des fermés irréductibles de  $X$  contenant  $x$ .*

(3) *Le morphisme  $j_x$  est un monomorphisme de schémas.*

**Démonstration :** Fixons un voisinage ouvert affine  $U = \text{Spec}(A)$  de  $x = [p]$ .

(1) L'application canonique  $A \rightarrow A_p = \mathcal{O}_{X,x}$  définit en passant au spectre un morphisme  $X_x \rightarrow U$ . Soit  $j_x : X_x \rightarrow U \rightarrow X$  la composée. Soit  $f : X_x \rightarrow X$  un morphisme qui envoie  $t$  sur  $x$ . Comme  $f$  préserve les générisations (voir exercice 2.3.6), pour tout  $y \in X_x$  l'image  $f(y)$  est une générisation de  $x$ , donc appartient à  $U$ . Ainsi  $f$  est induit par un morphisme de schémas affines  $X_x \rightarrow U$ , lui-même déterminé par le morphisme d'anneaux correspondants. Il s'ensuit que si  $f_x^\#$  est prescrit égal à l'identité, nécessairement  $f = j_x$ . Ceci démontre que  $j_x$  est unique et en particulier ne dépend pas du choix de  $U$ .

(2) Comme  $|X_x| \subset U$ , on peut remplacer  $X$  par  $U$ . On sait que dans  $\text{Spec}(A)$ , les générisations de  $x = [p]$  sont les  $y = [q]$  tels que  $q \subset p$ , voir lemme 2.3.3(4), et ces points  $[q]$  correspondent naturellement aux premiers de  $A_p$ . Ceci montre que  $j_x$  induit une bijection entre  $|X_x|$  et l'ensemble des générisations de  $x$ . La propriété d'homéomorphisme est laissée en exercice. La dernière assertion est une traduction de la dualité entre point et fermés irréductibles de 2.3.4.

(3) Soient  $u, v : Y \rightarrow X_x$  deux morphismes tels que  $j_x u = j_x v$ . Comme  $j_x$  se factorise par  $U$  on obtient une égalité entre deux morphismes de  $Y$  vers  $U$ . Utilisant la description des morphismes à valeurs dans un schéma affine donnée en 1.8.7, ceci se traduit en une égalité de deux morphismes  $A \rightarrow A_p \rightarrow \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y)$ . Or dans la catégorie des anneaux le morphisme de localisation  $A \rightarrow A_p$  est un épimorphisme. On en déduit que  $u^\# = v^\#$  puis que  $u = v$ . Donc  $j_x$  est un monomorphisme.  $\square$

Le point (2) de la proposition montre que  $\text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$  contient beaucoup plus de points que son seul point fermé. En ceci, les schémas locaux sont très différents des schémas de type fini sur un corps (algébriquement clos ou non) dont les points fermés forment un ensemble dense.

**3.3.4 Exercice.** Montrez que pour tout schéma local  $Y$  de point fermé  $y$ , et tout morphisme  $f : Y \rightarrow X$  tel que  $f(y) = x$ , il existe un unique morphisme  $g : Y \rightarrow X_x$  tel que  $f = j_x \circ g$ . Exprimez ceci comme une propriété d'adjonction pour l'inclusion de la catégorie des schémas locaux dans une catégorie de schémas pointés.

**3.3.5 Exercice.** (1) Montrez que tout schéma dont l'ensemble sous-jacent possède au plus deux points est affine.

(2) Le nombre « deux » dans la question précédente est optimal : montrez que le « germe du point dédoublé » dans la droite affine avec origine dédoublée ([EH], I-44) décrit dans [EH], I-25 peut être obtenu en recollant les schémas locaux des droites  $Y$  et  $Z$  en leurs points génériques.

**3.3.6 Exercice.** Dessinez des éléments typiques du schéma local  $X_x$  de l'espace affine réel  $X = \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$  en l'origine  $x = O$ .

## Introduction à la Géométrie Algébrique. Le langage des schémas

Cours du 20 octobre 2015

**3.3.7 Regarder encore plus près.** Les ouverts de la topologie de Zariski étant si gros, le schéma local  $X_x$  est très utile pour se rapprocher de  $x$ . Il existe des moyens de regarder encore plus près. Par exemple, l'anneau local *complété* rassemble, par une limite projective convenable, toute l'information différentielle contenue dans les sous-schémas fermés infinitésimaux passant par  $x$ . Il est défini ainsi :

$$\widehat{\mathcal{O}}_{X,x} = \varprojlim_n \mathcal{O}_{X,x}/m_x^n.$$

Notons  $X_{x,n} = \text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}/m_x^{n+1})$  le  $n$ -ième voisinage infinitésimal de  $x$  dans  $X$  et  $\widehat{X}_x = \text{Spec}(\widehat{\mathcal{O}}_{X,x})$  le schéma local complété. Ainsi  $\{x\} = \text{Spec}(\kappa(x))$  est le 0-ième voisinage infinitésimal et  $\text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}/m_x^2)$  est le premier. On peut montrer que  $\widehat{X}_x$  est la limite inductive (c'est-à-dire la « réunion ») des  $X_{x,n}$  dans la catégorie des schémas, et on a la figure suivante :

$$\{x\} \hookrightarrow X_{x,1} \hookrightarrow X_{x,2} \hookrightarrow \dots \hookrightarrow X_{x,n} \hookrightarrow \dots \hookrightarrow \varinjlim X_{x,n} = \widehat{X}_x \longrightarrow X_x \hookrightarrow U \hookrightarrow X.$$

Toutes les flèches jusqu'à  $\widehat{X}_x$  sont des immersions fermées, la flèche  $X_x \rightarrow U$  est une localisation mais pas une immersion, et  $U \rightarrow X$  est une immersion ouverte. La flèche  $u : \widehat{X}_x \rightarrow X_x$  est plus compliquée. Si  $X$  est localement noethérien en  $x$ , l'anneau  $A = \mathcal{O}_{X,x}$  est local noethérien et  $u$  possède de très bonnes propriétés. La théorie des anneaux locaux noethériens nous apprend que  $A \rightarrow \widehat{A}$  est un monomorphisme et un épimorphisme dans la catégorie des anneaux locaux noethériens avec morphismes d'anneaux locaux. (Ces résultats découlent essentiellement du lemme d'Artin-Rees ; voir [Mat], section 8 et notamment le résumé des résultats sur les anneaux locaux noethériens en fin de section). On en déduit que  $u : \widehat{X}_x \rightarrow X_x$  est un épimorphisme dans la catégorie de tous les schémas, et un monomorphisme dans la catégorie des schémas localement noethériens pointés. Si  $X$  n'est pas noethérien en  $x$ , la complétion se comporte beaucoup moins bien. L'exercice suivant donne un exemple.

**3.3.8 Exercice.** Soit  $A$  l'anneau des fonctions continues de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , localisé en l'idéal  $m$  des fonctions nulles en 0. Montrez que  $m = m^2$  et que  $\widehat{A} \simeq \mathbb{R}$ .

Illustrons sur un exemple le type d'information que la complétion apporte. Soit  $C \subset \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$  la courbe complexe singulière plane d'équation  $f := y^2 - x^2(x+1) = 0$ . Au point singulier  $P = (0,0)$ , la courbe ressemble localement à la courbe  $y^2 = x^2$  qui possède deux branches d'équations  $y - x = 0$  et  $y + x = 0$ . On aimerait voir ces deux « branches ». Le schéma local  $C_P$  ne les voit pas : il est intègre car l'anneau  $\mathbb{C}[x,y]/(f)$  l'est. En revanche, dans l'anneau complété  $\mathbb{C}[[x,y]]/(f)$  existe une fonction  $u = \sqrt{1+x}$  définie à l'aide du développement en série formelle familier. On obtient  $\widehat{\mathcal{O}}_{C,P} \simeq \mathbb{C}[[x,y]]/((y-ux)(y+ux))$  qui possède deux premiers minimaux  $(y-ux)$  et  $(y+ux)$ . Le schéma local complété possède deux composantes irréductibles, qui sont les branches de la singularité.

### 3.4 Schémas non réduits

Nous donnons deux exemples très simples de schémas non réduits qui montrent les deux manifestations principales des phénomènes de non réduction :

- la non réduction « générique »,
- l'existence de composantes immergées.

**3.4.1 Nilpotents aux points génériques.** Le premier phénomène correspond à la présence d'éléments nilpotents dans les anneaux de fonctions d'ouverts  $U \subset X$ , et en particulier dans les anneaux locaux de points génériques de composantes de  $X$ . Un exemple simple est donné par la droite affine avec multiplicité 2 sur un corps  $k$  :

$$X_1 = \text{Spec} \left( \frac{k[\epsilon, t]}{(\epsilon^2)} \right).$$

C'est un schéma irréductible, de sous-schéma réduit  $X_{1,\text{red}} = \mathbb{A}_k^1$ . Son point générique  $\eta$  correspond à l'idéal premier  $p = (\epsilon)$ . En notant que l'inversibilité de  $a + \epsilon b$  dans un anneau localisé est équivalente à celle de  $a$ , on obtient :

$$\mathcal{O}_{X_1, \eta} = (k[\epsilon, t]/(\epsilon^2))_p = k(t)[\epsilon]/(\epsilon^2).$$

D'une certaine manière, les éléments nilpotents sont présents génériquement et il y en a « autant » (ni plus ni moins) aux autres points de  $X_1$ . Aucun sous-schéma ouvert de  $X$  n'est réduit.

**3.4.2 Composantes immergées.** Le second phénomène correspond à la présence de fonctions nilpotentes qui apparaissent dans certains fermés de  $X$ . Voici un exemple :

$$X_2 = \text{Spec} \left( \frac{k[\epsilon, t]}{(\epsilon^2, \epsilon t)} \right).$$

Ce schéma a le même support que le précédent :  $X_{2,\text{red}} = X_{1,\text{red}} = \mathbb{A}_k^1$  mais contient l'ouvert topologiquement dense *réduit*  $D(t) = \text{Spec}(k[t, 1/t])$ . Ce n'est qu'au point  $x = [q]$  avec  $q = (\epsilon, x)$  que subsistent des fonctions nilpotentes. Le dessin de  $X_2$  suggère que ce schéma est obtenu en recollant une droite affine  $\text{Spec}(k[t])$  avec un point épais  $\text{Spec}(k[\epsilon]/(\epsilon^2))$  le long d'un point réduit :

$$\text{Spec}(k[t]) \leftarrow \text{Spec}(k) \hookrightarrow \text{Spec}(k[\epsilon]/(\epsilon^2)).$$

En algèbre commutative, la théorie des idéaux premiers associés des anneaux noethériens permet de bien décrire ces phénomènes (la théorie fonctionne en revanche assez mal pour les anneaux non noethériens).

**3.4.3 Définition.** Soit  $A$  un anneau noethérien. On appelle *premier associé* un idéal premier  $p$  de  $A$  qui est l'annulateur d'un élément  $a$  :

$$p = \text{Ann}(x) = \{a \in A, ax = 0\}.$$

On appelle *assassin* de  $A$  et note  $\text{Ass}(A)$  l'ensemble des premiers associés de  $A$ .

Voici le théorème principal sur les premiers associés en algèbre commutative.

**3.4.4 Théorème.** Soit  $A$  un anneau noethérien.

- (1)  $\text{Ass}(A)$  est un ensemble fini qui contient les idéaux premiers minimaux de  $A$ .
- (2) La réunion des premiers associés est égale à la réunion de  $\{0\}$  et de l'ensemble des éléments diviseurs de 0 dans  $A$ .
- (3) La formation de  $\text{Ass}(A)$  commute à la localisation, i.e. pour toute partie multiplicative  $S \subset A$  on a  $\text{Ass}(S^{-1}A) = \{pS^{-1}A; p \in \text{Ass}(A), p \cap S = \emptyset\}$ . En particulier  $p \in \text{Ass}(A)$  ssi  $p \in \text{Ass}(A_p)$ .

**Démonstration :** Il s'agit du théorème 3.1 de [Ei]. □

Les premiers minimaux correspondent aux composantes irréductibles, qui sont une notion topologique. On peut dire que les premiers associés sont la généralisation schématique naturelle de cette notion. Plus précisément, à cause du fait que la formation de  $\text{Ass}(A)$  commute à la localisation, on peut définir ces « composantes irréductibles schématiques » en regardant uniquement l'anneau local de leur point générique, et on arrive à la définition suivante.

**3.4.5 Définition.** Soit  $X$  un schéma localement noethérien. On appelle *point associé* de  $X$  un point  $x \in X$  tel que l'idéal maximal  $m_x \subset \mathcal{O}_{X,x}$  est un premier associé de  $\mathcal{O}_{X,x}$ . On appelle *composante associée* l'adhérence d'un point associé. On appelle *composante immergée* une composante associée qui n'est pas maximale, i.e. une composante associée incluse strictement dans une composante irréductible.

Dans l'exemple du schéma  $X_2$ , il n'est pas difficile de voir que  $\text{Ass}(A)$  contient deux éléments :  $p_1 = (\epsilon) = \text{Ann}(x)$  est l'unique premier minimal, et  $p_2 = (\epsilon, x) = \text{Ann}(\epsilon)$  est un premier associé contenant  $p_1$  donc non minimal. Ceci signifie qu'on a l'inclusion de sous-schémas fermés  $V(p_2) \subset V(p_1)$ . Ainsi  $V(p_2)$  est une composante immergée.

**3.4.6 Densité schématique.** Une fois dégagées ces notions de points et composantes associées, indiquons comment elles permettent d'éclairer une particularité de l'exemple  $X_2$  qui pourrait sembler pathologique. Le fait est le suivant : alors que  $D(t) \subset X_2$  est topologiquement dense, la fonction globale non nulle  $\epsilon \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$  a une restriction sur  $U$  qui est nulle. C'est ennuyeux car en topologie, les parties denses ont la propriété que les fonctions continues globales qui sont nulles sur une telle partie sont nulles partout. Dans le monde des schémas, on peut prendre cette propriété hautement désirable pour *définition* d'une notion de densité qui raffine la notion de densité topologique. Présentons cette notion et indiquons ensuite sous forme d'exercice le lien précis avec les points associés.

**3.4.7 Définition.** On dit qu'une immersion ouverte  $i : U \hookrightarrow X$  est *schématiquement dense dans  $X$*  si le morphisme de restriction des fonctions  $i^\# : \mathcal{O}_X \rightarrow i_*\mathcal{O}_U$  est injectif.

**3.4.8 Exercice.** Soit  $X$  un schéma noethérien.

- (1) Montrez que  $U$  est topologiquement dense si et seulement s'il contient tous les points génériques des composantes irréductibles de  $X$  (utilisez 2.4.4).
- (2) Montrez que  $U$  est schématiquement dense si et seulement s'il contient tous les points associés de  $X$ , de la manière suivante. (i) Ramenez-vous au cas affine  $X = \text{Spec}(A)$ , avec  $A$  noethérien. On note  $\text{Ass}(A) = \{p_1, \dots, p_n\}$ . (ii) Montrez à l'aide du *lemme d'évitement* (*prime avoidance*, [Ei], lemma 3.3) et de 3.4.4(2) que le morphisme  $A \rightarrow A_{p_1} \times \dots \times A_{p_n}$  est injectif. (iii) Concluez.

## 3.5 Schémas arithmétiques

Nous donnons deux exemples de schémas sur  $\text{Spec}(\mathbb{Z})$  qui permettent d'avoir un bref aperçu sur :

- la manière dont la théorie algébrique des nombres se plonge dans le monde des schémas ;
- la notion de « famille d'objets » en géométrie algébrique et le rôle de la platitude.

