# Introduction à la Géométrie Algébrique. Le langage des schémas

Cours du 3 novembre 2015

Sur un schéma affine, les $\mathcal{O}_X$-modules qui sont intéressants en géométrie algébrique sont les modules $\mathscr{F} = \widetilde{M}$ définis par un module sur un anneau. Or les $A$-modules vérifient une propriété qui, bien que stupide, se transfère du côté des $\mathcal{O}_X$-modules en une propriété qui ne l'est pas : ils sont engendrés par leurs éléments. Plus précisément, ils peuvent être définis par générateurs et relations, ce qui signifie que pour tout $A$-module $M$ il existe une suite exacte :

$$A^{(J)} \longrightarrow A^{(I)} \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

où $A^{(I)}, A^{(J)}$ sont les modules libres sur des ensembles de base $I, J$. Une autre manière de le dire est que tout module est conoyau d'un morphisme entre modules libres. On constate facilement que ceci implique que sur $X = \mathrm{Spec}(A)$, le module $\mathscr{F} = \widetilde{M}$ peut localement être défini par générateurs et relations. Nous prenons cette dernière propriété pour définition des modules quasi-cohérents.

**4.2.4 Définition.** Soit $X$ un espace annelé. On dit qu'un $\mathcal{O}_X$-module est *quasi-cohérent* si tout point $x \in X$ possède un voisinage ouvert $U$ sur lequel $\mathscr{F}_{|U}$ peut être défini par générateurs et relations, i.e. il existe une suite exacte $\mathcal{O}_U^{(J)} \longrightarrow \mathcal{O}_U^{(I)} \longrightarrow \mathscr{F}_{|U} \longrightarrow 0$. On note $\mathrm{Qcoh}(\mathcal{O}_X)$ la catégorie des $\mathcal{O}_X$-modules quasi-cohérents.

Le fait que ce soit une bonne notion dans le cadre des schémas sera confirmé par la propriété que sur un schéma affine, tout module quasi-cohérent est de la forme $\widetilde{M}$. Nous allons démontrer ceci et en même temps quelques compléments.

**4.2.5 Théorème.** *Soient $X$ un schéma et $\mathscr{F}$ un $\mathcal{O}_X$-module. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) *Pour tout ouvert affine $U = \mathrm{Spec}(A)$ il existe un $A$-module $M$ tel que $\mathscr{F}_{|U} \simeq \widetilde{M}$.*

(2) *Il existe un recouvrement ouvert affine $\{U_i = \mathrm{Spec}(A_i)\}$ et des $A_i$-modules $M_i$ tels que $\mathscr{F}_{|U_i} \simeq \widetilde{M_i}$.*

(3) *Le $\mathcal{O}_X$-module $\mathscr{F}$ est quasi-coherent.*

(4) *Pour tout ouvert affine $U = \mathrm{Spec}(A)$ et pour tout $f \in A$, le morphisme $\Gamma(U, \mathscr{F})_f \to \Gamma(D(f), \mathscr{F})$ est un isomorphisme.*

**Preuve :** D'abord un commentaire sur le point (4) : le morphisme proposé provient du morphisme de restriction $\Gamma(U, \mathscr{F}) \to \Gamma(D(f), \mathscr{F})$ via la propriété universelle, puisque clairement l'élément $f$ induit sur le module $\Gamma(D(f), \mathscr{F})$ un morphisme bijectif. Nous passons à la démonstration.

(1) $\Rightarrow$ (2) est clair.

