Introduction à la Géométrie Algébrique. Le langage des schémas

Cours du 20 octobre 2015

3.3.7 Regarder encore plus près. Les ouverts de la topologie de Zariski étant si gros, le schéma local X_x est très utile pour se rapprocher de x. Il existe des moyens de regarder encore plus près. Par exemple, l'anneau local *complété* rassemble, par une limite projective convenable, toute l'information différentielle contenue dans les sous-schémas fermés infinitésimaux passant par x. Il est défini ainsi :

$$\widehat{\mathcal{O}}_{X,x} = \varprojlim_n \mathcal{O}_{X,x}/m_x^n.$$

Notons $X_{x,n} = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}/m_x^{n+1})$ le *n-ième voisinage infinitésimal de x dans X* et $\widehat{X}_x = \mathrm{Spec}(\widehat{\mathcal{O}}_{X,x})$ le *schéma local complété*. Ainsi $\{x\} = \mathrm{Spec}(\kappa(x))$ est le 0-ième voisinage infinitésimal et $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}/m_x^2)$ est le premier. On peut montrer que $\widehat{X}_x$ est la limite inductive (c'est-à-dire la « réunion ») des $X_{x,n}$ dans la catégorie des schémas, et on a la figure suivante :

$$\{x\} \hookrightarrow X_{x,1} \hookrightarrow X_{x,2} \hookrightarrow \dots \hookrightarrow X_{x,n} \hookrightarrow \dots \hookrightarrow \varinjlim X_{x,n} = \widehat{X}_x \longrightarrow X_x \hookrightarrow U \hookrightarrow X.$$

Toutes les flèches jusqu'à $\widehat{X}_x$ sont des immersions fermées, la flèche $X_x \to U$ est une localisation mais pas une immersion, et $U \to X$ est une immersion ouverte. La flèche $u : \widehat{X}_x \to X_x$ est plus compliquée. Si X est localement noethérien en x, l'anneau $A = \mathcal{O}_{X,x}$ est local noethérien et u possède de très bonnes propriétés. La théorie des anneaux locaux noethériens nous apprend que $A \to \widehat{A}$ est un monomorphisme et un épimorphisme dans la catégorie des anneaux locaux noethériens avec morphismes d'anneaux locaux. (Ces résultats découlent essentiellement du lemme d'Artin-Rees ; voir [Mat], section 8 et notamment le résumé des résultats sur les anneaux locaux noethériens en fin de section). On en déduit que $u : \widehat{X}_x \to X_x$ est un épimorphisme dans la catégorie de tous les schémas, et un monomorphisme dans la catégorie des schémas localement noethériens pointés. Si X n'est pas noethérien en x, la complétion se comporte beaucoup moins bien. L'exercice suivant donne un exemple.

3.3.8 Exercice. Soit A l'anneau des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, localisé en l'idéal m des fonctions nulles en 0. Montrez que $m = m^2$ et que $\widehat{A} \simeq \mathbb{R}$.

Illustrons sur un exemple le type d'information que la complétion apporte. Soit $C \subset \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ la courbe complexe singulière plane d'équation $f := y^2 - x^2(x+1) = 0$. Au point singulier $P = (0,0)$, la courbe ressemble localement à la courbe $y^2 = x^2$ qui possède deux branches d'équations $y - x = 0$ et $y + x = 0$. On aimerait voir ces deux « branches ». Le schéma local C_P ne les voit pas : il est intègre car l'anneau $\mathbb{C}[x,y]/(f)$ l'est. En revanche, dans l'anneau complété $\mathbb{C}[[x,y]]/(f)$ existe une fonction $u = \sqrt{1+x}$ définie à l'aide du développement en série formelle familier. On obtient $\widehat{\mathcal{O}}_{C,P} \simeq \mathbb{C}[[x,y]]/((y-ux)(y+ux))$ qui possède deux premiers minimaux $(y-ux)$ et $(y+ux)$. Le schéma local complété possède deux composantes irréductibles, qui sont les branches de la singularité.