**3.5.1 Un anneau d'entiers algébriques.** Considérons le corps de nombres  $K = \mathbb{Q}(\sqrt{3})$ , son anneau d'entiers  $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\sqrt{3}]$  et le morphisme  $f : X = \text{Spec}(\mathcal{O}_K) \rightarrow S = \text{Spec}(\mathbb{Z})$ . En théorie algébrique des nombres, on cherche à comprendre comment les premiers  $p \in \mathbb{Z}$  se décomposent dans  $\mathcal{O}_K$ , ce qui revient à étudier l'idéal  $p\mathcal{O}_K$ . Comme  $\mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K = \mathcal{O}_K \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{F}_p$ , on voit que ceci revient à étudier les fibres de  $f$ . L'invariant le plus important est le *discriminant* de  $K$ , défini en général par  $\text{disc}(K) = (\det(\sigma_i(\alpha_j)))^2$ , où  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  est une  $\mathbb{Z}$ -base de  $\mathcal{O}_K$  et  $\sigma_1, \dots, \sigma_n$  désignent les plongements  $K \hookrightarrow \mathbb{C}$  (ou les éléments du groupe de Galois de  $K/\mathbb{Q}$ , dans le cas galoisien). Ici on prend  $\{1, \sqrt{3}\}$  pour  $\mathbb{Z}$ -base et  $\{\text{id}, \sigma : \sqrt{3} \mapsto -\sqrt{3}\}$  pour liste de plongements complexes. On obtient :

$$\text{disc}(K) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{3} & -\sqrt{3} \end{vmatrix}^2 = 12.$$

Comme dans 3.2.8(3), cette quantité mesure le défaut de bijectivité de l'application :

$$(\star) \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}[\sqrt{3}] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[\sqrt{3}] & \longrightarrow & \mathbb{Z}[\sqrt{3}] \times \mathbb{Z}[\sqrt{3}] \\ a \otimes b & \longmapsto & (ab, a\sigma b). \end{array}$$

En l'occurrence, après localisation en 12 c'est-à-dire après tensorisation par  $\mathbb{Z}[1/12]$  celle-ci devient un isomorphisme. C'est ce fait qui est derrière la description géométrique des fibres de  $X \rightarrow \text{Spec}(\mathbb{Z})$ . Avant de donner cette description, signalons que  $\mathbb{Z}[\sqrt{3}] \simeq \mathbb{Z}[X]/(X^2 - 3)$  et que  $\text{disc}(K)$  peut aussi se calculer comme le discriminant du polynôme  $X^2 - 3$ . Il y a trois types de comportements possibles :

- (i) si  $p \mid \text{disc}(K)$  i.e.  $p = 2$  ou  $3$ , alors  $p$  devient carré dans  $\mathcal{O}_K$ . Précisément  $2\mathcal{O}_K = (1 + \sqrt{3})^2$  et  $3\mathcal{O}_K = (\sqrt{3})^2$ . La fibre  $X_p$  est le spectre de  $\mathbb{F}_p[X]/(X^2)$ , c'est un point non réduit de corps résiduel  $\mathbb{F}_p$ .
- (ii) si  $p > 3$  et  $3$  est un carré modulo  $p$ , le polynôme  $X^2 - 3$  se factorise dans  $\mathbb{F}_p$  en produit de facteurs de degré 1. Par réciprocity quadratique, ce cas se produit lorsque  $p$  est congru à 1 ou 11 modulo 12. La fibre  $X_p$  est réunion de deux points réduits,  $\mathbb{F}_p$ -rationnels.
- (iii) si  $p > 3$  et  $3$  n'est pas carré modulo  $p$ , le polynôme  $X^2 - 3$  est irréductible dans  $\mathbb{F}_p$ . Par réciprocity quadratique, ce cas se produit lorsque  $p$  est congru à 5 ou 7 modulo 12. Ici la fibre  $X_p$  est composée d'un seul point  $\mathbb{F}_{p^2}$ -rationnel.

L'apparition d'éléments nilpotents dans la fibre dans le cas (i) est typique du comportement de ramification. La situation est géométriquement très différente de ce qu'il se produit dans les deux derniers cas. Les cas (ii) et (iii) présentent une différence arithmétique qui se manifeste dans les corps résiduels. En revanche leur géométrie est essentiellement la même, au sens où après une extension finie de la base destinée à s'affranchir des contraintes arithmétiques, les fibres sont des réunions de deux points réduits. C'est ce que montre l'application  $(\star)$ .

**3.5.2 Schémas sur  $\mathbb{Z}$  et schémas sur  $\mathbb{F}_p$ .** Voici un petit commentaire destiné à éclairer l'exemple de la famille de coniques qui suivra. Si  $p$  est un nombre premier, tout schéma  $X$  sur  $\mathbb{F}_p$  détermine

un schéma sur  $\mathbb{Z}$  par composition des morphismes de structure :  $X \rightarrow \text{Spec}(\mathbb{F}_p) \rightarrow \text{Spec}(\mathbb{Z})$ . Dans un tel cas le morphisme  $f : X \rightarrow \text{Spec}(\mathbb{Z})$  ne possède qu'une fibre non vide, celle située au-dessus du point  $[p]$ . Notons à ce propos que pour la fibre d'un morphisme  $X \rightarrow S$  au-dessus d'un point  $s$ , il est habituel de parler de *fibre fermée* lorsque  $s$  est un point fermé, *fibre générique* lorsque  $s$  est un point générique, etc.

Les schémas que nous regardons dans 3.5 sont au contraire ceux dont les fibres au-dessus de  $\mathbb{Z}$  varient suffisamment continuellement pour donner lieu à de jolies familles d'objets. En particulier, nous voulons des  $f : X \rightarrow \text{Spec}(\mathbb{Z})$  qui ne se factorisent pas par un sous-schéma fermé de  $\text{Spec}(\mathbb{Z})$ . Une manière de garantir cela est de demander que la fibre générique soit non vide, mais ce n'est pas suffisant parce que la somme disjointe d'un  $\mathbb{Z}$ -schéma à fibre générique non vide avec un  $\mathbb{F}_p$ -schéma est pathologique. Le concept qui donne la meilleure notion de continuité pour les fibres d'un morphisme de schémas a été isolé par Serre et Grothendieck ; il s'agit de la *platitude* (*flatness* en anglais). Nous ne ferons pas ici de développement systématique de cette notion. Nous nous contenterons de dire qu'un morphisme  $X \rightarrow \text{Spec}(\mathbb{Z})$  est plat si et seulement si les anneaux de fonctions des ouverts affines  $U = \text{Spec}(A) \subset X$  sont sans torsion (comme  $\mathbb{Z}$ -modules), ou de manière équivalente, si et seulement si les anneaux locaux  $\mathcal{O}_{X,x}$  sont sans torsion.

**3.5.3 Une famille de coniques.** Soit  $f = Y^2 - X^2 - 5$  et  $X = \text{Spec}(\mathbb{Z}[X, Y]/(f))$ . Comme l'anneau  $A = \mathbb{Z}[X, Y]/(f)$  est sans torsion, il s'agit d'une famille *plate* de coniques sur  $\mathbb{Z}$ . Nous ne développons pas la notion de *lissité* dans ce cours ; contentons-nous pour analyser cet exemple de dire que, comme en géométrie différentielle, le lieu où  $X$  est lisse sur  $\mathbb{Z}$  est l'ensemble des points  $x$  en lesquels la matrice jacobienne  $J = (\partial f/\partial X, \partial f/\partial Y)$  est de rang maximum, c'est-à-dire ici 1, ce qui signifie que dans l'anneau local  $\mathcal{O}_{X,x}$ , ou de manière équivalente dans le corps résiduel  $\kappa(x)$ , l'un des 1-mineurs de  $J$  est inversible. Notons  $x = [q]$  un point quelconque de  $X$  et  $s = f(x) = [p]$  où  $p = q \cap \mathbb{Z}$ . Dans notre exemple, la matrice  $J = (2X, 2Y)$  est de rang 1 en  $x = [q]$  si et seulement si l'idéal  $(2X, 2Y)$  est inclus dans  $q$ . Il est équivalent de dire que  $2 \in q$  ou que  $(X, Y) \subset q$ . Dans le deuxième cas, l'équation  $f$  implique que  $5 \in q$ . On peut résumer ainsi :

- la fibre de  $X$  en  $p = 2$  est singulière, son équation  $f = (Y + X + 1)^2$  est celle d'une droite double (d'épaisseur 2) dans  $\mathbb{A}_{\mathbb{F}_2}^2$ ,
- la fibre de  $X$  en  $p = 5$  est singulière, son équation  $f = (Y - X)(Y + X)$  est celle de la réunion de deux droites avec une intersection transverse en  $x = y = 0$  dans  $\mathbb{A}_{\mathbb{F}_5}^2$ ,
- les autres fibres, y compris la fibre générique, sont des coniques lisses.

## 4 Modules sur les schémas

Le foncteur Spectre permet de plonger la catégorie des anneaux dans celle des schémas. De même, on peut plonger la catégorie des modules sur un anneau dans une catégorie de modules sur les schémas, et cette notion joue un rôle aussi fondamental du côté algébrique (anneaux) que du côté géométrique (schémas).

### 4.1 Modules sur les espaces annelés

Soit  $(X, \mathcal{O}_X)$  un espace annelé. Pour la définition suivante, on notera que si  $\mathcal{F}, \mathcal{G}$  sont deux faisceaux, alors le préfaisceau produit  $\mathcal{F} \times \mathcal{G}$  est un faisceau et définit donc le faisceau produit.

**4.1.1 Définition.** On appelle *faisceau de  $\mathcal{O}_X$ -modules* ou simplement  *$\mathcal{O}_X$ -module* un faisceau de groupes abéliens  $\mathcal{F}$  sur  $X$  muni d'un morphisme de faisceaux  $\mathcal{O}_X \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$  satisfaisant les axiomes d'un module sur un anneau. Autrement dit, pour tout ouvert  $U \subset X$  le groupe abélien  $\mathcal{F}(U)$  est muni d'une structure de  $\mathcal{O}_X(U)$ -module de telle sorte que la loi externe pour les applications de restriction  $\mathcal{F}(V) \rightarrow \mathcal{F}(U)$  est compatible aux applications  $\mathcal{O}_X(V) \rightarrow \mathcal{O}_X(U)$ , pour toute inclusion d'ouverts  $U \subset V$ . Un *morphisme de  $\mathcal{O}_X$ -modules* est un morphisme de faisceaux  $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  tel que  $\varphi(U)$  est un morphisme de  $\mathcal{O}_X(U)$ -modules pour tout  $U$ . On note  $\text{Mod}(\mathcal{O}_X)$  la catégorie des  $\mathcal{O}_X$ -modules.

Le noyau, le conoyau, l'image d'un morphisme de  $\mathcal{O}_X$ -modules est un  $\mathcal{O}_X$ -module. La notion de sous-module est immédiate. Le quotient d'un  $\mathcal{O}_X$ -module par un sous- $\mathcal{O}_X$ -module est un  $\mathcal{O}_X$ -module. Une somme directe, ou un produit direct de  $\mathcal{O}_X$ -modules est un  $\mathcal{O}_X$ -module.

Si  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$  sont deux  $\mathcal{O}_X$ -modules, alors le faisceau associé au préfaisceau  $U \mapsto \mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{G}(U)$  est un  $\mathcal{O}_X$ -module appelé *produit tensoriel de  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$*  et noté  $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$ . Le préfaisceau  $U \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{O}_U}(\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}|_U)$  des morphismes locaux entre  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$  est un faisceau appelé *faisceau des morphismes entre  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$*  et noté  $\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ . On attire l'attention sur l'existence d'un morphisme de  $\mathcal{O}_X(U)$ -modules :

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{O}_U}(\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}|_U) &\longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}_X(U)}(\mathcal{F}(U), \mathcal{G}(U)) \\ \varphi &\longmapsto \varphi(U) \end{aligned}$$

et on prendra garde de ne pas confondre la source (qui est un ensemble de morphismes de faisceaux) et le but (qui est un ensemble de morphismes de modules).

Soit  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme d'espaces annelés. Si  $\mathcal{F}$  est un  $\mathcal{O}_X$ -module, le faisceau  $f_*\mathcal{F}$  est naturellement un  $f_*\mathcal{O}_X$ -module et le morphisme  $f^\# : \mathcal{O}_Y \rightarrow f_*\mathcal{O}_X$  permet de le voir comme un  $\mathcal{O}_X$ -module. Si  $\mathcal{G}$  est un  $\mathcal{O}_Y$ -module, le faisceau  $f^{-1}\mathcal{G}$  est naturellement un  $f^{-1}\mathcal{O}_Y$ -module. Le morphisme  $f^{-1}\mathcal{O}_Y \rightarrow \mathcal{O}_X$  déduit de  $f^\#$  par adjonction permet de définir le  $\mathcal{O}_X$ -module  $f^*\mathcal{G} := f^{-1}\mathcal{G} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X$ . On a ainsi défini des foncteurs image directe  $f_* : \text{Mod}(\mathcal{O}_X) \rightarrow \text{Mod}(\mathcal{O}_Y)$  et image inverse  $f^* : \text{Mod}(\mathcal{O}_Y) \rightarrow \text{Mod}(\mathcal{O}_X)$ .

**4.1.2 Proposition (Adjonction  $(f^{-1}, f_*)$ ).** Soit  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme d'espaces annelés. Alors on a une bijection canonique, fonctorielle en  $\mathcal{F} \in \text{Mod}(X)$  et  $\mathcal{G} \in \text{Mod}(Y)$  :

$$\text{Hom}_{\text{Mod}(X)}(f^*\mathcal{G}, \mathcal{F}) = \text{Hom}_{\text{Mod}(Y)}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F}).$$

**Démonstration :** Exercice. □

**4.1.3 Exercice.** Soient  $X$  un schéma et  $x \in |X|$  un point vu comme un morphisme  $x : \text{Spec}(k) \rightarrow X$  où  $k = \kappa(x)$  est le corps résiduel. On s'intéresse aux adjonctions  $(x^{-1}, x_*)$  entre catégories de faisceaux d'ensembles, et  $(x^*, x_*)$  entre catégories de faisceaux de modules.

(1) Décrivez les foncteurs  $x_* : F(\text{Spec}(k)) \rightarrow F(X)$  lorsque  $F$  est la catégorie des faisceau d'ensembles ou de groupes abéliens, et  $x_* : \text{Mod}(\text{Spec}(k)) \rightarrow \text{Mod}(X)$ . On appelle  $x_*\mathcal{F}$  un *faisceau gratte-ciel en  $x$* .

(2) Soit  $\mathcal{F}$  un faisceau d'ensembles ou de groupes abéliens sur  $X$ . Montrez que l'image inverse  $x^{-1}\mathcal{F}$  est (le faisceau sur  $\text{Spec}(k)$  associé à) la fibre  $\mathcal{F}_x$ .

(2) Soit  $\mathcal{F}$  un faisceau de  $\mathcal{O}_X$ -modules. Décrivez l'image inverse  $x^*\mathcal{F}$ . Le  $k$ -espace vectoriel  $\mathcal{F}(x) = \Gamma(\text{Spec}(k), x^*\mathcal{F})$  est encore appelé *fibre de  $\mathcal{F}$  en  $x$* .

## 4.2 Modules quasi-cohérents sur les schémas

Pour tout anneau  $A$ , un module  $M$  définit un  $\mathcal{O}_X$ -module sur  $X = \text{Spec}(A)$  par le même procédé naturel que celui qui nous a permis de définir le faisceau de fonctions  $\mathcal{O}_X$ . Pour tout  $f \in A$ , on note classiquement  $M[1/f]$  ou  $M_f$  le localisé de  $M$  par rapport à la partie multiplicative  $S = \{1, f, f^2, \dots\}$ . C'est un  $A_f$ -module.

**4.2.1 Proposition.** *Sur  $X = \text{Spec}(A)$ , les données suivantes :*

- (1)  $\mathcal{F}(D(f)) = M_f$  pour tout  $f \in A$ ,
- (2)  $\text{res}_{D(g), D(f)} : M_g \rightarrow M_f$  égal à l'application naturelle, pour toute inclusion  $D(f) \subset D(g)$ ,

définissent un  $\mathcal{B}$ -faisceau. On note  $\widetilde{M}$  le faisceau qu'il détermine. Tout morphisme de  $A$ -modules  $u : M \rightarrow N$  définit un morphisme de  $\mathcal{O}_X$ -modules  $\widetilde{u} : \widetilde{M} \rightarrow \widetilde{N}$ .

**Démonstration :** La preuve est la même que celle de 1.6.1. □

**4.2.2 Proposition.** *Soit  $A$  un anneau et  $M, N$  deux  $A$ -modules. Les applications*

$$\text{Hom}_A(M, N) \xrightleftharpoons[\Gamma]{u \mapsto \widetilde{u}} \text{Hom}_X(\widetilde{M}, \widetilde{N})$$

sont des bijections inverses l'une de l'autre.