(2) $\Rightarrow$ (3). Par hypothèse, il existe un recouvrement ouvert affine $\{U_i = \mathrm{Spec}(A_i)\}$ tel que $\mathscr{F}_{|U_i} \simeq \widetilde{M_i}$ pour tout $i$. Soit $A_i^{(J)} \to A_i^{(I)} \to M_i \to 0$ une présentation de $M_i$. Comme le foncteur tilde : $\mathrm{Mod}(A) \to$

$\mathrm{Mod}(\mathcal{O}_X)$, $M \mapsto \widetilde{M}$ est exact (voir exercice 4.2.3), on en déduit que la suite $\mathcal{O}_U^{(J)} \to \mathcal{O}_U^{(I)} \to \mathscr{F}_{|U_i} \to 0$ est exacte, donc $\mathscr{F}$ est quasi-cohérent. Pour être complet, démontrons l'assertion d'exactitude de 4.2.3 avec $A = A_i$, $M = M_i$, etc. Soit $\dots \to M \xrightarrow{u} M' \xrightarrow{v} M'' \to \dots$ une suite exacte de $A$-modules et notons $\dots \to \mathscr{F} \to \mathscr{F}' \to \mathscr{F}'' \to \dots$ la suite image par tilde, où $\mathscr{F} = \widetilde{M}$ (etc). Comme $v \circ u = 0$ on a $\widetilde{v} \circ \widetilde{u} = 0$, et on doit montrer que le morphisme de faisceaux $\mathrm{im}(\widetilde{u}) \to \ker(\widetilde{v})$ est un isomorphisme. Comme la localisation des modules par rapport à une partie multiplicative est un foncteur exact (voir [Mat], th. 4.5), on déduit une suite exacte $\dots \to M_p \to M'_p \to M''_p \to \dots$ pour tout premier $p \subset A$. Comme $M_p = \mathscr{F}_x$ au point $x = [p]$, cette suite se réécrit $\dots \to \mathscr{F}_x \to \mathscr{F}'_x \to \mathscr{F}''_x \to \dots$. Ainsi l'application $\mathrm{im}(\widetilde{u}) \to \ker(\widetilde{v})$ est un isomorphisme sur les fibres, donc un isomorphisme de faisceaux et la suite $\dots \to \mathscr{F} \to \mathscr{F}' \to \mathscr{F}'' \to \dots$ est exacte.

(3) $\Rightarrow$ (4). Si $\mathscr{F}_{|U}$ est de la forme $\widetilde{M}$, les deux membres sont égaux à $M_f$ et l'énoncé est clair. Nous utiliserons ce fait ci-dessous. Quitte à changer $X$ en $U$, on peut supposer $U = X = \mathrm{Spec}(A)$ affine. Par l'hypothèse (3) il existe un recouvrement ouvert par des ouverts (que l'on peut supposer) principaux $U_i = D(f_i)$ et des présentations par générateurs et relations :

$$\widetilde{A}_{f_i}^{(J)} \xrightarrow{\widetilde{u}_i} \widetilde{A}_{f_i}^{(I)} \longrightarrow \mathscr{F}_{|U_i} \longrightarrow 0.$$

Comme $X$ est quasi-compact, on peut supposer les $U_i$ en nombre fini. Comme le foncteur tilde est pleinement fidèle (prop. 4.2.2), chaque morphisme $\widetilde{u}_i$ est défini par un certain morphisme de $A_{f_i}$-modules $u_i : A_{f_i}^{(J)} \to A_{f_i}^{(I)}$. Comme tilde préserve les conoyaux (voir exercice 4.2.3), on en déduit que $\mathscr{F}_{|U_i} = \mathrm{coker}(\widetilde{u}_i) = \mathrm{coker}(u_i)^\sim$. Compte tenu de notre observation initiale ceci montre que $\mathscr{F}_{|U_i}$ vérifie la propriété (4) attendue. Le même argument montre que la restriction de $\mathscr{F}$ aux ouverts $U_i \cap U_j = D(f_i f_j)$ vérifient la propriété (4). Nous allons conclure en utilisant la propriété de faisceau. Celle-ci affirme que l'on a une suite exacte $\Gamma(X, \mathscr{F}) \to \prod \Gamma(U_i, \mathscr{F}) \to \prod \Gamma(U_i \cap U_j, \mathscr{F})$. Comme les ensembles d'indices des produits sont *finis*, le morphisme naturel $(\prod \Gamma(U_i, \mathscr{F}))_f \to \prod \Gamma(U_i, \mathscr{F})_f$ est un isomorphisme ainsi que son analogue sur les $U_i \cap U_j$. On peut donc localiser en $f$ cette suite exacte, ce qui donne le premier rang du diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Gamma(X, \mathscr{F})_f \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & \prod_i \Gamma(U_i, \mathscr{F})_f \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & \prod_{i,j} \Gamma(U_i \cap U_j, \mathscr{F})_f \arrow[d, "\gamma"] \\
0 \arrow[r] & \Gamma(D(f), \mathscr{F}) \arrow[r] & \prod_i \Gamma(D(f) \cap U_i, \mathscr{F}) \arrow[r] & \prod_{i,j} \Gamma(D(f) \cap U_i \cap U_j, \mathscr{F})
\end{tikzcd}$$