3.4 Schémas non réduits

Nous donnons deux exemples très simples de schémas non réduits qui montrent les deux manifestations principales des phénomènes de non réduction :

— la non réduction « générique »,

— l'existence de composantes immergées.

3.4.1 Nilpotents aux points génériques. Le premier phénomène correspond à la présence d'éléments nilpotents dans les anneaux de fonctions d'ouverts $U \subset X$, et en particulier dans les anneaux locaux de points génériques de composantes de X. Un exemple simple est donné par la droite affine avec multiplicité 2 sur un corps k :

$$X_1 = \mathrm{Spec}\left(\frac{k[\epsilon,t]}{(\epsilon^2)}\right).$$

C'est un schéma irréductible, de sous-schéma réduit $X_{1,\mathrm{red}} = \mathbb{A}^1_k$. Son point générique η correspond à l'idéal premier $p = (\epsilon)$. En notant que l'inversibilité de $a + \epsilon b$ dans un anneau localisé est équivalente à celle de a, on obtient :

$$\mathcal{O}_{X_1,\eta} = (k[\epsilon,t]/(\epsilon^2))_p = k(t)[\epsilon]/(\epsilon^2).$$

D'une certaine manière, les éléments nilpotents sont présents génériquement et il y en a « autant » (ni plus ni moins) aux autres points de X_1. Aucun sous-schéma ouvert de X n'est réduit.

3.4.2 Composantes immergées. Le second phénomène correspond à la présence de fonctions nilpotentes qui apparaissent dans certains fermés de X. Voici un exemple :

$$X_2 = \mathrm{Spec}\left(\frac{k[\epsilon,t]}{(\epsilon^2,\epsilon t)}\right).$$

Ce schéma a le même support que le précédent : $X_{2,\mathrm{red}} = X_{1,\mathrm{red}} = \mathbb{A}^1_k$ mais contient l'ouvert topologiquement dense *réduit* $D(t) = \mathrm{Spec}(k[t,1/t])$. Ce n'est qu'au point $x = [q]$ avec $q = (\epsilon, x)$ que subsistent des fonctions nilpotentes. Le dessin de X_2 suggère que ce schéma est obtenu en recollant une droite affine $\mathrm{Spec}(k[t])$ avec un point épais $\mathrm{Spec}(k[\epsilon]/(\epsilon^2))$ le long d'un point réduit :

$$\mathrm{Spec}(k[t]) \hookleftarrow \mathrm{Spec}(k) \hookrightarrow \mathrm{Spec}(k[\epsilon]/(\epsilon^2)).$$

En algèbre commutative, la théorie des idéaux premiers associés des anneaux noethériens permet de bien décrire ces phénomènes (la théorie fonctionne en revanche assez mal pour les anneaux non noethériens).

3.4.3 Définition. Soit A un anneau noethérien. On appelle *premier associé* un idéal premier p de A qui est l'annulateur d'un élément a :

$$p = \mathrm{Ann}(x) = \{a \in A,\ ax = 0\}.$$

On appelle *assassin* de A et note $\mathrm{Ass}(A)$ l'ensemble des premiers associés de A.

Voici le théorème principal sur les premiers associés en algèbre commutative.

3.4.4 Théorème. *Soit A un anneau noethérien.*

(1) $\mathrm{Ass}(A)$ *est un ensemble fini qui contient les idéaux premiers minimaux de A.*

(2) *La réunion des premiers associés est égale à la réunion de $\{0\}$ et de l'ensemble des éléments diviseurs de 0 dans A.*

(3) *La formation de* $\mathrm{Ass}(A)$ *commute à la localisation, i.e. pour toute partie multiplicative $S \subset A$ on a* $\mathrm{Ass}(S^{-1}A) = \{pS^{-1}A;\ p \in \mathrm{Ass}(A),\ p \cap S = \varnothing\}$. *En particulier $p \in \mathrm{Ass}(A)$ ssi $p \in \mathrm{Ass}(A_p)$.*