**Démonstration :** Soit  $u : M \rightarrow N$  un morphisme de  $A$ -modules et  $\varphi = \widetilde{u}$ . L'égalité  $u = \Gamma(\varphi)$  découle de la définition. Soit  $\varphi : \widetilde{M} \rightarrow \widetilde{N}$  un morphisme de  $\mathcal{O}_X$ -modules et  $u = \Gamma(\varphi) = \varphi(X)$ . Par compatibilité de  $\varphi$  aux restrictions, pour tout ouvert principal  $U = D(f)$ , on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\varphi(X)} & N \\ \downarrow & & \downarrow \\ M_f & \xrightarrow{\varphi(U)} & N_f. \end{array}$$

Ceci montre que  $\varphi(U)(m) = u(m)$  pour tout  $m \in M$ . Comme  $\varphi(U)$  est un morphisme de  $A_f$ -modules, on a alors  $\varphi(U)(m/f^n) = u(m)/f^n$  pour tous  $m \in M, n \geq 0$ . Ceci montre que  $\varphi = \widetilde{u}$ . □

**4.2.3 Exercice.** Soit  $A$  un anneau et  $X = \text{Spec}(A)$ .

(1) Le foncteur tilde :  $\text{Mod}(A) \rightarrow \text{Mod}(\mathcal{O}_X)$ ,  $M \mapsto \widetilde{M}$  est exact. Ceci signifie que si  $\dots \rightarrow M \rightarrow M' \rightarrow M'' \rightarrow \dots$  est une suite exacte de  $A$ -modules, alors  $\dots \rightarrow \widetilde{M} \rightarrow \widetilde{M}' \rightarrow \widetilde{M}'' \rightarrow \dots$  est une suite exacte de  $\mathcal{O}_X$ -modules. De manière équivalente : si  $0 \rightarrow M \rightarrow M' \rightarrow M'' \rightarrow 0$  est une suite exacte de  $A$ -modules, alors  $0 \rightarrow \widetilde{M} \rightarrow \widetilde{M}' \rightarrow \widetilde{M}'' \rightarrow 0$  est une suite exacte de  $\mathcal{O}_X$ -modules. (L'équivalence provient du fait que toute suite exacte

$$\dots \longrightarrow M \xrightarrow{u} M' \xrightarrow{u'} M'' \xrightarrow{u''} \dots$$

peut être décomposée en suites exactes courtes

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow \ker(u) \longrightarrow M \longrightarrow \operatorname{im}(u) \longrightarrow 0 \\ 0 &\longrightarrow \ker(u') \longrightarrow M' \longrightarrow \operatorname{im}(u') \longrightarrow 0 \\ 0 &\longrightarrow \ker(u'') \longrightarrow M'' \longrightarrow \operatorname{im}(u'') \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

(2) Le foncteur tilde préserve les noyaux, les conoyaux et les images : le noyau du tilde est le tilde du noyau, etc. (Fabriquer une application naturelle de  $(\ker(u))^\sim$  vers  $\ker(\tilde{u})$  et montrer que c'est un isomorphisme, etc.)

(3) Le foncteur tilde préserve les sommes directes arbitraires.

## Introduction à la Géométrie Algébrique. Le langage des schémas

Cours du 3 novembre 2015

Sur un schéma affine, les  $\mathcal{O}_X$ -modules qui sont intéressants en géométrie algébrique sont les modules  $\mathcal{F} = \widetilde{M}$  définis par un module sur un anneau. Or les  $A$ -modules vérifient une propriété qui, bien que stupide, se transfère du côté des  $\mathcal{O}_X$ -modules en une propriété qui ne l'est pas : ils sont engendrés par leurs éléments. Plus précisément, ils peuvent être définis par générateurs et relations, ce qui signifie que pour tout  $A$ -module  $M$  il existe une suite exacte :

$$A^{(J)} \longrightarrow A^{(I)} \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

où  $A^{(I)}, A^{(J)}$  sont les modules libres sur des ensembles de base  $I, J$ . Une autre manière de le dire est que tout module est conoyau d'un morphisme entre modules libres. On constate facilement que ceci implique que sur  $X = \text{Spec}(A)$ , le module  $\mathcal{F} = \widetilde{M}$  peut localement être défini par générateurs et relations. Nous prenons cette dernière propriété pour définition des modules quasi-cohérents.

**4.2.4 Définition.** Soit  $X$  un espace annelé. On dit qu'un  $\mathcal{O}_X$ -module est *quasi-cohérent* si tout point  $x \in X$  possède un voisinage ouvert  $U$  sur lequel  $\mathcal{F}|_U$  peut être défini par générateurs et relations, i.e. il existe une suite exacte  $\mathcal{O}_U^{(J)} \longrightarrow \mathcal{O}_U^{(I)} \longrightarrow \mathcal{F}|_U \longrightarrow 0$ . On note  $\text{Qcoh}(\mathcal{O}_X)$  la catégorie des  $\mathcal{O}_X$ -modules quasi-cohérents.

Le fait que ce soit une bonne notion dans le cadre des schémas sera confirmé par la propriété que sur un schéma affine, tout module quasi-cohérent est de la forme  $\widetilde{M}$ . Nous allons démontrer ceci et en même temps quelques compléments.

**4.2.5 Théorème.** Soient  $X$  un schéma et  $\mathcal{F}$  un  $\mathcal{O}_X$ -module. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (1) Pour tout ouvert affine  $U = \text{Spec}(A)$  il existe un  $A$ -module  $M$  tel que  $\mathcal{F}|_U \simeq \widetilde{M}$ .
- (2) Il existe un recouvrement ouvert affine  $\{U_i = \text{Spec}(A_i)\}$  et des  $A_i$ -modules  $M_i$  tels que  $\mathcal{F}|_{U_i} \simeq \widetilde{M}_i$ .
- (3) Le  $\mathcal{O}_X$ -module  $\mathcal{F}$  est quasi-cohérent.
- (4) Pour tout ouvert affine  $U = \text{Spec}(A)$  et pour tout  $f \in A$ , le morphisme  $\Gamma(U, \mathcal{F})_f \rightarrow \Gamma(D(f), \mathcal{F})$  est un isomorphisme.

**Démonstration :** D'abord un commentaire sur le point (4) : le morphisme proposé provient du morphisme de restriction  $\Gamma(U, \mathcal{F}) \rightarrow \Gamma(D(f), \mathcal{F})$  via la propriété universelle, puisque clairement l'élément  $f$  induit sur le module  $\Gamma(D(f), \mathcal{F})$  un morphisme bijectif. Nous passons à la démonstration.

(1)  $\Rightarrow$  (2) est clair.

(2)  $\Rightarrow$  (3). Par hypothèse, il existe un recouvrement ouvert affine  $\{U_i = \text{Spec}(A_i)\}$  tel que  $\mathcal{F}|_{U_i} \simeq \widetilde{M}_i$  pour tout  $i$ . Soit  $A_i^{(J)} \rightarrow A_i^{(I)} \rightarrow M_i \rightarrow 0$  une présentation de  $M_i$ . Comme le foncteur tilde :  $\text{Mod}(A) \rightarrow$

$\text{Mod}(\mathcal{O}_X)$ ,  $M \mapsto \widetilde{M}$  est exact (voir exercice 4.2.3), on en déduit que la suite  $\mathcal{O}_U^{(J)} \rightarrow \mathcal{O}_U^{(I)} \rightarrow \mathcal{F}|_{U_i} \rightarrow 0$  est exacte, donc  $\mathcal{F}$  est quasi-cohérent. Pour être complet, démontrons l'assertion d'exactitude de 4.2.3 avec  $A = A_i$ ,  $M = M_i$ , etc. Soit  $\cdots \rightarrow M \xrightarrow{u} M' \xrightarrow{v} M'' \rightarrow \cdots$  une suite exacte de  $A$ -modules et notons  $\cdots \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F}'' \rightarrow \cdots$  la suite image par tilde, où  $\mathcal{F} = \widetilde{M}$  (etc). Comme  $v \circ u = 0$  on a  $\widetilde{v} \circ \widetilde{u} = 0$ , et on doit montrer que le morphisme de faisceaux  $\text{im}(\widetilde{u}) \rightarrow \text{ker}(\widetilde{v})$  est un isomorphisme. Comme la localisation des modules par rapport à une partie multiplicative est un foncteur exact (voir [Mat], th. 4.5), on déduit une suite exacte  $\cdots \rightarrow M_p \rightarrow M'_p \rightarrow M''_p \rightarrow \cdots$  pour tout premier  $p \subset A$ . Comme  $M_p = \mathcal{F}_x$  au point  $x = [p]$ , cette suite se réécrit  $\cdots \rightarrow \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{F}'_x \rightarrow \mathcal{F}''_x \rightarrow \cdots$ . Ainsi l'application  $\text{im}(\widetilde{u}) \rightarrow \text{ker}(\widetilde{v})$  est un isomorphisme sur les fibres, donc un isomorphisme de faisceaux et la suite  $\cdots \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F}'' \rightarrow \cdots$  est exacte.

(3)  $\Rightarrow$  (4). Si  $\mathcal{F}|_U$  est de la forme  $\widetilde{M}$ , les deux membres sont égaux à  $M_f$  et l'énoncé est clair. Nous utiliserons ce fait ci-dessous. Quitte à changer  $X$  en  $U$ , on peut supposer  $U = X = \text{Spec}(A)$  affine. Par l'hypothèse (3) il existe un recouvrement ouvert par des ouverts (que l'on peut supposer principaux  $U_i = D(f_i)$ ) et des présentations par générateurs et relations :

$$\widetilde{A}_{f_i}^{(J)} \xrightarrow{\widetilde{u}_i} \widetilde{A}_{f_i}^{(I)} \longrightarrow \mathcal{F}|_{U_i} \longrightarrow 0.$$

Comme  $X$  est quasi-compact, on peut supposer les  $U_i$  en nombre fini. Comme le foncteur tilde est pleinement fidèle (prop. 4.2.2), chaque morphisme  $\widetilde{u}_i$  est défini par un certain morphisme de  $A_{f_i}$ -modules  $u_i : A_{f_i}^{(J)} \rightarrow A_{f_i}^{(I)}$ . Comme tilde préserve les conoyaux (voir exercice 4.2.3), on en déduit que  $\mathcal{F}|_{U_i} = \text{coker}(\widetilde{u}_i) = \text{coker}(u_i)^\sim$ . Compte tenu de notre observation initiale ceci montre que  $\mathcal{F}|_{U_i}$  vérifie la propriété (4) attendue. Le même argument montre que la restriction de  $\mathcal{F}$  aux ouverts  $U_i \cap U_j = D(f_i f_j)$  vérifient la propriété (4). Nous allons conclure en utilisant la propriété de faisceau. Celle-ci affirme que l'on a une suite exacte  $\Gamma(X, \mathcal{F}) \rightarrow \prod \Gamma(U_i, \mathcal{F}) \rightarrow \prod \Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{F})$ . Comme les ensembles d'indices des produits sont *finis*, le morphisme naturel  $(\prod \Gamma(U_i, \mathcal{F}))_f \rightarrow \prod \Gamma(U_i, \mathcal{F})_f$  est un isomorphisme ainsi que son analogue sur les  $U_i \cap U_j$ . On peut donc localiser en  $f$  cette suite exacte, ce qui donne le premier rang du diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & \Gamma(X, \mathcal{F})_f & \longrightarrow & \prod_i \Gamma(U_i, \mathcal{F})_f & \longrightarrow & \prod_{i,j} \Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{F})_f \\ & & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma \\ 0 & \longrightarrow & \Gamma(D(f), \mathcal{F}) & \longrightarrow & \prod_i \Gamma(D(f) \cap U_i, \mathcal{F}) & \longrightarrow & \prod_{i,j} \Gamma(D(f) \cap U_i \cap U_j, \mathcal{F}) \end{array}$$

D'après ce que nous avons démontré auparavant, les applications  $\beta$  et  $\gamma$  sont des isomorphismes. L'application  $\alpha$  identifie alors  $\text{ker}(\beta)$  et  $\text{ker}(\gamma)$ , d'où (4).

(iv)  $\Rightarrow$  (i). Posons  $M = \Gamma(U, \mathcal{F})$ . La restriction des sections induit un morphisme de  $\mathcal{O}_U$ -modules  $\widetilde{M} \rightarrow \mathcal{F}|_U$ . La propriété (4) affirme que c'est un isomorphisme sur tous les ouverts principaux  $D(f) \subset U$ , c'est donc un isomorphisme de faisceaux.  $\square$

**4.2.6 Corollaire.** *Soit  $X = \text{Spec}(A)$  un schéma affine. Les foncteurs*

$$\text{Mod}(A) \xrightleftharpoons[\Gamma]{M \mapsto \widetilde{M}} \text{Qcoh}(\mathcal{O}_X)$$

*sont des équivalences de catégories exactes, quasi-inverses l'une de l'autre.*

On renvoie à 1.4.11 pour un rappel sur la notion de quasi-inverse. L'exactitude du foncteur  $\Gamma$  signifie la chose suivante : si une suite de  $\mathcal{O}_X$ -modules quasi-cohérents  $0 \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'' \rightarrow 0$  est exacte, alors la suite de  $A$ -modules  $0 \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}') \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}'') \rightarrow 0$  est exacte. (Énoncé similaire pour l'exactitude du foncteur tilde.)

**Démonstration :** Le foncteur  $M \mapsto \widetilde{M}$  est pleinement fidèle par 4.2.2 et essentiellement surjectif par 4.2.5. Il est clair que  $\mathcal{F} \mapsto \Gamma(X, \mathcal{F})$  est un quasi-inverse. Passons aux énoncés d'exactitude. Nous avons déjà vu que  $M \mapsto \widetilde{M}$  est exact. Démontrons que  $\Gamma$  l'est aussi (même si un résultat général de théorie des catégories dit qu'un quasi-inverse d'un foncteur exact est exact). Soit donc  $0 \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'' \rightarrow 0$  une suite exacte de  $\mathcal{O}_X$ -modules quasi-cohérents. Notons  $M = \Gamma(X, \mathcal{F})$ , etc. On voit directement en utilisant les définitions que la suite  $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M''$  est exacte. Notons  $Q = M/M'$ , on a donc une injection  $Q \hookrightarrow M''$ . Montrons que le module  $C = M''/Q$  est nul. Pour tout  $x = [p] \in X$ , la suite  $0 \rightarrow \mathcal{F}'_x \rightarrow \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{F}''_x \rightarrow 0$  est exacte. Puisque  $\mathcal{F}_x = M_p$  (etc.), ce implique que  $Q_p \rightarrow M''_p$  est un isomorphisme, et ceci pour tout  $p$ . Alors  $C_p = (M''/Q)_p \simeq M''_p/Q_p = 0$  pour tout  $p$ . Mais un module  $C$  dont tous les localisés  $C_p$  sont nuls est nul (car si  $x \in C$  est non nul, son annulateur  $\text{Ann}(x)$  est un idéal distinct de  $A$ , donc inclus dans un idéal maximal  $p$ , et  $x$  reste non nul dans  $C_p$ . Voir [Mat], th. 4.6). Nous avons montré que  $C = 0$ , donc  $Q \rightarrow M''$  est un isomorphisme et la suite  $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$  est exacte.  $\square$

**4.2.7 Exercice.** Soient  $X = \text{Spec}(A)$ ,  $Y = \text{Spec}(B)$  deux schémas affines et  $f : Y \rightarrow X$  le morphisme défini par un morphisme d'anneaux  $\varphi : A \rightarrow B$ . Montrez les faits suivants :

- (1) si  $N$  est un  $B$ -module,  ${}_A N$  est  $N$  vu comme  $A$ -module via  $\varphi$ , et  $\mathcal{G} = \widetilde{N}$ , alors  $f_* \mathcal{G} = \widetilde{{}_A N}$ .
- (2) si  $M$  est un  $A$ -module et  $\mathcal{F} = \widetilde{M}$ , alors  $f^* \mathcal{F} = \widetilde{M \otimes_A B}$ .

### 4.3 Algèbres quasi-cohérentes et spectre relatif

**4.3.1 Définition.** Soit  $S$  un schéma. On appelle *faisceau d'algèbres sur  $S$*  ou  $\mathcal{O}_S$ -algèbre un faisceau d'anneaux  $\mathcal{A}$  sur  $S$  muni d'un morphisme d'anneaux  $\mathcal{O}_S \rightarrow \mathcal{A}$ . On appelle  $\mathcal{O}_S$ -algèbre quasi-cohérente un faisceau d'algèbres qui est quasi-cohérent comme faisceau de modules.

Par exemple, si  $f : X \rightarrow S$  est un  $S$ -schéma, alors  $\mathcal{A}(X) := f_* \mathcal{O}_X$  est naturellement une  $\mathcal{O}_S$ -algèbre à l'aide du morphisme  $f^\# : \mathcal{O}_S \rightarrow f_* \mathcal{O}_X$ . De plus, si  $g : Y \rightarrow S$  est un second  $S$ -schéma et  $h : X \rightarrow Y$  un  $S$ -morphisme, le morphisme  $\mathcal{O}_Y \rightarrow h_* \mathcal{O}_X$  fournit par application de  $g_*$  un morphisme  $\mathcal{A}(Y) \rightarrow \mathcal{A}(X)$ . On obtient ainsi un foncteur contravariant  $\mathcal{A} : \text{Sch}/S \rightarrow \{\mathcal{O}_S\text{-algèbres}\}$ . Nous montrerons plus loin que sous des conditions assez faibles sur  $f$  (par ex. quasi-compacité plus séparation), l'algèbre  $\mathcal{A}(X)$  est quasi-cohérente. Ce résultat impliquera par exemple que si  $X$  est un sous-schéma fermé d'un espace affine  $\mathbb{A}_S^n$  ou d'un espace projectif  $\mathbb{P}_S^n$ , alors  $\mathcal{A}(X)$  est quasi-cohérente.