D'après ce que nous avons démontré auparavant, les applications $\beta$ et $\gamma$ sont des isomorphismes. L'application $\alpha$ identifie alors $\ker(\beta)$ et $\ker(\gamma)$, d'où (4).

(iv) $\Rightarrow$ (i). Posons $M = \Gamma(U, \mathscr{F})$. La restriction des sections induit un morphisme de $\mathcal{O}_U$-modules $\widetilde{M} \to \mathscr{F}_{|U}$. La propriété (4) affirme que c'est un isomorphisme sur tous les ouverts principaux $D(f) \subset U$, c'est donc un isomorphisme de faisceaux. □

**4.2.6 Corollaire.** *Soit* $X = \mathrm{Spec}(A)$ *un schéma affine. Les foncteurs*

$$\mathrm{Mod}(A) \underset{\Gamma}{\overset{M \mapsto \widetilde{M}}{\rightleftarrows}} \mathrm{Qcoh}(\mathcal{O}_X)$$

*sont des équivalences de catégories exactes, quasi-inverses l'une de l'autre.*

On renvoie à 1.4.11 pour un rappel sur la notion de quasi-inverse. L'exactitude du foncteur $\Gamma$ signifie la chose suivante : si une suite de $\mathcal{O}_X$-modules quasi-cohérents $0 \to \mathscr{F}' \to \mathscr{F} \to \mathscr{F}'' \to 0$ est exacte, alors la suite de $A$-modules $0 \to \Gamma(X, \mathscr{F}') \to \Gamma(X, \mathscr{F}) \to \Gamma(X, \mathscr{F}'') \to 0$ est exacte. (Énoncé similaire pour l'exactitude du foncteur tilde.)

**Preuve :** Le foncteur $M \mapsto \widetilde{M}$ est pleinement fidèle par 4.2.2 et essentiellement surjectif par 4.2.5. Il est clair que $\mathscr{F} \mapsto \Gamma(X, \mathscr{F})$ est un quasi-inverse. Passons aux énoncés d'exactitude. Nous avons déjà vu que $M \mapsto \widetilde{M}$ est exact. Démontrons que $\Gamma$ l'est aussi (même si un résultat général de théorie des catégories dit qu'un quasi-inverse d'un foncteur exact est exact). Soit donc $0 \to \mathscr{F}' \to \mathscr{F} \to \mathscr{F}'' \to 0$ une suite exacte de $\mathcal{O}_X$-modules quasi-cohérents. Notons $M = \Gamma(X, \mathscr{F})$, etc. On voit directement en utilisant les définitions que la suite $0 \to M' \to M \to M''$ est exacte. Notons $Q = M/M'$, on a donc une injection $Q \hookrightarrow M''$. Montrons que le module $C = M''/Q$ est nul. Pour tout $x = [p] \in X$, la suite $0 \to \mathscr{F}'_x \to \mathscr{F}_x \to \mathscr{F}''_x \to 0$ est exacte. Puisque $\mathscr{F}_x = M_p$ (etc.), ce implique que $Q_p \to M''_p$ est un isomorphisme, et ceci pour tout $p$. Alors $C_p = (M''/Q)_p \simeq M''_p/Q_p = 0$ pour tout $p$. Mais un module $C$ dont tous les localisés $C_p$ sont nuls est nul (car si $x \in C$ est non nul, son annulateur $\mathrm{Ann}(x)$ est un idéal distinct de $A$, donc inclus dans un idéal maximal $p$, et $x$ reste non nul dans $C_p$. Voir [Mat], th. 4.6). Nous avons montré que $C = 0$, donc $Q \to M''$ est un isomorphisme et la suite $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ est exacte. □