Preuve : Il s'agit du théorème 3.1 de [Ei]. □

Les premiers minimaux correspondent aux composantes irréductibles, qui sont une notion topologique. On peut dire que les premiers associés sont la généralisation schématique naturelle de cette notion. Plus précisément, à cause du fait que la formation de $\mathrm{Ass}(A)$ commute à la localisation, on peut définir ces « composantes irréductibles schématiques » en regardant uniquement l'anneau local de leur point générique, et on arrive à la définition suivante.

3.4.5 Définition. Soit X un schéma localement noethérien. On appelle *point associé* de X un point $x \in X$ tel que l'idéal maximal $m_x \subset \mathcal{O}_{X,x}$ est un premier associé de $\mathcal{O}_{X,x}$. On appelle *composante associée* l'adhérence d'un point associé. On appelle *composante immergée* une composante associée qui n'est pas maximale, i.e. une composante associée incluse strictement dans une composante irréductible.

Dans l'exemple du schéma X_2, il n'est pas difficile de voir que $\mathrm{Ass}(A)$ contient deux éléments : $p_1 = (\epsilon) = \mathrm{Ann}(x)$ est l'unique premier minimal, et $p_2 = (\epsilon, x) = \mathrm{Ann}(\epsilon)$ est un premier associé contenant p_1 donc non minimal. Ceci signifie qu'on a l'inclusion de sous-schémas fermés $V(p_2) \subset V(p_1)$. Ainsi $V(p_2)$ est une composante immergée.

3.4.6 Densité schématique. Une fois dégagées ces notions de points et composantes associées, indiquons comment elles permettent d'éclairer une particuliarité de l'exemple X_2 qui pourrait sembler pathologique. Le fait est le suivant : alors que $D(t) \subset X_2$ est topologiquement dense, la fonction globale non nulle $\epsilon \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ a une restriction sur U qui est nulle. C'est ennuyeux car en topologie, les parties denses ont la propriété que les fonctions continues globales qui sont nulles sur une telle partie sont nulles partout. Dans le monde des schémas, on peut prendre cette propriété hautement désirable pour *définition* d'une notion de densité qui raffine la notion de densité topologique. Présentons cette notion et indiquerons ensuite sous forme d'exercice le lien précis avec les points associés.

3.4.7 Définition. On dit qu'une immersion ouverte $i : U \hookrightarrow X$ est *schématiquement dense dans X* si le morphisme de restriction des fonctions $i^\sharp : \mathcal{O}_X \to i_*\mathcal{O}_U$ est injectif.

3.4.8 Exercice. Soit X un schéma noethérien.

(1) Montrez que U est topologiquement dense si et seulement s'il contient tous les points génériques des composantes irréductibles de X (utilisez 2.4.4).

(2) Montrez que U est schématiquement dense si et seulement s'il contient tous les points associés de X, de la manière suivante. (i) Ramenez-vous au cas affine $X = \mathrm{Spec}(A)$, avec A noethérien. On note $\mathrm{Ass}(A) = \{p_1, \dots, p_n\}$. (ii) Montrez à l'aide du *lemme d'évitement* (*prime avoidance*, [Ei], lemma 3.3) et de 3.4.4(2) que le morphisme $A \to A_{p_1} \times \cdots \times A_{p_n}$ est injectif. (iii) Concluez.

3.5 Schémas arithmétiques [Cette section sera vue plus tard si le temps le permet]

Nous donnons deux exemples de schémas sur $\operatorname{Spec}(\mathbb{Z})$ qui permettent d'avoir un bref aperçu sur :

— la manière dont la théorie algébrique des nombres se plonge dans le monde des schémas ;

— la notion de « famille d'objets » en géométrie algébrique et le rôle de la platitude.