**4.3.2 Exercice.** Montrez que sur un schéma affine  $X = \text{Spec}(A)$ , le produit tensoriel de deux modules quasi-cohérents  $\mathcal{F} = \widetilde{M}$  et  $\mathcal{G} = \widetilde{N}$  est le module  $\widetilde{M \otimes_A N}$ . Dédisez-en que  $B \mapsto \widetilde{B}$  définit une équivalence entre la catégorie des  $A$ -algèbres et la catégorie des  $\mathcal{O}_X$ -algèbres quasi-cohérentes.

**4.3.3 Proposition.** Soit  $\mathcal{A}$  une algèbre quasi-cohérente sur  $S$ . Alors il existe un  $S$ -schéma  $Y = \text{Spec}(\mathcal{A})$  tel que  $\mathcal{A}(Y) = \mathcal{A}$  avec la propriété universelle suivante : le foncteur  $\mathcal{A}$  induit une bijection

$$\text{Hom}_S(X, \text{Spec}(\mathcal{A})) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathcal{O}_S\text{-Alg}}(\mathcal{A}, \mathcal{A}(X))$$

fonctorielle en  $X$  et en  $\mathcal{A}$ . De plus la formation de  $\text{Spec}(\mathcal{A})$  commute au changement de base sur  $S$ , i.e. pour tout morphisme de schémas  $S' \rightarrow S$  il existe un isomorphisme canonique de  $S'$ -schémas

$$\text{Spec}(\mathcal{A}) \times_S S' \xrightarrow{\sim} \text{Spec}(u^*\mathcal{A}).$$

**Démonstration :** Si  $S = \text{Spec}(R)$  est affine, on a  $\mathcal{A} = \tilde{A}$  pour une certaine  $R$ -algèbre  $A$ . Dans ce cas on pose  $Y = \text{Spec}(A)$  et le résultat se déduit facilement de 1.8.7. Dans le cas général, on peut recouvrir  $S$  par des ouverts affines  $U_i = \text{Spec}(R_i)$ . On pose  $Y_i = \text{Spec}(R_i)$ . L'ouvert  $Y_{i,j}$  préimage de  $U_i \cap U_j$  dans  $Y_i$  vérifie la propriété universelle du schéma  $\text{Spec}(\mathcal{A}|_{U_i \cap U_j})$ . Par symétrie il en va de même de  $Y_{j,i}$  et on a donc un isomorphisme canonique  $\varphi_{i,j} : Y_{i,j} \xrightarrow{\sim} Y_{j,i}$ . On note  $Y$  le  $S$ -schéma obtenu par recollement des  $Y_i$  le long des  $Y_{i,j}$ . La vérification de la propriété universelle est immédiate car la bijection annoncée peut se tester localement : plus précisément, si l'on note  $u, v$  les deux applications en sens inverses entre les deux ensembles  $\text{Hom}$ , on peut tester les égalités  $u(v(f)) = f$  et  $v(u(g)) = g$  localement. Enfin il nous reste à montrer l'énoncé sur la formation de  $\text{Spec}(\mathcal{A})$  et le changement de base. Il suffit de montrer que les  $S'$ -schémas  $\text{Spec}(\mathcal{A}) \times_S S'$  et  $\text{Spec}(u^*\mathcal{A})$  sont solution du même problème universel. Or pour tout  $S'$ -schéma  $f' : X' \rightarrow S'$  on a des bijections canoniques :

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{S'}(X', \text{Spec}(u^*\mathcal{A})) &= \text{Hom}_{\mathcal{O}_{S'}\text{-Alg}}(u^*\mathcal{A}, \mathcal{A}'(X')) \\ &= \text{Hom}_{\mathcal{O}_S\text{-Alg}}(\mathcal{A}, u_*\mathcal{A}'(X')) \text{ par adjonction,} \\ &= \text{Hom}_{\mathcal{O}_S\text{-Alg}}(\mathcal{A}, \mathcal{A}(X')) \text{ en posant } f = u \circ f' : X' \rightarrow S, \\ &= \text{Hom}_S(X', \text{Spec}(\mathcal{A})) \\ &= \text{Hom}_{S'}(X', \text{Spec}(\mathcal{A}) \times_S S'). \end{aligned}$$

Ceci termine la démonstration. □

**4.3.4 Exercice.** Soit  $S$  un schéma. Définissez la  $\mathcal{O}_S$ -algèbre  $\mathcal{O}_S[t_1, \dots, t_n]$  des polynômes en  $t_1, \dots, t_n$  et montrez que son spectre est l'espace affine  $\mathbb{A}_S^n$ . Décrivez la propriété universelle du  $S$ -schéma  $\mu_{n,S} := \text{Spec}(\mathcal{O}_S[t]/(t^n - 1))$ . (Plus généralement, on peut définir une algèbre quasi-cohérente  $\mathcal{A} = \mathcal{O}_S[t_1, \dots, t_n]/(f_1, \dots, f_r)$  et un schéma  $X = \text{Spec}(\mathcal{A})$  pour tout choix de  $r$  polynômes  $f_1, \dots, f_r \in \Gamma(S, \mathcal{O}_S)[t_1, \dots, t_n]$ .)

## 4.4 Idéaux quasi-cohérents et sous-schémas fermés

**4.4.1 Définition.** Soit  $X$  un schéma. On appelle *idéal quasi-cohérent sur  $X$*  un sous- $\mathcal{O}_X$ -module quasi-cohérent de  $\mathcal{O}_X$ .

Si  $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_X$  est un idéal quasi-cohérent de  $\mathcal{O}_X$ , le quotient  $\mathcal{O}_X/\mathcal{I}$  est une  $\mathcal{O}_X$ -algèbre quasi-cohérente et on peut former le schéma  $V(\mathcal{I}) := \text{Spec}(\mathcal{O}_X/\mathcal{I})$ . Pour tout ouvert affine  $U =$

$\text{Spec}(A)$  de  $X$ , notons  $I = \mathcal{I}(U)$ . Il découle de 4.2.6, que l'on a  $(\mathcal{O}_X/\mathcal{I})(U) = \mathcal{O}_X(U)/\mathcal{I}(U) = A/I$ . En conséquence, la restriction du morphisme  $i : V(\mathcal{I}) \rightarrow X$  au-dessus de l'ouvert  $U$  est le schéma  $V(I) = \text{Spec}(A/I)$ . Ceci montre que  $i$  est une immersion fermée. On identifie  $V(\mathcal{I})$  à son image dans  $X$  et on le voit donc comme un sous-schéma fermé de  $X$ .

**4.4.2 Proposition.** *Pour tout schéma  $X$ , l'application  $\mathcal{I} \mapsto Y = \text{Spec}(\mathcal{O}_X/\mathcal{I})$  est une bijection entre l'ensemble des idéaux quasi-cohérents de  $\mathcal{O}_X$  et l'ensemble des sous-schémas fermés de  $X$ .*

**Démonstration :** Nous nous contentons de construire la bijection réciproque. Il s'agit de l'application qui à un sous-schéma fermé  $Y \subset X$  associe le faisceau  $\mathcal{I} := \ker(\mathcal{O}_X \rightarrow i_*\mathcal{O}_Y)$  et nous devons montrer que celui-ci est quasi-cohérent. Comme le noyau d'un morphisme entre deux modules quasi-cohérents l'est encore, il suffit de montrer que  $i_*\mathcal{O}_Y$  est un quasi-cohérent. Nous utilisons la caractérisation (4) du théorème 4.2.5. Soit  $U = \text{Spec}(A)$  un ouvert affine de  $X$  et  $D(f)$  un ouvert principal de  $U$ . Par restriction à ces ouverts, on obtient des sous-schémas fermés  $Y \cap U \hookrightarrow U$  et  $Y \cap D(f) \hookrightarrow D(f)$ . D'après la proposition 2.2.5, il existe un idéal  $I \subset A$  tel que  $Y \cap U = V(I)$ . Il s'ensuit que  $Y \cap D(f) = V(I_f)$ . On voit alors que  $\Gamma(U, i_*\mathcal{O}_Y)_f = (B/I)_f$  et  $\Gamma(D(f), i_*\mathcal{O}_Y) = B_f/I_f$ , et l'application  $\Gamma(U, i_*\mathcal{O}_Y)_f \rightarrow \Gamma(D(f), i_*\mathcal{O}_Y)$  est l'isomorphisme canonique entre ces anneaux (cet isomorphisme vient du fait que la localisation commute au quotient par un idéal, cf [Mat], th. 4.2).  $\square$

Il est clair que la formulation  $Y = \text{Spec}(\mathcal{O}_X/\mathcal{I})$  donne la meilleure définition de la notion de sous-schéma fermé, même si nous avons dû attendre d'avoir un peu d'aisance avec les modules quasi-cohérents pour la donner.

## Introduction à la Géométrie Algébrique. Le langage des schémas

Cours du 10 novembre 2015

### 4.5 Modules cohérents

Nous introduisons maintenant des conditions de finitude sur les  $\mathcal{O}_X$ -modules, naturelles en géométrie algébrique.

**4.5.1 Définition.** Soit  $X$  un espace annelé. On dit qu'un  $\mathcal{O}_X$ -module est *de type fini* si tout point  $x \in X$  possède un voisinage ouvert  $U$  sur lequel  $\mathcal{F}|_U$  peut être engendré par un nombre fini de sections, i.e. il existe une suite exacte  $\mathcal{O}_U^{\oplus n} \rightarrow \mathcal{F}|_U \rightarrow 0$ .

**4.5.2 Remarques.** (1) Un  $\mathcal{O}_X$ -module de type fini n'est pas nécessairement quasi-cohérent. Voici un contre-exemple. Prenons pour  $X$  le spectre d'un anneau de valuation discrète comme  $R = k[t]_{(t)}$  ( $k$  un corps) ou  $R = \mathbb{Z}_p$  ( $p$  un nombre premier). Alors  $X$  est composé de deux points, un point fermé et le point générique  $\eta$  qui forme un ouvert  $U = \{\eta\}$ . Le corollaire 4.2.6 montre que le faisceau d'idéaux défini par  $\mathcal{I}(X) = 0$  et  $\mathcal{I}(U) = \mathcal{O}_X(U) = \text{Frac}(R)$  n'est pas quasi-cohérent. Il en découle que le faisceau  $\mathcal{O}_X/\mathcal{I}$  n'est pas quasi-cohérent, alors qu'il est de type fini, localement engendré par *une* section.

(2) Lorsque  $X$  n'est pas localement noethérien, un  $\mathcal{O}_X$ -module quasi-cohérent et de type fini  $\mathcal{F}$  est en général défini (localement) à l'aide d'une infinité de relations ; plus précisément, localement sur un ouvert  $U$  sur lequel on dispose d'une surjection  $s : \mathcal{O}_U^{\oplus n} \rightarrow \mathcal{F}|_U$ , le noyau de  $s$  n'est pas nécessairement de type fini. Si  $X = \text{Spec}(A)$  et  $I$  est un idéal qui n'est pas de type fini, le faisceau  $\mathcal{F} = \widetilde{M}$  avec  $M = A/I$  est un tel exemple.

Les  $\mathcal{O}_X$ -modules qui nous intéressent le plus sont ceux qui ne présentent pas la pathologie de la remarque (2). Ils sont nommés *cohérents*. Leur définition est conçue pour que la catégorie qu'ils forment possède de bonnes propriétés de stabilité. (Noter à ce propos que la définition de [Har], chap. II, § 5, n'est pas correcte.)

**4.5.3 Définition.** Soit  $X$  un espace annelé. On dit qu'un  $\mathcal{O}_X$ -module est *cohérent* s'il est de type fini et si pour tout ouvert  $U$ , tout entier  $n$  et tout morphisme  $u : \mathcal{O}_U^{\oplus n} \rightarrow \mathcal{F}|_U$ , le noyau de  $u$  est de type fini. On note  $\text{Coh}(\mathcal{O}_X)$  la catégorie des  $\mathcal{O}_X$ -modules cohérents.

La proposition suivante signale que dans le cas d'un schéma affine, spectre d'un anneau noethérien, les  $\mathcal{O}_X$ -modules cohérents correspondent aux modules de type fini sur l'anneau.

**4.5.4 Proposition.** *Soit  $X = \text{Spec}(A)$  un schéma affine noethérien. Les foncteurs*

$$\text{Mod}^{tf}(A) \begin{array}{c} \xrightarrow{M \mapsto \widetilde{M}} \\ \xleftarrow{\Gamma} \end{array} \text{Coh}(\mathcal{O}_X)$$

*sont des équivalences exactes, quasi-inverses l'une de l'autre, entre la catégorie des  $A$ -modules de type fini (aussi appelés  $A$ -modules finis) et la catégorie des  $\mathcal{O}_X$ -modules cohérents.*

**Démonstration :** Si  $A$  est noethérien, alors l'anneau de fonctions  $B$  de tout ouvert de  $X$  est noethérien (2.4.5 et 2.4.2). De plus, tout sous-module de  $B^n$  est de type fini. Ceci démontre que pour tout  $A$ -module de type fini  $M$ , le faisceau  $\mathcal{F} = \widetilde{M}$  est cohérent. Réciproquement, si  $\mathcal{F}$  est cohérent, prenant  $U = X$  dans la définition on voit que le  $A$ -module  $M = \Gamma(X, \mathcal{F})$  est de type fini.  $\square$

Pour terminer cette brève présentation des modules cohérents, nous allons montrer comment le lemme de Nakayama se reformule géométriquement comme une propriété de leurs fibres (voir l'exercice 4.1.3 pour des rappels sur les fibres).

**4.5.5 Proposition.** *Soit  $X$  un schéma et  $\mathcal{F}$  un  $\mathcal{O}_X$ -module cohérent. Alors, les fibres  $\mathcal{F}(x) = \mathcal{F}_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \kappa(x)$  sont des  $\kappa(x)$ -espaces vectoriels de dimension finie. De plus, la fonction  $X \rightarrow \mathbb{N}$ ,  $x \mapsto \dim_{\kappa(x)} \mathcal{F}(x)$  est semi-continue supérieure, ce qui signifie que pour tout entier  $n$  l'ensemble  $\{x \in X; \dim \mathcal{F}(x) \leq n\}$  est ouvert dans  $X$ .*

**Démonstration :** Toutes les propriétés énoncées sont locales. Il suffit de les démontrer sur un ouvert affine  $U = \text{Spec}(A)$ . Soit  $x = [p]$  un point. Alors  $\mathcal{F}|_U$  est le faisceau associé au module  $M = \Gamma(U, \mathcal{F})$  qui est un  $A$ -module fini, et  $\mathcal{F}(x) \simeq M(p) := M \otimes_A \kappa(p)$ . Si  $x_1, \dots, x_r$  sont des générateurs de  $M$ , alors leurs images dans  $M(p)$  l'engendrent donc  $\dim_{\kappa(x)} \mathcal{F}(x) = \dim_{\kappa(p)} M(p) \leq r$ . Montrons maintenant la propriété de semi-continuité. Soit  $x = [p] \in U$  tel que  $\dim \mathcal{F}(x) \leq n$ . Ceci signifie que  $M(p)$  peut être engendré par des éléments  $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_r$  en nombre  $r \leq n$ . Comme  $\kappa(p) = \text{Frac}(A/p)$ , quitte à chasser les dénominateurs on peut supposer que  $\bar{x}_i \in M \otimes_A A/p = M/pM$  et on peut choisir un représentant  $x_i \in M$ . Soit  $u : A^r \rightarrow M$  le morphisme de  $A$ -modules qui envoie le  $i$ -ième vecteur de base canonique  $e_i \in A^r$  sur  $x_i$ . Le conoyau  $C = \text{coker}(u)$  est un  $A$ -module fini et son localisé  $C_p$  est  $A_p$ -module fini. Comme la formation du conoyau commute au produit tensoriel  $- \otimes_A \kappa(p)$  (exactitude à droite du produit tensoriel, cf [Mat], Appendix A, formula 8, ou [Ei], prop. A.2.1) et que les  $\bar{x}_i$  engendrent  $M(p)$ , on a :

$$C_p/pC_p = C_p \otimes_{A_p} \kappa(p) = C \otimes_A \kappa(p) = 0.$$

Ceci signifie que  $C_p = pC_p$ . D'après le lemme de Nakayama ([Mat], th. 2.2) il en découle que  $C_p = 0$ . Comme  $C$  est de type fini, on déduit qu'il existe  $f \notin p$  tel que  $fC = 0$ . En conséquence  $C \otimes_A A[1/f] = 0$ , donc le  $\mathcal{O}_U$ -module  $\widetilde{C}$  s'annule en restriction à l'ouvert  $V = D(f)$ . Ainsi  $\tilde{u}|_V : \mathcal{O}_V^{\oplus r} \rightarrow \mathcal{F}|_V$  est surjectif et ceci montre que  $\{x \in X; \dim \mathcal{F}(x) \leq n\}$  est ouvert.  $\square$

Nous avons évoqué plus haut les propriétés de stabilité de la catégorie  $\text{Coh}(\mathcal{O}_X)$ . La plus importante d'entre elles est la stabilité par images directes pour un morphisme propre  $f : X \rightarrow Y$  ayant une base  $Y$  localement noethérienne. Nous en reparlerons lorsque nous définirons les morphismes propres.