**4.2.7 Exercice.** Soient $X = \mathrm{Spec}(A)$, $Y = \mathrm{Spec}(B)$ deux schémas affines et $f : Y \to X$ le morphisme défini par un morphisme d'anneaux $\varphi : A \to B$. Montrez les faits suivants :

(1) si $N$ est un $B$-module, ${}_AN$ est $N$ vu comme $A$-module via $\varphi$, et $\mathscr{G} = \widetilde{N}$, alors $f_*\mathscr{G} = \widetilde{{}_AN}$.

(2) si $M$ est un $A$-module et $\mathscr{F} = \widetilde{M}$, alors $f^*\mathscr{F} = \widetilde{M \otimes_A B}$.

## 4.3 Algèbres quasi-cohérentes et spectre relatif

**4.3.1 Définition.** Soit $S$ un schéma. On appelle *faisceau d'algèbres sur $S$* ou *$\mathcal{O}_S$-algèbre* un faisceau d'anneaux $\mathscr{A}$ sur $S$ muni d'un morphisme d'anneaux $\mathcal{O}_S \to \mathscr{A}$. On appelle *$\mathcal{O}_S$-algèbre quasi-cohérente* un faisceau d'algèbres qui est quasi-cohérent comme faisceau de modules.

Par exemple, si $f : X \to S$ est un $S$-schéma, alors $\mathscr{A}(X) := f_*\mathcal{O}_X$ est naturellement une $\mathcal{O}_S$-algèbre à l'aide du morphisme $f^\sharp : \mathcal{O}_S \to f_*\mathcal{O}_X$. De plus, si $g : Y \to S$ est un second $S$-schéma et $h : X \to Y$ un $S$-morphisme, le morphisme $\mathcal{O}_Y \to h_*\mathcal{O}_X$ fournit par application de $g_*$ un morphisme $\mathscr{A}(Y) \to \mathscr{A}(X)$. On obtient ainsi un foncteur contravariant $\mathscr{A} : \mathrm{Sch}\,/S \to \{\mathcal{O}_S\text{-algèbres}\}$. Nous montrerons plus loin que sous des conditions assez faibles sur $f$ (par ex. quasi-compacité plus séparation), l'algèbre $\mathscr{A}(X)$ est quasi-cohérente. Ce résultat impliquera par exemple que si $X$ est un sous-schéma fermé d'un espace affine $\mathbb{A}^n_S$ ou d'un espace projectif $\mathbb{P}^n_S$, alors $\mathscr{A}(X)$ est quasi-cohérente.

**4.3.2 Exercice.** Montrez que sur un schéma affine $X = \mathrm{Spec}(A)$, le produit tensoriel de deux modules quasi-cohérents $\mathscr{F} = \widetilde{M}$ et $\mathscr{G} = \widetilde{N}$ est le module $\widetilde{M \otimes_A N}$. Déduisez-en que $B \mapsto \widetilde{B}$ définit une équivalence entre la catégorie des $A$-algèbres et la catégorie des $\mathcal{O}_X$-algèbres quasi-cohérentes.