3.5.1 Un anneau d'entiers algébriques. Considérons le corps de nombres $K = \mathbb{Q}(\sqrt{3})$, son anneau d'entiers $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ et le morphisme $f : X = \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_K) \to S = \operatorname{Spec}(\mathbb{Z})$. En théorie algébrique des nombres, on cherche à comprendre comment les premiers $p \in \mathbb{Z}$ se décomposent dans $\mathcal{O}_K$, ce qui revient à étudier l'idéal $p\mathcal{O}_K$. Comme $\mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K = \mathcal{O}_K \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{F}_p$, on voit que ceci revient à étudier les fibres de f. L'invariant le plus important est le *discriminant* de K, défini en général par $\operatorname{disc}(K) = (\det(\sigma_i(\alpha_j)))^2$, où $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ est une $\mathbb{Z}$-base de $\mathcal{O}_K$ et $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ désignent les plongements $K \hookrightarrow \mathbb{C}$ (ou les éléments du groupe de Galois de $K/\mathbb{Q}$, dans le cas galoisien). Ici on prend $\{1, \sqrt{3}\}$ pour $\mathbb{Z}$-base et $\{\mathrm{id}, \sigma : \sqrt{3} \mapsto -\sqrt{3}\}$ pour liste de plongements complexes. On obtient :

$$\operatorname{disc}(K) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{3} & -\sqrt{3} \end{vmatrix}^2 = 12.$$

Comme dans 3.2.8(3), cette quantité mesure le défaut de bijectivité de l'application :

$$(\star) \qquad \begin{array}{rcl} \mathbb{Z}[\sqrt{3}] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[\sqrt{3}] & \longrightarrow & \mathbb{Z}[\sqrt{3}] \times \mathbb{Z}[\sqrt{3}] \\ a \otimes b & \longmapsto & (ab, a\sigma b). \end{array}$$

En l'occurence, après localisation en 12 c'est-à-dire après tensorisation par $\mathbb{Z}[1/12]$ celle-ci devient un isomorphisme. C'est ce fait qui est derrière la description géométrique des fibres de $X \to \operatorname{Spec}(\mathbb{Z})$. Avant de donner cette description, signalons que $\mathbb{Z}[\sqrt{3}] \simeq \mathbb{Z}[X]/(X^2-3)$ et que $\operatorname{disc}(K)$ peut aussi se calculer comme le discriminant du polynôme $X^2 - 3$. Il y a trois types de comportements possibles :

(i) si $p | \operatorname{disc}(K)$ i.e. $p = 2$ ou 3, alors p devient carré dans $\mathcal{O}_K$. Précisément $2\mathcal{O}_K = (1+\sqrt{3})^2$ et $3\mathcal{O}_K = (\sqrt{3})^2$. La fibre X_p est le spectre de $\mathbb{F}_p[X]/(X^2)$, c'est un point non réduit de corps résiduel $\mathbb{F}_p$.

(ii) si $p > 3$ et 3 est un carré modulo p, le polynôme $X^2 - 3$ se factorise dans $\mathbb{F}_p$ en produit de facteurs de degré 1. Par réciprocité quadratique, ce cas se produit lorsque p est congru à 1 ou 11 modulo 12. La fibre X_p est réunion de deux points réduits, $\mathbb{F}_p$-rationnels.

(iii) si $p > 3$ et 3 n'est pas carré modulo p, le polynôme X^2-3 est irréductible dans $\mathbb{F}_p$. Par réciprocité quadratique, ce cas se produit lorsque p est congru à 5 ou 7 modulo 12. Ici la fibre X_p est composée d'un seul point $\mathbb{F}_{p^2}$-rationnel.