## 4.6 Faisceaux inversibles

**4.6.1 Définition.** Soit  $X$  un espace annelé et  $r$  un entier. On dit qu'un  $\mathcal{O}_X$ -module  $\mathcal{F}$  est *localement libre de rang  $r$*  s'il existe un recouvrement de  $X$  par des ouverts  $U_i$  et des isomorphismes  $\mathcal{F}|_{U_i} \simeq \mathcal{O}_{U_i}^{\oplus r}$ . On dit qu'un  $\mathcal{O}_X$ -module  $\mathcal{F}$  est *inversible* s'il est localement libre de rang 1. Le  $\mathcal{O}_X$ -module localement libre  $\mathcal{O}_X^{\oplus r}$  est appelé *trivial* et on dit qu'un ouvert  $U_i$  comme ci-dessus *trivialise*  $\mathcal{F}$ .

On notera qu'il existe une notion de  $\mathcal{O}_X$ -module localement libre dont le rang  $r$  est une fonction seulement localement constante sur  $X$ .

Nous avons vu en 4.1 les notions générales de produit tensoriel et de faisceau  $\mathcal{H}om$  pour les  $\mathcal{O}_X$ -modules. Nous ajoutons la définition du  $\mathcal{O}_X$ -module dual : il s'agit du faisceau  $\mathcal{F}^\vee = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X)$ . On dispose d'un morphisme  $\mathcal{F}^\vee \otimes \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{F})$  qui envoie une section locale  $\varphi \otimes s$  de  $\mathcal{F}$  sur un ouvert  $U$ , sur le morphisme  $\mathcal{F}|_U \rightarrow \mathcal{F}|_U$  défini par  $x \mapsto \varphi(x)s$ . On dispose aussi d'un morphisme  $\mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{F})$  qui envoie une section locale de  $\mathcal{O}_X$  sur la multiplication scalaire par cette section.

**4.6.2 Lemme.** *Soient  $X$  un espace annelé et  $\mathcal{F}$  un  $\mathcal{O}_X$ -module localement libre de rang 1. Alors, les morphismes canoniques introduits ci-dessus sont des isomorphismes :*

$$\mathcal{L}^\vee \otimes \mathcal{L} \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}om(\mathcal{L}, \mathcal{L}) \xleftarrow{\sim} \mathcal{O}_X.$$

**Démonstration :** Il suffit de montrer que les morphismes donnés sont des isomorphismes sur un recouvrement ouvert de  $X$ . Soit  $U$  un ouvert qui trivialise  $\mathcal{L}$ . Après le choix d'un isomorphisme  $u : \mathcal{O}_U \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}|_U$  et de l'isomorphisme  $(u^\vee)^{-1} : \mathcal{O}_U \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}|_U^\vee$  obtenu en dualisant, les isomorphismes se réduisent aux identifications  $\mathcal{O}_U \otimes \mathcal{O}_U = \mathcal{O}_U$  et  $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_U}(\mathcal{O}_U, \mathcal{O}_U) = \mathcal{O}_U$ .  $\square$

On a donc  $\mathcal{L}^\vee \otimes \mathcal{L} \simeq \mathcal{O}_X$ , ce qui explique la terminologie introduite dans la définition suivante.

**4.6.3 Définition.** Un faisceau de  $\mathcal{O}_X$ -modules  $\mathcal{L}$  est appelé *faisceau inversible* s'il est localement libre de rang 1. Son *inverse* ou *dual* est le faisceau  $\mathcal{L}^\vee = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}, \mathcal{O}_X)$ . Le faisceau inversible trivial est le faisceau  $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X$ . Le *groupe de Picard* de  $X$  est l'ensemble des classes d'isomorphisme de faisceaux inversibles sur  $X$ , pointé par la classe d'isomorphisme du faisceau inversible trivial et muni de l'opération de produit tensoriel. Il est noté  $\text{Pic}(X)$ .

**4.6.4 Remarque.** Si  $f : X \rightarrow Y$  est un morphisme d'espaces annelés, l'image inverse induit un morphisme de groupes  $f^* : \text{Pic}(Y) \rightarrow \text{Pic}(X)$ . En revanche, en général l'image directe  $f_*\mathcal{L}$  d'un faisceau inversible n'est pas un faisceau inversible. Par exemple, pour un schéma  $X$  sur un corps  $k$ , l'image directe de  $\mathcal{O}_X$  par  $X \rightarrow \text{Spec}(k)$  est l'espace vectoriel  $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$  qui est de dimension  $> 1$  en général.

**4.6.5 Définition.** Soient  $X$  un espace annelé,  $\mathcal{F}$  un  $\mathcal{O}_X$ -module, et  $(s_i)_{i \in I}$  une famille de sections globales de  $\mathcal{F}$ . On dit que  $\mathcal{F}$  est *engendré par les  $s_i$*  si le morphisme naturel  $\varphi : \mathcal{O}_X^{(I)} \rightarrow \mathcal{F}$ ,  $\varphi(U)((a_i)_{i \in I}) = \sum a_i s_i|_U$  est surjectif.

**4.6.6 Exemple (retour sur l'espace projectif).** Soit  $P = \mathbb{P}_S^n$  l'espace projectif sur  $S$ . Supposons que  $S = \text{Spec}(A)$  pour simplifier les notations ; toutes les constructions qui suivent fonctionnent pareil en travaillant avec le faisceau  $\mathcal{O}_S$  plutôt qu'avec l'anneau  $A$ . Soient  $A_i = A[t_0/t_i, \dots, t_n/t_i]$  et  $A_{i,j} = A_i[t_i/t_j] = A_j[\underline{t_j}/t_i] = A_{j,i}$ . Fixons un entier  $d$ . Sur l'ouvert  $P_i = \text{Spec}(A_i)$ , on définit un faisceau inversible  $\mathcal{F}_i = \widetilde{M}_i$  en posant  $M_i = (t_i)^d A_i$ , sous- $A_i$ -module de  $K = A[t_0, \dots, t_n, (t_0 \dots t_n)^{-1}]$ . Si l'on affecte chaque  $t_i$  du poids 1, on voit que  $M_i$  est composé des éléments homogènes de degré  $d$  dans  $A[t_0, \dots, t_n, (t_i)^{-1}]$ . Sur les intersections  $P_{i,j}$ , on dispose d'isomorphismes  $\varphi_{i,j} : \mathcal{F}_i|_{P_{i,j}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_j|_{P_{i,j}}$  donnés par la multiplication par  $(t_j/t_i)^d$  :

$$\begin{aligned} M_i &\longrightarrow M_j \\ x = (t_i)^d a &\longmapsto \left(\frac{t_j}{t_i}\right)^d x = (t_j)^d a. \end{aligned}$$

Les conditions de recollement sont satisfaites par les  $\varphi_{i,j}$  (tout se vérifie dans  $K$  où c'est clair). On note  $\mathcal{O}(d)$  le faisceau inversible obtenu en recollant les  $\mathcal{F}_i$  le long des  $\varphi_{i,j}$ . En particulier  $\mathcal{O}(0) = \mathcal{O}_P$ . Le faisceau  $\mathcal{O}(1)$  est appelé *faisceau tordu de Serre*. On a les faits suivants :

- (1)  $\mathcal{O}(n) \otimes \mathcal{O}(m) \simeq \mathcal{O}(n+m)$  i.e. l'application  $\mathbb{Z} \rightarrow \text{Pic}(P)$ ,  $n \mapsto [\mathcal{O}(n)]$  est un morphisme de groupes.
- (2)  $\Gamma(P, \mathcal{O}(d)) \simeq \begin{cases} A[t_0, \dots, t_n]_d, & \text{le module des polynômes homogènes de degré } d \text{ si } d \geq 0, \\ 0 & \text{si } d < 0. \end{cases}$

En particulier, le faisceau inversible  $\mathcal{O}(1)$  est engendré par les sections  $t_0, \dots, t_n$  puisque  $t_i$  engendre  $\mathcal{O}(1)|_{P_i}$ . On obtient donc un morphisme surjectif :

$$\phi : \mathcal{O}_P^{\oplus n+1} \longrightarrow \mathcal{O}(1).$$

On notera que, de même que l'espace affine  $\mathbb{A}_S^n$  vient par construction avec des coordonnées canoniques  $(t_1, \dots, t_n)$ , l'espace projectif  $\mathbb{P}_S^n$  vient avec un *système de coordonnées homogènes canonique* qui est un uplet  $(t_0, \dots, t_n)$  à multiplication scalaire par  $\Gamma(\mathbb{P}_S^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_S^n})^\times$  près. Or si on change les coordonnées homogènes  $t_i$  en  $u_i = \lambda t_i$  pour un  $\lambda \in \Gamma(S, \mathcal{O}_S)^\times$ , le morphisme  $\phi$  est multiplié par  $\lambda$ . C'est pourquoi dans la propriété universelle ci-dessous, c'est la classe de  $\phi$  modulo les scalaires inversibles qui apparaît.

**4.6.7 Théorème.** *Soit  $f : X \rightarrow \mathbb{P}_S^n$  un morphisme de  $S$ -schémas. Alors  $\mathcal{L} = f^*\mathcal{O}(1)$  est un faisceau inversible sur  $X$  et  $\psi = f^*\phi : \mathcal{O}_X^{\oplus n+1} \rightarrow \mathcal{L}$  est un morphisme surjectif de  $\mathcal{O}_X$ -modules. De plus, l'application  $f \mapsto (\mathcal{L}, \psi)$  induit une bijection fonctorielle en  $X$  :*

$$\text{Hom}_S(X, \mathbb{P}_S^n) \xrightarrow{\sim} \left\{ (\mathcal{L}, \psi) \text{ avec } \mathcal{L} \text{ faisceau inversible sur } X \text{ et } \right. \\ \left. \psi : \mathcal{O}_X^{\oplus n+1} \longrightarrow \mathcal{L} \text{ surjection de } \mathcal{O}_X\text{-modules} \right\} / \Gamma(X, \mathcal{O}_X)^\times.$$

**Démonstration :** nous nous contenterons de montrer comment on construit une application en sens inverse, et renverrons à [EH], III.2.5 ou [GW], 13.33 pour une preuve complète. Soit  $(\mathcal{L}, \psi)$  un couple composé d'un faisceau inversible sur  $X$  et d'une surjection  $\psi : \mathcal{O}_X^{\oplus n+1} \rightarrow \mathcal{L}$ . Soit  $s_i$  l'image par  $\psi$  du  $i$ -ième vecteur de la base canonique de  $\mathcal{O}_X^{\oplus n+1}$ . Notons  $\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \kappa(x)$  et pour chaque  $i$  posons

$$X_i = \{x \in X, (s_i)_x \neq 0 \text{ dans } \mathcal{L}(x)\}.$$

Il s'agit de l'ensemble des points  $x$  tels que  $s_i$  est un générateur de  $\mathcal{L}(x)$ , et aussi de  $\mathcal{L}_x$ , et donc (par Nakayama) de  $\mathcal{L}|_U$  sur un petit voisinage ouvert  $U$  de  $x$ . On montre que  $X_i$  est un ouvert, et le fait que les sections  $s_i$  engendrent  $\mathcal{L}$  montre que les  $X_i$  recouvrent  $X$ . De plus, pour tous  $j \neq i$ , sur tout ouvert  $U \subset X_i$  sur lequel  $\mathcal{L}$  est trivial, on peut écrire  $s_j = f_{i,j,U} s_i$  pour une certaine fonction  $f_{i,j,U} \in \Gamma(U, \mathcal{O}_U)$ . Cette fonction est uniquement déterminée ; les  $f_{i,j,U}$  se recollent en une fonction  $f_{i,j}$  sur  $X_i$ . L'application  $\mathbb{Z}[t_0/t_i, \dots, t_n/t_i] \rightarrow \Gamma(X_i, \mathcal{O}_X)$  qui envoie  $t_j/t_i$  sur  $f_{i,j}$  définit un morphisme  $f_i : U_i \rightarrow X_i$  où  $U_i$  est le  $i$ -ième ouvert standard de  $\mathbb{P}_S^n$ . Les morphismes  $f_i$  se recollent en  $f_{\mathbb{Z}} : X \rightarrow \mathbb{P}_S^n$  qui détermine à son tour un unique  $S$ -morphisme  $f : X \rightarrow \mathbb{P}_S^n$ .  $\square$

Proposons une petite reformulation de la propriété universelle. La première phrase du théorème implique que pour tout morphisme de  $S$ -schémas  $f : X \rightarrow \mathbb{P}_S^n$ , le faisceau  $\mathcal{L} = f^*\mathcal{O}(1)$  est inversible et engendré par les sections  $s_i = f^*t_i$  pour  $i = 0, \dots, n$ . De plus, si les  $t_i$  sont multipliées simultanément par une fonction inversible  $\lambda \in \Gamma(\mathbb{P}_S^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_S^n})^\times$ , alors les  $s_i$  sont multipliées simultanément par la fonction

inversible  $f^\#(\lambda) \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)^\times$ . Ceci démontre que la classe  $\underline{s} = (s_0 : \dots : s_n)$  pour la relation induite par la multiplication scalaire diagonale par  $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)^\times$ , ne dépend que de la classe  $\underline{t} = (t_0 : \dots : t_n)$ , c'est-à-dire du système de coordonnées homogènes canonique. Il est naturel d'appeler un couple  $(\mathcal{L}, \underline{s})$  composé d'un faisceau inversible et d'un uplet de sections globales qui l'engendrent, à multiplication par  $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)^\times$  près, un *système de fonctions homogènes sur  $X$* . Alors, le théorème se réécrit comme une bijection fonctorielle :

$$\mathrm{Hom}_S(X, \mathbb{P}_S^n) \xrightarrow{\sim} \{ \text{systèmes } (\mathcal{L}, \underline{s}) \text{ de } n+1 \text{ fonctions homogènes sur } X \}.$$

Un système de fonctions homogènes sur  $X$  ne mérite le nom de *coordonnées* que s'il permet de repérer les points de manière aussi précise que ce qu'on attend habituellement de coordonnées. C'est le cas notamment lorsque le morphisme  $X \rightarrow \mathbb{P}_S^n$  déterminé par  $(\mathcal{L}, \underline{s})$  est une immersion. En géométrie algébrique projective, l'une des principales tâches est justement de trouver quand cette situation favorable se produit.

**4.6.8 Remarque.** Il est instructif de décrire le cas particulier des morphismes  $X \rightarrow \mathbb{P}_S^n$  lorsque  $X$  est un schéma local, car il est très proche de la description classique des points de l'espace projectif. Lorsque  $X = \mathrm{Spec}(A)$  est affine, un morphisme surjectif  $\psi : \mathcal{O}_X^{\oplus n+1} \rightarrow \mathcal{L}$  est déterminé par un morphisme surjectif de  $A$ -modules  $A^{\oplus n+1} \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{L})$ . Celui-ci est à son tour déterminé par les  $n+1$  images  $\ell_0, \dots, \ell_n$  des éléments de la base canonique de  $A^{\oplus n+1}$ . Si de plus  $A$  est un anneau local, alors le seul ouvert de  $X$  contenant le point fermé est  $X$  lui-même, si bien que tout faisceau inversible est trivial. On a donc un isomorphisme  $\Gamma(X, \mathcal{L}) \simeq A$  et notant  $t$  un générateur de  $\Gamma(X, \mathcal{L})$ , on peut écrire  $\ell_i = a_i t$  avec  $a_i \in A$ . On observe que la classe  $(a_0 : \dots : a_n)$  pour l'homothétie par  $A^\times$  ne dépend pas du choix du générateur. Enfin, le fait que  $\psi$  soit surjectif signifie qu'au moins un des  $a_i$  est inversible, donc les points de  $\mathbb{P}_S^n$  à valeurs dans  $A$  sont en bijection avec les « coordonnées homogènes » usuelles  $(a_0 : \dots : a_n)$ , qui sont des uplets avec au moins un  $a_i$  inversible à homothétie près.