**4.3.3 Proposition.** *Soit $\mathscr{A}$ une algèbre quasi-cohérente sur $S$. Alors il existe un $S$-schéma $Y = \mathrm{Spec}(\mathscr{A})$ tel que $\mathscr{A}(Y) = \mathscr{A}$ avec la propriété universelle suivante : le foncteur $\mathscr{A}$ induit une bijection*

$$\mathrm{Hom}_S(X, \mathrm{Spec}(\mathscr{A})) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S\text{-}\mathrm{Alg}}(\mathscr{A}, \mathscr{A}(X))$$

*fonctorielle en $X$ et en $\mathscr{A}$. De plus la formation de* $\mathrm{Spec}(\mathscr{A})$ *commute au changement de base sur $S$, i.e. pour tout morphisme de schémas $S' \to S$ il existe un isomorphisme canonique de $S'$-schémas*

$$\mathrm{Spec}(\mathscr{A}) \times_S S' \xrightarrow{\sim} \mathrm{Spec}(u^*\mathscr{A}).$$

**Preuve :** Si $S = \mathrm{Spec}(R)$ est affine, on a $\mathscr{A} = \widetilde{A}$ pour une certaine $R$-algèbre $A$. Dans ce cas on pose $Y = \mathrm{Spec}(A)$ et le résultat se déduit facilement de 1.8.7. Dans le cas général, on peut recouvrir $S$ par des ouverts affines $U_i = \mathrm{Spec}(R_i)$. On pose $Y_i = \mathrm{Spec}(R_i)$. L'ouvert $Y_{i,j}$ préimage de $U_i \cap U_j$ dans $Y_i$ vérifie la propriété universelle du schéma $\mathrm{Spec}(\mathscr{A}_{|U_i \cap U_j})$. Par symétrie il en va de même de $Y_{j,i}$ et on a donc un isomorphisme canonique $\varphi_{i,j} : Y_{i,j} \xrightarrow{\sim} Y_{j,i}$. On note $Y$ le $S$-schéma obtenu par recollement des $Y_i$ le long des $Y_{i,j}$. La vérification de la propriété universelle est immédiate car la bijection annoncée peut se tester localement : plus précisément, si l'on note $u, v$ les deux applications en sens inverses entre les deux ensembles Hom, on peut tester les égalités $u(v(f)) = f$ et $v(u(g)) = g$ localement. Enfin il nous reste à montrer l'énoncé sur la formation de $\mathrm{Spec}(\mathscr{A})$ et le changement de base. Il suffit de montrer que les $S'$-schémas $\mathrm{Spec}(\mathscr{A}) \times_S S'$ et $\mathrm{Spec}(u^*\mathscr{A})$ sont solution du même problème universel. Or pour tout $S'$-schéma $f' : X' \to S'$ on a des bijections canoniques :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{S'}(X', \mathrm{Spec}(u^*\mathscr{A})) &= \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{S'}\text{-}\mathrm{Alg}}(u^*\mathscr{A}, \mathscr{A}'(X')) \\
&= \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S\text{-}\mathrm{Alg}}(\mathscr{A}, u_*\mathscr{A}'(X')) \text{ par adjonction,} \\
&= \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S\text{-}\mathrm{Alg}}(\mathscr{A}, \mathscr{A}(X')) \text{ en posant } f = u \circ f' : X' \to S, \\
&= \mathrm{Hom}_S(X', \mathrm{Spec}(\mathscr{A})) \\
&= \mathrm{Hom}_{S'}(X', \mathrm{Spec}(\mathscr{A}) \times_S S').
\end{aligned}$$

Ceci termine la démonstration. □

**4.3.4 Exercice.** Soit $S$ un schéma. Définissez la $\mathcal{O}_S$-algèbre $\mathcal{O}_S[t_1, \dots, t_n]$ des polynômes en $t_1, \dots, t_n$ et montrez que son spectre est l'espace affine $\mathbb{A}^n_S$. Décrivez la propriété universelle du $S$-schéma $\mu_{n,S} := \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_S[t]/(t^n - 1))$. (Plus généralement, on peut définir une algèbre quasi-cohérente $\mathscr{A} = \mathcal{O}_S[t_1, \dots, t_n]/(f_1, \dots, f_r)$ et un schéma $X = \mathrm{Spec}(\mathscr{A})$ pour tout choix de $r$ polynômes $f_1, \dots, f_r \in \Gamma(S, \mathcal{O}_S)[t_1, \dots, t_n]$.)