L'apparition d'éléments nilpotents dans la fibre dans le cas (i) est typique du comportement de ramification. La situation est géométriquement très différente de ce qu'il se produit dans les deux derniers cas. Les cas (ii) et (iii) présentent une différence arithmétique qui se manifeste dans les corps résiduels. En revanche leur géométrie est essentiellement la même, au sens où après une extension finie de la base destinée à s'affranchir des contraintes arithmétiques, les fibres sont des réunions de deux points réduits. C'est ce que montre l'application $(\star)$.

3.5.2 Schémas sur $\mathbb{Z}$ et schémas sur $\mathbb{F}_p$. Voici un petit commentaire destiné à éclairer l'exemple de la famille de coniques qui suivra. Si p est un nombre premier, tout schéma X sur $\mathbb{F}_p$ détermine un schéma sur $\mathbb{Z}$ par composition des morphismes de structure : $X \to \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p) \to \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$. Dans un tel cas le morphisme $f : X \to \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ ne possède qu'une fibre non vide, celle située au-dessus du point $[p]$. Notons à ce propos que pour la fibre d'un morphisme $X \to S$ au-dessus d'un point s, il est habituel de parler de *fibre fermée* lorsque s est un point fermé, *fibre générique* lorsque s est un point générique, etc.

Les schémas que nous regardons dans 3.5 sont au contraire ceux dont les fibres au-dessus de $\mathbb{Z}$ varient suffisamment continuement pour donner lieu à de jolies familles d'objets. En particulier, nous voulons des $f : X \to \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ qui ne se factorisent pas par un sous-schéma fermé de $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$. Une manière de garantir cela est de demander que la fibre générique soit non vide, mais ce n'est pas suffisant parce que la somme disjointe d'un $\mathbb{Z}$-schéma à fibre générique non vide avec un $\mathbb{F}_p$-schéma est pathologique. Le concept qui donne la meilleure notion de continuité pour les fibres d'un morphisme de schémas a été isolé par Serre et Grothendieck ; il s'agit de la *platitude* (*flatness* en anglais). Nous ne ferons pas ici de développement systématique de cette notion. Nous nous contenterons de dire qu'un morphisme $X \to \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ est plat si et seulement si les anneaux de fonctions des ouverts affines $U = \mathrm{Spec}(A) \subset X$ sont sans torsion (comme $\mathbb{Z}$-modules), ou de manière équivalente, si et seulement si les anneaux locaux $\mathcal{O}_{X,x}$ sont sans torsion.

3.5.3 Une famille de coniques. Soit $f = Y^2 - X^2 - 5$ et $X = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[X,Y]/(f))$. Comme l'anneau $A = \mathbb{Z}[X,Y]/(f)$ est sans torsion, il s'agit d'une famille *plate* de coniques sur $\mathbb{Z}$. Nous ne développons pas la notion de *lissité* dans ce cours ; contentons-nous pour analyser cet exemple de dire que, comme en géométrie différentielle, le lieu où X est lisse sur $\mathbb{Z}$ est l'ensemble des points x en lesquels la matrice jacobienne $J = (\partial f/\partial X, \partial f/\partial Y)$ est de rang maximum, c'est-à-dire ici 1, ce qui signifie que dans l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$, ou de manière équivalente dans le corps résiduel $\kappa(x)$, l'un des 1-mineurs de J est inversible. Notons $x = [q]$ un point quelconque de X et $s = f(x) = [p]$ où $p = q \cap \mathbb{Z}$. Dans notre exemple, la matrice $J = (2X, 2Y)$ est de rang 1 en $x = [q]$ si et seulement si l'idéal $(2X, 2Y)$ est inclus dans q. Il est équivalent de dire que $2 \in q$ ou que $(X,Y) \subset q$. Dans le deuxième cas, l'équation f implique que $5 \in q$. On peut résumer ainsi :

- la fibre de X en $p = 2$ est singulière, son équation $f = (Y + X + 1)^2$ est celle d'une droite double (d'épaisseur 2) dans $\mathbb{A}^2_{\mathbb{F}_2}$,
- la fibre de X en $p = 5$ est singulière, son équation $f = (Y - X)(Y + X)$ est celle de la réunion de deux droites avec une intersection transverse en $x = y = 0$ dans $\mathbb{A}^2_{\mathbb{F}_5}$,
- les autres fibres, y compris la fibre générique, sont des coniques lisses.