**4.6.9 Exercice.** (devrait figurer dans 4.1) Démontrez les faits suivants. Soient  $X$  un schéma et  $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}$  des  $\mathcal{O}_X$ -modules.

(1) (Adjonction  $(\otimes, \mathcal{H}om)$ ) Il existe un isomorphisme canonique

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}, \mathcal{H}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{G}, \mathcal{H})).$$

(2) (Dual et  $\mathcal{H}om$ ) Il existe un morphisme canonique  $\mathcal{F}^\vee \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$  qui est un isomorphisme si  $\mathcal{F}$  est localement libre de rang fini.

(3) Il existe un morphisme canonique  $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{H})$  qui est un isomorphisme si  $\mathcal{F}$  ou  $\mathcal{H}$  est localement libre de rang fini.

Soient  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme de schémas,  $\mathcal{F}$  un  $\mathcal{O}_X$ -module et  $\mathcal{G}, \mathcal{H}$  des  $\mathcal{O}_Y$ -modules.

(4) (Formule de projection) Il existe un morphisme canonique  $f_* \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{G} \rightarrow f_*(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} f^* \mathcal{G})$ . Si  $\mathcal{G}$  est localement libre, ce morphisme est un isomorphisme.

(5) ( $f^*$  et  $\mathcal{H}om$ ) Il existe un morphisme canonique  $f^* \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{G}, \mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(f^* \mathcal{G}, f^* \mathcal{H})$  qui est un isomorphisme si  $\mathcal{G}$  est localement libre de rang fini.

(6) ( $f^*$  et dual, cas particulier de (5) où  $\mathcal{H} = \mathcal{O}_Y$ .) Il existe un morphisme canonique  $f^*(\mathcal{G}^\vee) \rightarrow (f^* \mathcal{G})^\vee$  qui est un isomorphisme si  $\mathcal{G}$  est localement libre de rang fini.

## 5 Morphismes

Dans cette section, nous définissons quelques grandes classes de morphismes de schémas reliées principalement à des propriétés de séparation, finitude et compacité. Pour des raisons de temps et de place, nous ne développerons pas l'étude des propriétés de régularité (platitude, lissité, non ramification, caractère étale). Avant de commencer, faisons deux remarques générales.

La première remarque concerne le lien avec le point de vue relatif, mis en avant par Grothendieck et aperçu lors de l'étude des produits fibrés et des exemples de schémas arithmétiques comme la famille de coniques 3.5.3. Son principe est de mettre l'accent sur les objets sur une base  $S$ , c'est-à-dire les morphismes  $X \rightarrow S$ , plutôt que sur les schémas individuels. La logique et le développement harmonieux de ce point de vue nécessitent de développer des analogues relatifs de certaines notions absolues des schémas (comme le caractère affine, la quasi-compacité...). Une règle simple sera vérifiée : un schéma  $X$  possèdera une propriété « absolue » si et seulement si le morphisme  $X \rightarrow \text{Spec}(\mathbb{Z})$  possède la propriété « relative » correspondante.

La seconde remarque concerne les qualités de stabilité, ou de permanence, des différentes propriétés des morphismes. Nous donnons quatre exemples. Soit  $P$  une propriété que peut avoir ou non un morphisme de schémas.

- On dit que  $P$  est *stable par composition* si pour tout couple de morphismes  $f : X \rightarrow Y$  et  $g : Y \rightarrow S$  qui possèdent  $P$ , la composée  $g \circ f : X \rightarrow S$  possède  $P$ .
- On dit que  $P$  est *stable par changement de base* si pour tout morphisme  $f : X \rightarrow S$  qui possède  $P$ , pour tout changement de base  $S' \rightarrow S$ , le morphisme  $f' : X' \rightarrow S'$  possède  $P$  (ici  $X' := X \times_S S'$  et  $f'$  est la projection).
- On dit que  $P$  est *stable par localisation à la source* si pour tout morphisme  $f : X \rightarrow S$  qui possède  $P$ , et tout ouvert  $X_i \subset X$ , le morphisme  $f|_{X_i} : X_i \rightarrow S$  possède  $P$ . On dit que  $P$  est *locale à la source* si pour tout morphisme  $f : X \rightarrow S$ , et pour tout recouvrement ouvert  $\{X_i\}$  de  $X$ , le morphisme  $f$  possède  $P$  si et seulement si chaque restriction  $f|_{X_i} : X_i \rightarrow S$  possède  $P$ .
- On dit que  $P$  est *stable par localisation au but* si pour tout morphisme  $f : X \rightarrow S$  qui possède  $P$ , et tout ouvert  $S_i \subset S$ , le morphisme  $f|_{f^{-1}(S_i)} : f^{-1}(S_i) \rightarrow S_i$  possède  $P$ . On dit que  $P$  est *locale au but* si pour tout morphisme  $f : X \rightarrow S$ , et pour tout recouvrement ouvert  $\{S_i\}$  de  $S$ , le morphisme  $f$  possède  $P$  si et seulement si chaque restriction  $f|_{f^{-1}(S_i)} : f^{-1}(S_i) \rightarrow S_i$  possède  $P$ .

Pour chacune des propriétés introduites dans cette section, on peut se poser la question de savoir si elle est stable par composition, changement de base, localisation à la source ou au but. Nous donnerons parfois un énoncé explicite, et parfois un énoncé sous forme d'exercice. Parfois aussi nous omettrons de poser la question, et la lectrice pourra se la poser pour elle-même.

### 5.1 Morphismes séparés

On peut consulter la page [https://fr.wikipedia.org/wiki/Axiome\\_de\\_séparation\\_\(topologie\)](https://fr.wikipedia.org/wiki/Axiome_de_séparation_(topologie)) pour un rappel sur les différents axiomes de séparation. Rappelons quelques propriétés d'un espace topologique séparé (*Hausdorff space* en anglais). Elles sont toutes équivalentes et peuvent servir de définition de la notion de séparation :

- (i) pour tous points distincts  $x, y \in X$  il existe des voisinages ouverts disjoints  $U \ni x$  et  $V \ni y$ ,

- (ii) la diagonale  $\Delta_X$  est fermée dans  $X \times X$ ,
- (iii) pour tout espace topologique  $Y$  et toute application continue  $f : Y \rightarrow X$ , le graphe  $\Gamma_f = \{(y, f(y)); y \in Y\}$  est fermé dans  $X \times Y$ ,
- (iv) pour tout espace topologique  $Y$  et toute paire d'applications continues  $f, g : Y \rightarrow X$ , l'égalisateur  $\text{egal}(f, g) = \{y \in Y; f(y) = g(y)\}$  est fermé dans  $Y$ .

La propriété (i) est la plus familière; c'est l'axiome  $T_2$ . La démonstration du fait qu'elle est équivalente aux trois autres utilise le fait que la topologie sur  $X \times X$  est la topologie produit, avec pour base d'ouverts les produits  $U \times V$  d'ouverts de  $X$ . Ceci n'a pas lieu dans le monde des variétés algébriques ou des schémas (dans le plan  $\mathbb{A}_k^2$ , l'ouvert complémentaire d'une courbe qui n'est ni horizontale ni verticale ne contient aucun ouvert produit non trivial). En conséquence, la caractérisation (i) de la séparation est pratiquement inutile pour les schémas. En revanche les autres caractérisations sont pertinentes; nous utiliserons (ii).

**5.1.1 Lemme.** *Soit  $f : X \rightarrow S$  un morphisme de schémas et  $\Delta_{X/S} : X \rightarrow X \times_S X$  la diagonale. Alors  $\Delta_{X/S}$  est :*

- (1) une immersion;
- (2) une immersion fermée si  $X$  et  $S$  sont affines.

**Démonstration :** Démontrons d'abord (2). Si  $X = \text{Spec}(A)$  et  $S = \text{Spec}(R)$ , la diagonale est déterminée par le morphisme d'anneaux  $A \otimes_R A \rightarrow A$  qui envoie  $a \otimes 1$  sur  $a$  et  $1 \otimes a'$  sur  $a'$ . C'est le morphisme de multiplication, qui est surjectif. Passons à (1). Soit  $x \in X$ . Soit  $U$  un voisinage ouvert affine de  $f(x)$  et  $V$  un voisinage ouvert affine de  $x$  inclus dans  $f^{-1}(U)$ . Clairement l'image de la diagonale est incluse dans les ouverts de la forme  $V \times_U V$ . De plus  $\Delta_{X/S|V} : V \rightarrow V \times_U V$  est une immersion fermée d'après le cas (2). Ceci conclut.  $\square$

**5.1.2 Définition.** On dit qu'un morphisme de schémas  $f : X \rightarrow S$  est *séparé* si la diagonale relative  $\Delta_{X/S} : X \rightarrow X \times_S X$  est une immersion fermée. On dit aussi que  $X$  est un  $S$ -schéma séparé.

**5.1.3 Proposition.** *Les morphismes séparés sont stables par composition, changement de base, et localisation au but.*

**Démonstration :** Exercice.  $\square$

**5.1.4 Exercice.** (Devrait figurer dans la section sur les immersions) (1) Dans un espace topologique  $X$ , soit  $Z$  une partie localement fermée i.e. une partie qui est intersection d'un ouvert et d'un fermé. On considère l'ensemble  $\mathcal{E}$  des paires composées d'un fermé  $F$  et d'un ouvert  $U$  tels que  $Z = F \cap U$ .

- (i) Montrez que l'adhérence  $F_{\min} = \overline{Z}$  est le plus petit fermé  $F$  qui appartient à une paire  $(F, U) \in \mathcal{E}$ .
- (ii) Montrez que la frontière  $\partial Z = \overline{Z} \setminus Z$  est fermée dans  $X$  et que  $U_{\max} = X \setminus \partial Z$  est le plus grand ouvert  $U$  qui appartient à une paire  $(F, U) \in \mathcal{E}$ .
- (iii) Montrez que pour tout  $(F, U) \in \mathcal{E}$  on a  $Z = F \cap U = F_{\min} \cap U = F \cap U_{\max}$ . En particulier  $(F_{\min}, U_{\max})$  appartient à  $\mathcal{E}$ .

(2) Soit  $Z \hookrightarrow X$  un sous-schéma et  $f : Z \rightarrow X$  le morphisme d'immersion. Soit  $\partial Z = \overline{Z} \setminus Z$  et  $U = X \setminus \partial Z$ . Montrez que  $Z$  est un sous-schéma fermé de  $U$ . Montrez que les conditions suivantes sont équivalentes : (i)  $f$  est une immersion fermée, (ii)  $U = X$ , (iii)  $|Z|$  est fermé dans  $|X|$ .

## Introduction à la Géométrie Algébrique. Le langage des schémas

Cours du 17 novembre 2015

**5.1.5 Proposition.** *Soit  $X$  un  $S$ -schéma séparé.*

- (1) *Pour tout morphisme de  $S$ -schémas  $f : Y \rightarrow X$ , le morphisme graphe  $\Gamma_f := (\text{id}, f) : Y \rightarrow Y \times_S X$  est une immersion fermée.*
- (2) *Pour toute paire de  $S$ -morphisms  $f, g : Y \rightarrow X$ , l'égalisateur  $\text{egal}(f, g) = Y \times_{(f,g), X \times_S X, \Delta} X$  est un sous-schéma fermé de  $Y$ .*
- (3) *Pour toute paire de  $S$ -morphisms  $f, g : Y \rightarrow X$  qui coïncident sur un ouvert schématiquement dense  $U \subset Y$ , on a  $f = g$ .*

**Démonstration :** (1) Le graphe  $\Gamma_f : Y \rightarrow Y \times_S X$  s'obtient à partir de la diagonale  $\Delta_{X/S} : X \rightarrow X \times_S X$  par changement de base par le morphisme  $(f \times \text{id}) : Y \times_S X \rightarrow X \times_S X$ . Le résultat découle donc du fait que les immersions fermées sont stables par changement de base.

(2) Par définition  $\text{egal}(f, g)$  s'obtient par un changement de base de la diagonale.

(3) Soit  $i$  l'immersion fermée de  $Z = \text{egal}(f, g)$  dans  $Y$ . Soit  $j : U \hookrightarrow Y$  l'immersion ouverte. Par hypothèse  $j$  se factorise par un morphisme  $k : U \rightarrow Z$  (qui est nécessairement une immersion), i.e.  $j = ik$ . Comme  $U$  est schématiquement dense (définition 3.4.7), le morphisme composé

$$\mathcal{O}_Y \xrightarrow{i^\#} i_* \mathcal{O}_Z \xrightarrow{i_* k^\#} j_* \mathcal{O}_U = i_* k_* \mathcal{O}_U$$

est injectif. On en déduit que  $\mathcal{O}_Y \rightarrow i_* \mathcal{O}_Z$  est injectif, et comme il est surjectif c'est un isomorphisme de faisceaux. Donc  $Z \simeq Y$ , ce qui montre que  $f = g$ .  $\square$

**5.1.6 Exercice.** Soit  $X$  la droite affine avec origine dédoublée, sur un corps de base  $k$  (voir 2.1.9). Montrez que  $X$  n'est pas séparé sur  $k$ . Donnez un exemple de deux morphismes de  $k$ -schémas  $f, g : Y \rightarrow X$  qui sont distincts mais coïncident sur un ouvert schématiquement dense de  $Y$ .

## 5.2 Morphismes affines et quasi-compacts

**5.2.1 Définition.** On dit qu'un morphisme de schémas  $f : X \rightarrow S$  est *affine* si la préimage de tout ouvert affine de  $S$  est un ouvert affine de  $X$ .

**5.2.2 Proposition.** *Les morphismes affines sont stables par composition, changement de base, et localisation au but.*

**Démonstration :** Exercice.  $\square$

Une immersion fermée est affine. Tout sous-schéma fermé de  $\mathbb{A}_S^n$  est affine sur  $S$ .

**5.2.3 Exercice.** Montrez que  $f : X \rightarrow S$  est affine si et seulement s'il existe un recouvrement de  $S$  par des ouverts affines  $S_i$  tels que  $f^{-1}(S_i)$  est affine pour tout  $i$ .

**5.2.4 Exercice.** Donnez un exemple d'immersion ouverte qui n'est pas affine.

On peut maintenant généraliser au cadre relatif l'équivalence de catégories entre anneaux et schémas affines.

**5.2.5 Proposition.** Si  $f : X \rightarrow S$  est un  $S$ -schéma affine, la  $\mathcal{O}_S$ -algèbre  $\mathcal{A}(X) = f_*\mathcal{O}_X$  est quasi-cohérente. Si  $\mathcal{A}$  est une  $\mathcal{O}_S$ -algèbre quasi-cohérente, le  $S$ -schéma  $\text{Spec}(\mathcal{A})$  est affine. Les foncteurs :

$$\{\mathcal{O}_S\text{-algèbres quasi-cohérentes}\} \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{Spec}} \\ \xleftarrow{\mathcal{A}} \end{array} \{S\text{-schémas affines}\}$$

sont des équivalences de catégories quasi-inverses l'une de l'autre.

**Démonstration :** Soit  $f : X \rightarrow S$  un  $S$ -schéma affine. Il suffit de vérifier que  $\mathcal{A}(X)$  est quasi-cohérente sur un recouvrement de  $S$  par des ouverts affines  $S_i = \text{Spec}(R_i)$ , d'après 4.2.5. Notons  $X_i = f^{-1}(S_i)$  qui est un schéma affine, et  $f_i : X_i \rightarrow S_i$  la restriction de  $f$ . Par définition de  $f_*\mathcal{O}_X$  on voit que  $\mathcal{A}(X)|_{S_i} = f_{i,*}\mathcal{O}_{X_i}$ , qui est une algèbre quasi-cohérente d'après l'exercice 4.2.7. Soit  $\mathcal{A}$  une  $\mathcal{O}_S$ -algèbre quasi-cohérente et  $f : X = \text{Spec}(\mathcal{A}) \rightarrow S$ . Alors, par construction du spectre d'une  $\mathcal{O}_S$ -algèbre, pour tout ouvert affine  $U \subset S$  on a  $f^{-1}(U) = \text{Spec}(\mathcal{A}(U))$  qui est un schéma affine. Le fait que les deux foncteurs sont des équivalences quasi-inverses est laissé au lecteur.  $\square$

**5.2.6 Définition.** Soit  $f : X \rightarrow S$  un morphisme de schémas. On dit que  $f$  est *quasi-compact* si la préimage de tout ouvert quasi-compact de  $S$  est un ouvert quasi-compact de  $X$ .