## 4.4 Idéaux quasi-cohérents et sous-schémas fermés

**4.4.1 Définition.** Soit $X$ un schéma. On appelle *idéal quasi-cohérent sur $X$* un sous-$\mathcal{O}_X$-module quasi-cohérent de $\mathcal{O}_X$.

Si $\mathscr{I} \subset \mathcal{O}_X$ est un idéal quasi-cohérent de $\mathcal{O}_X$, le quotient $\mathcal{O}_X/\mathscr{I}$ est une $\mathcal{O}_X$-algèbre quasi-cohérente et on on peut former le schéma $V(\mathscr{I}) := \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_X/\mathscr{I})$. Pour tout ouvert affine $U =$

Spec$(A)$ de $X$, notons $I = \mathscr{I}(U)$. Il découle de 4.2.6, que l'on a $(\mathcal{O}_X/\mathscr{I})(U) = \mathcal{O}_X(U)/\mathscr{I}(U) = A/I$. En conséquence, la restriction du morphisme $i : V(\mathscr{I}) \to X$ au-dessus de l'ouvert $U$ est le schéma $V(I) = \mathrm{Spec}(A/I)$. Ceci montre que $i$ est une immersion fermée. On identifie $V(\mathscr{I})$ à son image dans $X$ et on le voit donc comme un sous-schéma fermé de $X$.

**4.4.2 Proposition.** *Pour tout schéma $X$, l'application $\mathscr{I} \mapsto Y = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_X/\mathscr{I})$ est une bijection entre l'ensemble des idéaux quasi-cohérents de $\mathcal{O}_X$ et l'ensemble des sous-schémas fermés de $X$.*

**Preuve :** Nous nous contentons de construire la bijection réciproque. Il s'agit de l'application qui à un sous-schéma fermé $Y \subset X$ associe le faisceau $\mathscr{I} := \ker(\mathcal{O}_X \to i_*\mathcal{O}_Y)$ et nous devons montrer que celui-ci est quasi-cohérent. Comme le noyau d'un morphisme entre deux modules quasi-cohérents l'est encore, il suffit de montrer que $i_*\mathcal{O}_Y$ est un quasi-cohérent. Nous utilisons la caractérisation (4) du théorème 4.2.5. Soit $U = \mathrm{Spec}(A)$ un ouvert affine de $X$ et $D(f)$ un ouvert principal de $U$. Par restriction à ces ouverts, on obtient des sous-schémas fermés $Y \cap U \hookrightarrow U$ et $Y \cap D(f) \hookrightarrow D(f)$. D'après la proposition 2.2.5, il existe un idéal $I \subset A$ tel que $Y \cap U = V(I)$. Il s'ensuit que $Y \cap D(f) = V(I_f)$. On voit alors que $\Gamma(U, i_*\mathcal{O}_Y)_f = (B/I)_f$ et $\Gamma(D(f), i_*\mathcal{O}_Y) = B_f/I_f$, et l'application $\Gamma(U, i_*\mathcal{O}_Y)_f \to \Gamma(D(f), i_*\mathcal{O}_Y)$ est l'isomorphisme canonique entre ces anneaux (cet isomorphisme vient du fait que la localisation commute au quotient par un idéal, cf [Mat], th. 4.2). $\square$

Il est clair que la formulation $Y = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_X/\mathscr{I})$ donne la meilleure définition de la notion de sous-schéma fermé, même si nous avons dû attendre d'avoir un peu d'aisance avec les modules quasi-cohérents pour la donner.