4 Modules sur les schémas

Le foncteur Spectre permet de plonger la catégorie des anneaux dans celle des schémas. De même, on peut plonger la catégorie des modules sur un anneau dans une catégorie de modules sur les schémas, et cette notion joue un rôle aussi fondamental du côté algébrique (anneaux) que du côté géométrique (schémas).

4.1 Modules sur les espaces annelés

Soit $(X, \mathcal{O}_X)$ un espace annelé. Pour la définition suivante, on notera que si $\mathscr{F}, \mathscr{G}$ sont deux faisceaux, alors le préfaisceau produit $\mathscr{F} \times \mathscr{G}$ est un faisceau et définit donc le faisceau produit.

4.1.1 Définition. On appelle *faisceau de $\mathcal{O}_X$-modules* ou simplement *$\mathcal{O}_X$-module* un faisceau de groupes abéliens $\mathscr{F}$ sur X muni d'un morphisme de faisceaux $\mathcal{O}_X \times \mathscr{F} \to \mathscr{F}$ satisfaisant les axiomes d'un module sur un anneau. Autrement dit, pour tout ouvert $U \subset X$ le groupe abélien $\mathscr{F}(U)$ est muni d'une structure de $\mathcal{O}_X(U)$-module de telle sorte que la loi externe pour les applications de restriction $\mathscr{F}(V) \to \mathscr{F}(U)$ est compatible aux applications $\mathcal{O}_X(V) \to \mathcal{O}_X(U)$, pour toute inclusion d'ouverts $U \subset V$. On note $\mathrm{Mod}(\mathcal{O}_X)$, ou parfois simplement $\mathrm{Mod}(X)$, la catégorie des $\mathcal{O}_X$-modules.

Le noyau, le conoyau, l'image d'un morphisme de $\mathcal{O}_X$-modules est un $\mathcal{O}_X$-module. Le quotient d'un $\mathcal{O}_X$-module par un sous-$\mathcal{O}_X$-module est un $\mathcal{O}_X$-module. Une somme directe, ou un produit direct de $\mathcal{O}_X$-modules est un $\mathcal{O}_X$-module.

Si $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ sont deux $\mathcal{O}_X$-modules, alors le faisceau associé au préfaisceau $U \mapsto \mathscr{F}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathscr{G}(U)$ est un $\mathcal{O}_X$-module appelé *produit tensoriel de $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$*.

Soit $f : X \to Y$ un morphisme d'espaces annelés. Si $\mathscr{F}$ est un $\mathcal{O}_X$-module, le faisceau $f_*\mathscr{F}$ est naturellement un $f_*\mathcal{O}_X$-module et le morphisme $f^\sharp : \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$ permet de le voir comme un $\mathcal{O}_X$-module. Si $\mathscr{G}$ est un $\mathcal{O}_Y$-module, le faisceau $f^{-1}\mathscr{G}$ est naturellement un $f^{-1}\mathcal{O}_Y$-module. Le morphisme $f^{-1}\mathcal{O}_Y \to \mathcal{O}_X$ déduit de $f^\sharp$ par adjonction permet de définir le $\mathcal{O}_X$-module $f^*\mathcal{G} := f^{-1}\mathcal{G} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X$. On a ainsi défini des foncteurs image directe $f_* : \mathrm{Mod}(\mathcal{O}_X) \to \mathrm{Mod}(\mathcal{O}_Y)$ et image inverse $f^* : \mathrm{Mod}(\mathcal{O}_Y) \to \mathrm{Mod}(\mathcal{O}_X)$.