**5.2.7 Proposition.** Les morphismes quasi-compacts sont stables par composition, changement de base, et localisation au but.

**Démonstration :** Exercice.  $\square$

**5.2.8 Exercice.** Montrez que  $f : X \rightarrow S$  est quasi-compact si et seulement s'il existe un recouvrement de  $S$  par des ouverts affines  $S_j$  tels que  $f^{-1}(S_j)$  est quasi-compact pour tout  $j$ .

Nous terminons par un résultat sur l'image des morphismes quasi-compacts, qui nous sera utile dans l'étude des morphismes propres.

**5.2.9 Proposition.** Soit  $f : X \rightarrow S$  un morphisme quasi-compact. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :

- (1)  $f(X)$  est fermé,
- (2)  $f(X)$  est stable par spécialisation.

**Démonstration :** On sait que (1)  $\Rightarrow$  (2), montrons que (2)  $\Rightarrow$  (1). Il suffit de montrer que  $f(X) \cap U$  est fermé dans  $U$ , pour tout ouvert affine  $U$  de  $S$ . Comme  $f(X) \cap U$  est stable par les spécialisations dans  $U$ , quitte à changer  $S$  en  $U$  on s'est ramené au cas où  $S$  est affine. Comme  $f$  est quasi-compact, le schéma  $X$  est alors recouvert par un nombre fini d'ouverts affines  $X_i = \text{Spec}(A_i)$ . L'image de  $f$  est égale à l'image de la composée  $X_1 \amalg \cdots \amalg X_n \rightarrow X \rightarrow S$ . Comme  $X_1 \amalg \cdots \amalg X_n$  est le schéma affine spectre de  $A_1 \times \cdots \times A_n$ , on s'est ramené au cas où  $X$  est affine.

Supposons donc que  $S = \text{Spec}(R)$  et  $X = \text{Spec}(A)$ . Soit  $s = [p]$  un point dans l'adhérence de  $T := f(X)$ , c'est-à-dire que  $D(g) \cap T \neq \emptyset$  pour tout  $g \in R$ ,  $g \notin p$ . Comme  $D(g) \cap T$  est l'image de la restriction de  $f$  à  $X_g = D(g1_A) = \text{Spec}(A_g)$ , on déduit que  $A_g$  est non nul, ou encore que  $1 \neq 0$  dans  $A_g$ . Soit  $A_p$  le localisé de  $A$  par rapport à la partie multiplicative  $R \setminus p$ . On a  $A_p = \varinjlim_{g \notin p} A_g$ . On a encore  $1 \neq 0$  dans  $A_p$ , donc cet anneau est non nul. L'image de n'importe quel point de  $\text{Spec}(A_p)$  par le composé  $\text{Spec}(A_p) \rightarrow \text{Spec}(A) \rightarrow \text{Spec}(R)$  est un idéal premier  $p'$  inclus dans  $p$ . Donc  $s = [p]$  est spécialisation de  $s' = [p'] \in T$ . Comme  $T$  est stable par spécialisation, on conclut que  $s \in T$ .  $\square$

### 5.3 Morphismes de type fini, finis et quasi-finis

**5.3.1 Définition.** Soit  $f : X \rightarrow S$  un morphisme de schémas. On dit que  $f$  est *localement de type fini* si pour tout ouvert affine  $U = \text{Spec}(R)$  de  $S$  et pour tout ouvert affine  $V = \text{Spec}(A)$  de  $f^{-1}(U)$ , le morphisme  $R \rightarrow A$  fait de  $A$  une  $R$ -algèbre de type fini. On dit que  $f$  est *de type fini* s'il est quasi-compact et localement de type fini.

**5.3.2 Proposition.** *Les morphismes localement de type fini sont stables par composition, changement de base, localisation à la source et localisation au but. Les morphismes de type fini sont stables par composition, changement de base, et localisation au but.*

**Démonstration :** Exercice.  $\square$

**5.3.3 Exercice.** Montrez que  $f : X \rightarrow S$  est localement de type fini si et seulement s'il existe un recouvrement de  $S$  par des ouverts affines  $S_j = \text{Spec}(R_j)$  et un recouvrement de  $X$  par des ouverts affines  $X_{i,j} = \text{Spec}(A_{i,j})$  tels que  $f(X_{i,j}) \subset S_j$  et que  $A_{i,j}$  est une  $R_j$ -algèbre de type fini.

**5.3.4 Définition.** On dit qu'un morphisme de schémas  $f : X \rightarrow S$  est *fini* si pour tout ouvert affine  $U = \text{Spec}(R)$  de  $S$ , la préimage  $V = f^{-1}(U)$  est un ouvert affine  $V = \text{Spec}(A)$  et le morphisme  $R \rightarrow A$  fait de  $A$  un  $R$ -module de type fini.

On notera bien que l'on demande que  $A$  soit  $R$ -module de type fini (on dit souvent simplement  $R$ -module *fini*), et non pas  $R$ -algèbre de type fini. On dit souvent que  $A$  est une  $R$ -algèbre *finie*.

**5.3.5 Définition.** On dit que  $f$  est *quasi-fini* s'il est de type fini et à fibres finies (ensemblément).

**5.3.6 Proposition.** *Les morphismes finis, resp. quasi-finis, sont stables par composition, changement de base, et localisation au but.*

**Démonstration :** Exercice.  $\square$

**5.3.7 Exercice.** Montrez qu'une immersion ouverte est localement de type fini. Donnez un exemple d'immersion ouverte qui n'est pas quasi-compacte. Montrez qu'une immersion fermée est de type fini et même quasi-finie.

**5.3.8 Proposition.** *Tout morphisme fini est affine et quasi-finie.*

**Démonstration :** Un morphisme fini  $f : X \rightarrow S$  est affine par définition. Comme une  $R$ -algèbre finie est clairement de type fini comme algèbre, on voit que  $f$  est aussi de type fini. Pour voir qu'il est quasi-finie, on se ramène au cas affine et il suffit de montrer que pour toute  $R$ -algèbre finie  $A$ , et pour tout corps résiduel  $R \rightarrow \kappa$ , le schéma  $\text{Spec}(A \otimes_R \kappa)$  est ensemblistement fini. Soient  $x_1, \dots, x_r$  des générateurs de  $A$  comme  $R$ -module. Leurs images dans  $A \otimes_R \kappa$  l'engendrent comme  $\kappa$ -espace vectoriel. En particulier  $A \otimes_R \kappa$  est un anneau artinien, produit direct d'un nombre fini d'anneaux locaux artiniens dont le spectre est un point. Ceci conclut.  $\square$

**5.3.9 Remarque.** Nous avons mentionné plus haut le fait que, sur des schémas de base qui ne sont pas (localement) noethériens, le bon analogue de la notion de  $\mathcal{O}_X$ -module de type fini est celle de module cohérent. Cette dernière incorpore une idée de finitude non seulement pour les générateurs, mais aussi pour les relations, et grâce à ceci elle se comporte mieux dans le cadre non noethérien. Pour les mêmes raisons, sur des schémas non (localement) noethériens, il existe des analogues des notions de morphismes localement de type fini et de type fini, qui sont les morphismes localement de présentation finie, et de présentation finie. Dans ce cours nous n'introduisons pas ces notions, dont nous ne ferons pas usage.

## 5.4 Morphismes propres

La notion relative de compacité en topologie est celle d'application *propre*, ce qui désigne (au moins dans le cadre des espaces séparés localement compacts) une application continue telle que la préimage de tout compact est un compact. De même que pour la notion de séparation, la notion de compacité ne peut pas être transposée trop naïvement en géométrie algébrique. Par exemple, la définition « séparé et quasi-compact » ne suffit pas car l'espace affine  $\mathbb{A}_k^n$  sur un corps vérifie ces conditions sans posséder aucune des propriétés de finitude que l'on attend des objets compacts.

En fait, la bonne notion topologique de propriété est celle d'application continue universellement fermée (sans hypothèse localement compacte), comme on peut le lire dans Bourbaki, *Topologie Générale*, chap. I, § 10, no 3, prop. 7. On s'inspire de cette définition pour obtenir une notion de propriété fructueuse en géométrie algébrique.

**5.4.1 Définition.** On dit qu'un morphisme de schémas  $f : X \rightarrow S$  est *universellement fermé* si pour tout  $S' \rightarrow S$ , le morphisme  $f' : X' = X \times_S S' \rightarrow S'$  obtenu après changement de base est fermé. On dit qu'un morphisme de schémas  $f : X \rightarrow S$  est *propre* s'il est séparé, de type fini, et universellement fermé.

**5.4.2 Proposition.** *Les morphismes universellement fermés, resp. propres, sont stables par composition, changement de base, et localisation au but.*

**Démonstration :** Exercice. □

Voici un exemple relativement facile de morphisme propre.

**5.4.3 Théorème.** *Tout morphisme fini est propre.*

**Démonstration :** Il s'agit d'une formulation géométrique du théorème suivant de Cohen et Seidenberg (voir [Ei], prop. 4.15) : *pour toute extension entière d'anneaux  $R \rightarrow A$ , tout premier  $p \subset R$  et tout idéal  $I \subset A$  tel que  $I \cap R \subset p$ , il existe un premier  $q \subset A$  tel que  $q \cap R = p$ .* On rappelle qu'un morphisme d'anneaux  $R \rightarrow A$  est *entier* si tout élément  $x \in S$  est racine d'un polynôme unitaire non nul à coefficients dans  $R$ . D'après le théorème de Cayley-Hamilton ([Ei], th. 4.3), toute  $R$ -algèbre finie est entière et nous pourrions donc appliquer le théorème de Cohen-Seidenberg. Passons à la preuve du théorème. Soient  $f : X \rightarrow S$  un morphisme fini,  $Y \subset X$  un fermé, et  $T = f(Y)$  son image ensembliste. Pour montrer que  $T$  est fermé, il suffit de le faire localement sur  $S$ . On peut donc remplacer  $S$  par un ouvert affine  $U = \text{Spec}(R)$  et  $X$  par la préimage, qui est un ouvert affine  $f^{-1}(U) = \text{Spec}(A)$  puisque  $f$  est affine. Alors  $Y = V(I)$  pour un certain idéal  $I$ . Montrons que  $f(Y) = V(I \cap R)$ . Il s'agit de démontrer l'énoncé algébrique suivant : les premiers  $p \subset R$  tels que  $p = q \cap R$  pour un certain premier  $q \subset A$  contenant  $I$  sont exactement les premiers contenant  $I \cap R$ . L'inclusion directe est immédiate et l'inclusion réciproque est le théorème de Cohen-Seidenberg. Nous obtenons ainsi que  $f$  est fermé. De plus, le morphisme  $f' : X' \rightarrow S'$  déduit de  $f$  par un changement de base  $S' \rightarrow S$  est encore fini, donc fermé d'après ce qui précède. Ainsi  $f$  est universellement fermé. (Et la preuve montre d'ailleurs que le résultat est vrai aussi pour les morphismes *entiers*, i.e. les  $f : X \rightarrow S$  tels que pour tout ouvert affine  $U = \text{Spec}(R)$  de  $S$ , la préimage  $V = f^{-1}(U)$  est un ouvert affine  $V = \text{Spec}(A)$  et le morphisme  $R \rightarrow A$  fait de  $A$  une  $R$ -algèbre entière.) □

## 5.5 Critères valuatifs

**5.5.1 Préliminaires sur les anneaux de valuation.** On trouvera dans [Mat], §§ 10-11 les faits suivants. Rappelons d'abord qu'un *anneau de valuation* est un anneau intègre  $A$  tel que pour tout élément non nul  $x$  du corps de fractions  $K$ , on a  $x \in A$  ou  $x^{-1} \in A$ . Dans un anneau de valuation, l'ensemble des idéaux est totalement ordonné par inclusion. En particulier, un anneau de valuation est un anneau local. Un *anneau de valuation discrète* est un anneau de valuation dont l'idéal maximal est principal. Dans un tel anneau, on appelle *uniformisante* un générateur de l'idéal maximal, c'est-à-dire un élément premier de  $A$ . D'après [Mat], th. 11.2, les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $A$  est un anneau de valuation discrète,
- (ii)  $A$  est un anneau local principal qui n'est pas un corps,
- (iii)  $A$  est un anneau local noethérien de dimension  $> 0$  et son idéal maximal est principal,
- (iv)  $A$  est un anneau local noethérien de dimension 1 normal.

Les anneaux  $k[X]_{(X)}$ ,  $k[[X]]$  avec  $k$  un corps,  $\mathbb{Z}_{(p)}$ ,  $\mathbb{Z}_p$  sont des exemples. Si  $A \subset B$  est une inclusion d'anneaux locaux, on dit que  $B$  *domine*  $A$  si et seulement si  $m_B \cap A = m_A$ . Il est équivalent de dire que  $m_A B \subset m_B$ , on encore que l'inclusion  $A \hookrightarrow B$  est un morphisme d'anneaux locaux, ou encore que le morphisme  $\text{Spec}(B) \rightarrow \text{Spec}(A)$  envoie le point fermé sur le point fermé.

**5.5.2 Lemme.** Soit  $A_0$  un anneau local intègre noethérien de corps de fractions  $K_0$ . Soit  $K/K_0$  une extension de corps de type fini. Alors, il existe un anneau de valuation discrète  $A$  de corps de fractions  $K$  et qui domine  $A_0$ .

**Démonstration :** Voir [GW], lemma 15.6. □

**5.5.3 Lemme.** Soit  $A$  un anneau de valuation de corps de fractions  $K$ . Soit  $A \subset B \subsetneq K$  un sous-anneau strict de  $K$ , local, qui domine  $A$ . Alors  $B = A$ .

**Démonstration :** Soit  $x \in B$  un élément non nul. Comme  $K = \text{Frac}(A)$ , on peut écrire  $x = r/s$  avec  $r, s \in A$ . Comme l'ensemble des idéaux de  $A$  est totalement ordonné, on a soit  $rA \subset sA$ , soit  $sA \subset rA$ . Dans le premier cas, il existe  $t \in A$  tel que  $r = st$ . Alors  $x = r/s = t \in A$ . Dans le second cas, il existe  $t \in A$  tel que  $s = rt$ . Alors  $t \notin m_A$  car sinon  $1 = rt/s = tx \in m_A B \subset m_B$ , ce qui est impossible. Comme  $A$  est un anneau de valuation, on déduit que  $t \in A^\times$  donc  $x = 1/t \in A$ . □

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer et démontrer les critères valuatifs de séparation et de propreté. Nous donnons une version valable sur un schéma de base noethérien pour nous limiter à la manipulation d'anneaux de valuation *discrète*, mais en utilisant des versions non noethériennes de 5.5.2 et 5.5.3 avec des anneaux de valuation généraux, on démontrerait sans beaucoup plus de mal les critères sur une base  $S$  quelconque.

**5.5.4 Théorème (critère valuatif de séparation)** Soit  $S$  un schéma noethérien, et soit  $f : X \rightarrow S$  un morphisme de schémas de type fini. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :

- (1)  $f$  est séparé,
- (2) pour tout anneau de valuation discrète  $A$  de corps de fractions  $K$  et tout carré commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Spec}(K) & \longrightarrow & X \\
 \downarrow & \dashrightarrow & \downarrow f \\
 \text{Spec}(A) & \longrightarrow & S,
 \end{array}$$

il existe au plus un morphisme  $\text{Spec}(A) \rightarrow X$  qui rend tout le diagramme commutatif.

Le morphisme  $\text{Spec}(K) \rightarrow \text{Spec}(A)$  du diagramme est bien sûr celui induit par l'inclusion  $A \subset K$ .

## Introduction à la Géométrie Algébrique. Le langage des schémas

Cours du 24 novembre 2015

Avant de passer à la démonstration, rappelons que dans un schéma intègre  $X$ , de point générique  $\eta$ , l'anneau local  $K := \mathcal{O}_{X,\eta} = \kappa(\eta)$  est un corps. Tous les anneaux de fonctions  $\mathcal{O}_X(U)$  d'ouverts non vides, et tous les anneaux locaux  $\mathcal{O}_{X,x}$ , sont intègres et de corps de fractions  $K$ . On appelle  $K$  le *corps de fonctions méromorphes* de  $X$ .

**Démonstration :** (1)  $\Rightarrow$  (2). Soit  $\pi$  une uniformisante de  $A$ , alors  $K = A[1/\pi]$  donc  $\text{Spec}(K) \subset \text{Spec}(A)$  s'identifie à l'ouvert  $D(\pi)$ , qui est schématiquement dense. Si  $f : X \rightarrow S$  est séparé, il découle donc de la proposition 5.1.5 que deux  $S$ -morphisms  $u, v : \text{Spec}(A) \rightarrow X$  qui coïncident sur  $\text{Spec}(K)$  sont égaux.