4.1.2 Proposition (Adjonction (f^{-1}, f_*)). Soit $f : X \to Y$ un morphisme d'espaces annelés. Alors on a une bijection canonique, fonctorielle en $\mathscr{F} \in \mathrm{Mod}(X)$ et $\mathscr{G} \in \mathrm{Mod}(Y)$:

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}(X)}(f^*\mathscr{G}, \mathscr{F}) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}(Y)}(\mathscr{G}, f_*\mathscr{F}).$$

Preuve : Exercice. □

4.2 Modules quasi-cohérents sur les schémas

Pour tout anneau A, un module M définit un $\mathcal{O}_X$-module sur $X = \mathrm{Spec}(A)$ par le même procédé naturel que celui qui nous a permis de définir le faisceau de fonctions $\mathcal{O}_X$. Pour tout $f \in A$, on note classiquement $M[1/f]$ ou M_f le localisé de M par rapport à la partie multiplicative $S = \{1, f, f^2, \dots\}$. C'est un A_f-module.

4.2.1 Proposition. *Sur $X = \mathrm{Spec}(A)$, les données suivantes :*

(1) *$\mathscr{F}(D(f)) = M_f$ pour tout $f \in A$,*

(2) *$\mathrm{res}_{D(g),D(f)} : M_g \to M_f$ égal à l'application naturelle, pour toute inclusion $D(f) \subset D(g)$,*

définissent un $\mathscr{B}$-faisceau. On note $\widetilde{M}$ le faisceau qu'il détermine. Tout morphisme de A-modules $u : M \to N$ définit un morphisme de $\mathcal{O}_X$-modules $\widetilde{u} : \widetilde{M} \to \widetilde{N}$.

Preuve : La preuve est la même que celle de 1.6.1. □

4.2.2 Proposition. *Soit A un anneau et M, N deux A-modules. Les applications*

$$\mathrm{Hom}_A(M,N) \underset{\Gamma}{\overset{u\mapsto\widetilde{u}}{\rightleftarrows}} \mathrm{Hom}_X(\widetilde{M},\widetilde{N})$$

sont des bijections inverses l'une de l'autre.

Preuve : Soit $u : M \to N$ un morphisme de A-modules et $\varphi = \widetilde{u}$. L'égalité $u = \Gamma(\varphi)$ découle de la définition. Soit $\varphi : \widetilde{M} \to \widetilde{N}$ un morphisme de $\mathcal{O}_X$-modules et $u = \Gamma(\varphi) = \varphi(X)$. Par compatibilité de φ aux restrictions, pour tout ouvert principal $U = D(f)$, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\varphi(X)"] \arrow[d] & N \arrow[d] \\ M_f \arrow[r, "\varphi(U)"] & N_f. \end{tikzcd}$$

Ceci montre que $\varphi(U)(m) = u(m)$ pour tout $m \in M$. Comme $\varphi(U)$ est un morphisme de A_f-modules, on a alors $\varphi(U)(m/f^n) = u(m)/f^n$ pour tous $m \in M$, $n \geqslant 0$. Ceci montre que $\varphi = \widetilde{u}$. $\square$

4.2.3 Exercice. Soit A un anneau et $X = \mathrm{Spec}(A)$.

(1) Le foncteur tilde : $\mathrm{Mod}(A) \to \mathrm{Mod}(\mathcal{O}_X)$, $u \mapsto \widetilde{u}$ est exact : si $M \to N \to P$ est une suite exacte de A-modules, alors $\widetilde{M} \to \widetilde{N} \to \widetilde{P}$ est une suite exacte de $\mathcal{O}_X$-modules.

(2) Le foncteur tilde préserve les noyaux, les conoyaux et les images : le noyau du tilde est le tilde du noyau, etc. (Fabriquer une application naturelle de $(\ker(u))^\sim$ vers $\ker(\widetilde{u})$ et montrer que c'est un isomorphisme, etc.)

(3) Le foncteur tilde préserve les sommes directes arbitraires.