(2)  $\Rightarrow$  (1). Il suffit de montrer que la diagonale  $\Delta : X \rightarrow X \times_S X$  est une immersion fermée. Pour cela il suffit de montrer que l'image de  $\Delta$  est fermée, cf exercice 5.1.4. Comme  $S$  est noethérien et  $f$  de type fini, alors  $X$  ainsi que  $X \times_S X$  sont noethériens. Il en découle que  $\Delta$  est quasi-compact, donc il suffit de montrer que  $\Delta(X)$  est stable par spécialisation, d'après 5.2.9. Soit  $t \in \Delta(X)$  un point, et  $t \rightsquigarrow s$  une spécialisation. Soit  $Z$  le sous-schéma fermé réduit de support l'adhérence du point  $t$ , cf 2.5.4. C'est un schéma intègre, dont tous les anneaux locaux des points partagent le même corps de fractions, égal au corps résiduel  $K = \kappa(t)$  de  $t$ . En particulier, on a l'inclusion  $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{Z,s} \subset K$ . Dans cette situation, le lemme 5.5.2 affirme qu'il existe un anneau de valuation discrète  $A \subset K$  qui domine  $\mathcal{O}$ , i.e.  $\mathcal{O} \subset A$  et  $m_A \cap \mathcal{O} = m_{\mathcal{O}}$ . Ceci signifie que le morphisme

$$g : \text{Spec}(A) \rightarrow \text{Spec}(\mathcal{O}) \rightarrow Z \rightarrow X \times_S X$$

envoie le point générique sur  $t$  et le point fermé sur  $s$ . Notons  $p_1, p_2 : X \times_S X \rightarrow X$  les deux projections et  $u_i = p_i \circ g$  pour  $i = 1, 2$ . Comme  $t \in \Delta(X)$ , les deux morphismes  $u_1, u_2$  sont égaux en restriction à l'ouvert  $\text{Spec}(K) \subset \text{Spec}(A)$ . D'après la condition (2), ces morphismes sont égaux, ce qui signifie que  $g$  se factorise par la diagonale de  $X$  et  $s \in \Delta(X)$ .  $\square$

**5.5.5 Théorème (critère valuatif de propreté)** Soit  $S$  un schéma noethérien, et soit  $f : X \rightarrow S$  un morphisme de schémas séparé et de type fini. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :

- (1)  $f$  est propre,
- (2) pour tout anneau de valuation discrète  $A$  de corps de fractions  $K$  et tout carré commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Spec}(K) & \longrightarrow & X \\
 \downarrow & \nearrow \exists! & \downarrow f \\
 \text{Spec}(A) & \longrightarrow & S
 \end{array}$$

il existe un unique morphisme  $\text{Spec}(A) \rightarrow X$  qui rend tout le diagramme commutatif.

**Démonstration :** (1)  $\Rightarrow$  (2). Pour tout carré commutatif comme dans (2), on notera  $X_A = X \times_S \text{Spec}(A)$ . On dispose d'un diagramme :

$$\begin{array}{ccccc} \text{Spec}(K) & \longrightarrow & X_A & \longrightarrow & X \\ & \searrow & \downarrow f_A & & \downarrow f \\ & & \text{Spec}(A) & \longrightarrow & S. \end{array}$$

On voit qu'il suffit de trouver une section  $\text{Spec}(A) \rightarrow X_A$  du morphisme  $f_A$ , car la composition avec  $X_A \rightarrow X$  fournira la flèche pointillée recherchée. En d'autres termes, quitte à remplacer  $X$  par  $X_A$  on peut supposer que  $S = \text{Spec}(A)$  ce que nous faisons désormais. Soit  $x$  le point image de  $\text{Spec}(K) \rightarrow X$ . Le point  $\eta = f(x)$  est le point générique de  $\text{Spec}(A)$ , on a donc les inclusions  $K = \kappa(\eta) \hookrightarrow \kappa(x) \hookrightarrow K$  ce qui montre que  $\kappa(x) = K$ . Soit  $Z$  l'adhérence de  $x$  dans  $X$ , muni de la structure de sous-schéma fermé réduit. C'est un schéma intègre, de corps de fractions (le corps de fractions commun à tous les ouverts affines non vides de  $Z$ ) égal à  $K$ . Comme  $f$  est universellement fermé, l'image de  $Z$  dans  $S = \text{Spec}(A)$  est un fermé donc égal à  $S$  entier. Ceci implique qu'il existe  $z \in Z$  dont l'image par  $f$  est égale au point fermé  $s \in S$ . On a une inclusion de sous-anneaux locaux  $A = \mathcal{O}_{S,s} \hookrightarrow \mathcal{O}_{Z,z}$  de  $K$ . Comme  $A$  est un anneau de valuation, il est maximal pour la relation de domination (lemme 5.5.3) donc  $A = \mathcal{O}_{Z,z}$ . Ceci fournit la section recherchée  $\text{Spec}(A) = \text{Spec}(\mathcal{O}_{Z,z}) \rightarrow Z \hookrightarrow X$ .

(2)  $\Rightarrow$  (1). On doit montrer que  $f$  est universellement fermé. Soit  $S'/S$  un morphisme de changement de base et  $X' = X \times_S S'$ . Considérons un diagramme de la forme :

$$\begin{array}{ccccc} \text{Spec}(K) & \longrightarrow & X' & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow f' & & \downarrow f \\ \text{Spec}(A) & \longrightarrow & S' & \longrightarrow & S. \end{array}$$

Par propriété universelle du produit fibré qui définit  $X'$ , le morphisme  $\text{Spec}(A) \rightarrow X$  dont la condition (2) affirme l'existence se relève en un morphisme  $\text{Spec}(A) \rightarrow X'$ . Ceci démontre que  $X' \rightarrow S'$  vérifie encore la condition (2). En conséquence, quitte à changer  $S$  en  $S'$  et  $X$  en  $X' = X \times_S S'$ , pour montrer que  $f' : X' \rightarrow S'$  est fermé on peut supposer que  $S' = S$ . Soit  $Z \subset X$  un fermé, vu comme sous-schéma fermé muni de la structure réduite. Soit  $W \subset S$  son image par  $f$ . D'après la proposition 5.2.9, il suffit de montrer que  $W$  est stable par spécialisation. Notons  $w = f(z)$  un point de  $W$  et soit  $w \rightsquigarrow w'$  une spécialisation dans  $S$ ; on doit montrer que  $w' \in W$ . C'est une question topologique; on peut remplacer  $Z$  (resp.  $X$ ) par l'adhérence de  $z$  dans  $Z$  (resp. dans  $X$ ), et  $S$  par l'adhérence de  $w$  dans  $S$ , tous munis des structures de sous-schémas réduits. Alors  $Z$  et  $S$  sont intègres, de corps de fractions  $K := \kappa(z)$  et  $K_0 := \kappa(w)$ . Comme  $w$  est une générisation de  $w'$ , il appartient au schéma local  $S_{w'} = \text{Spec}(\mathcal{O}_{S,w'})$  qui est intègre. D'après le lemme 5.5.2, il existe un anneau de valuation discrète  $A \subset K$  qui domine  $\mathcal{O}_{S,w'}$ . Notons  $\sigma$  le point fermé de  $\text{Spec}(A)$ ; le morphisme  $\text{Spec}(A) \rightarrow \text{Spec}(\mathcal{O}_{S,w'})$  l'envoie sur  $w'$ . On se trouve avec un diagramme commutatif comme dans la condition (2). Par hypothèse, il existe un morphisme  $\text{Spec}(A) \rightarrow X$  qui complète le diagramme, et l'image  $z'$  de  $\sigma$  vérifie donc  $f(z') = w'$ . Ceci termine la démonstration.  $\square$

**5.5.6 Corollaire.** Soient  $S$  un schéma et  $n$  un entier. Alors l'espace projectif  $\mathbb{P}_S^n$  est propre sur  $S$ .

**Démonstration :** Il suffit de montrer que  $X = \mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^n$  est propre sur  $\mathbb{Z}$ . On sait qu'il est de type fini, car recouvert par les ouverts affines standard qui sont des espaces affines. Il reste à vérifier les critères valuatifs. Considérons un anneau de valuation discrète  $A$  de corps de fractions  $K$  et un diagramme carré commutatif comme celui présent dans les critères valuatifs. Quitte à remplacer  $X$  par  $X \otimes_{\mathbb{Z}} A$  on se ramène à la situation suivante :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spec}(K) & \xrightarrow{g} & \mathbb{P}_A^n \\ & \searrow & \downarrow f \\ & & \mathrm{Spec}(A) \end{array}$$

D'après la description des morphismes d'un schéma local vers l'espace projectif (voir 4.6.8), le morphisme  $g$  est donné par un  $(n + 1)$ -uplet de coordonnées homogènes  $(x_0 : \dots : x_n)$  avec  $x_i \in K$ , l'un au moins d'entre eux étant non nul. On peut multiplier tous les  $x_i$  simultanément par un élément  $a \in K^\times$  sans changer  $g$ . Après choix d'une uniformisante  $\pi$  pour  $A$ , un tel élément s'écrit  $a = u\pi^n$  avec  $u \in A^\times$  et  $n \in \mathbb{Z}$ . Étendre  $g$  en un morphisme défini sur  $\mathrm{Spec}(A)$  veut dire trouver  $a$  tel que les  $y_i = ax_i$  soient dans  $A$ , l'un d'entre eux étant inversible. Notons  $v_i$  la valuation de  $x_i$  et  $v = \min(v_i)$ . Aux inversibles de  $A$  près, l'extension est possible d'une unique manière en prenant  $a = \pi^{-v}$ .  $\square$

## 5.6 Aperçu de quelques résultats sur les morphismes de schémas

Les différentes propriétés des morphismes introduites dans la partie 5 sont importantes avant tout parce qu'elles entretiennent des relations entre elles et permettent de dresser un paysage structuré de l'ensemble des morphismes. Nous présentons maintenant sans preuve quelques résultats fondamentaux qui illustrent cette réflexion, pour donner à la lectrice / au lecteur l'envie d'en savoir plus.

**5.6.1 Sur la structure des morphismes séparés quasi-compacts.** Considérons la catégorie QC des morphismes de schémas  $X \rightarrow S$  séparés et quasi-compacts ; elle contient presque tous les schémas sur lesquels on se pose les questions les plus naturelles. Sous une hypothèse faible sur  $S$ , le théorème suivant affirme que tout objet de QC se factorise en une partie affine et une partie propre.

**Théorème de décomposition de Temkin.** *Supposons  $S$  quasi-séparé (i.e. à diagonale quasi-compacte) et quasi-compact (par exemple noethérien). Alors tout morphisme séparé quasi-compact  $X \rightarrow S$  possède une factorisation en un morphisme affine  $X \rightarrow Y$  et un morphisme propre  $Y \rightarrow S$ .*

Notons  $\mathbf{A}$ , resp.  $\mathbf{P}$  la sous-catégorie pleine des morphismes affines, resp. propres. Le théorème de Temkin affirme donc que  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{P}$  engendrent QC d'une certaine manière. Pour compléter cette perception, il est utile de connaître  $\mathbf{A} \cap \mathbf{P}$  pour savoir à quel point ces deux sous-catégories sont en « somme directe ». La réponse est apportée par le résultat suivant.

**Théorème de Chevalley-Grothendieck.** *Soit  $f : X \rightarrow S$  un morphisme. Les conditions suivantes sont équivalentes :  $f$  est fini ;  $f$  est propre et affine ;  $f$  est propre à fibres finies.*

Si l'on considère les morphismes finis comme « négligeables », on obtient donc une description

assez claire. On peut penser à une factorisation  $X \rightarrow Y \rightarrow S$  comme à une sorte de suite exacte<sup>(3)</sup> et résumer les deux résultats précédents en termes approximatifs en disant qu'on a une extension

$$0 \rightarrow A' \rightarrow \text{QC}' \rightarrow \text{P}' \rightarrow 0$$

où les « prime » désignent les catégories  $A, \text{QC}, \text{P}$  modulo les morphismes finis. (On peut donner un sens à ces catégories « prime », en revanche la suite exacte n'est qu'une image.)

**5.6.2 Sur la structure des morphismes séparés quasi-finis.** On s'intéresse maintenant à la catégorie  $\text{QF}$  des morphismes séparés quasi-finis. Les immersions ouvertes et les morphismes finis sont des exemples simples (ci-dessus nous avons négligé les morphismes finis mais ici ils seront très importants). Le théorème suivant affirme que tout morphisme qui est dans  $\text{QF}$  se factorise en termes de ces exemples.

**Théorème principal de Zariski.** *Soit  $S$  un schéma quasi-séparé et quasi-compact. Alors tout morphisme séparé quasi-fini  $f : X \rightarrow S$  possède une factorisation en une immersion ouverte quasi-compacte  $X \rightarrow Y$  et un morphisme fini  $Y \rightarrow S$ .*

Notons  $\text{IO}$ , resp.  $\text{F}$ , la sous-catégorie pleine des immersions ouvertes quasi-compactes, resp. des morphismes finis. L'intersection  $\text{IO} \cap \text{F}$  est constituée des immersions ouvertes et finies  $X \rightarrow S$ , qui sont fermées donc identifient  $X$  à une somme disjointe de composantes connexes de  $S$ . Si  $S$  est connexe, ces immersions sont des isomorphismes. Comme dans 5.6.1, on peut donc dire qu'on a une sorte d'extension  $0 \rightarrow \text{IO}' \rightarrow \text{QF}' \rightarrow \text{F}' \rightarrow 0$  où les « prime » désignent les catégories modulo les immersions ouvertes et fermées.

**5.6.3 Sur la structure des morphismes propres.** On s'intéresse enfin à la structure de la catégorie  $\text{P}$  des morphismes propres. La décomposition qui sera donnée ici fera jouer un rôle à la sous-catégorie pleine  $\text{PC}$  dont les objets sont les morphismes propres à fibres géométriquement connexes, et à la sous-catégorie pleine  $\text{F}$  des morphismes finis. Moralement, il s'agit des deux familles d'objets contraires : connexes d'une part, totalement discontinus d'autre part.

**Théorème de finitude.** *Soit  $S$  un schéma localement noethérien. Alors pour tout morphisme propre  $f : X \rightarrow S$  et tout  $\mathcal{O}_X$ -module cohérent  $\mathcal{F}$ , l'image directe  $f_*\mathcal{F}$  est un  $\mathcal{O}_S$ -module cohérent.*

Par exemple, si  $X$  est un schéma propre sur un corps  $k$ , ce théorème implique que  $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$  est un  $k$ -espace vectoriel de dimension finie. Dans l'énoncé suivant, il implique que  $f_*\mathcal{O}_X$  est une  $\mathcal{O}_S$ -algèbre finie et le morphisme fini  $S' \rightarrow S$  est donné par  $S' = \text{Spec}(f_*\mathcal{O}_X)$ .

**Théorème de factorisation de Stein.** *Soit  $S$  un schéma localement noethérien. Alors tout morphisme propre  $f : X \rightarrow S$  se factorise en un morphisme propre à fibres non vides et géométriquement connexes  $X \rightarrow S'$ , et un morphisme fini  $S' \rightarrow S$ .*

---

3. Dans la catégorie des schémas en groupes de type fini sur un corps  $k$ , l'analogie avec la suite exacte n'est pas qu'une analogie, en vertu du théorème suivant dû à Barsotti et Chevalley : pour tout  $k$ -schéma en groupes de type fini  $G$ , il existe une suite exacte de schémas en groupes  $1 \rightarrow H \rightarrow G \rightarrow A \rightarrow 1$  avec  $H$  affine et distingué, et  $A$  propre, lisse et géométriquement connexe sur  $k$ . Un tel  $A$  est appelé une *variété abélienne* sur  $k$ .

L'intersection  $\mathbf{PC} \cap \mathbf{F}$  est composée des morphismes finis à fibres géométriquement connexes, qui sont aussi les morphismes finis et universellement injectifs. Deux exemples typiques de tels morphismes sont l'immersion fermée  $X_{\text{red}} \hookrightarrow X$  du sous-schéma réduit, et le morphisme  $\text{Spec}(\ell) \rightarrow \text{Spec}(k)$  induit par une extension finie purement inséparable de corps. Ici encore, on se représente la situation de manière imagée par une extension  $0 \rightarrow \mathbf{PC}' \rightarrow \mathbf{P}' \rightarrow \mathbf{F}' \rightarrow 0$  où les « prime » désignent les catégories modulo les morphismes finis universellement injectifs.