Introduction à la Géométrie Algébrique. Le langage des schémas

Cours du 13 octobre 2015

2.6.11 Remarque. Dans la construction du produit fibré $X \times_S Y$ par recollement, un point décisif est l'unicité à unique isomorphisme près qui est assurée par la propriété universelle du produit fibré. C'est ce qui assure l'identification des produits fibrés $X_{i,j} \times_S Y_{k,l}$ dans quatre schémas $X_\alpha \times_S Y_\beta$, dans la deuxième étape de la preuve du théorème 2.6.6. De la même manière, le recollement qui permet de fabriquer l'espace affine relatif $\mathbb{A}^n_S$ est simplifié si on utilise sa propriété universelle dans la catégorie des S-schémas Sch/S. Pour la formuler, il faut comprendre que $\mathbb{A}^n_S$ est donné avec n fonctions coordonnées $t_1, \dots, t_n$. La propriété est alors : pour tout S-schéma X et tout n-uplet de fonctions $f_1, \dots, f_n \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$, il existe un unique morphisme de S-schémas $u : X \to \mathbb{A}^n_S$ tel que $f_i = u^\sharp(t_i)$ pour tout i (c'est une autre manière de dire la propriété de l'exercice 2.6.8). Armé de cette propriété universelle, on obtient (presque) gratuitement que la préimage d'un ouvert quelconque $V \subset S$ dans $\mathbb{A}^n_S$ s'identifie canoniquement à $\mathbb{A}^n_V$.

A contrario, en l'absence d'une propriété garantissant l'unicité en un sens très fort, le recollement peut être délicat. En conséquence, on peut douter du fait que la construction de l'espace projectif sur un schéma soit aussi facile qu'annnoncé dans [EH], I.2.4 (« This is straightforward ») sachant que la propriété universelle de l'espace projectif est donnée seulement dans [EH], III.2.5.

2.6.12 Fibres, intersections, diagonales, égalisateurs. L'existence de produits fibrés de schémas a pour conséquence que certains objets habituels en géométrie ont un sens naturel comme schémas. Nous donnons quatre exemples.

(1) Soit $f : X \to Y$ un morphisme de schémas. Soit $y \in Y$ un point vu comme un morphisme de schémas $\mathrm{Spec}(\kappa(y)) \to Y$, *cf* 2.3.7. La *fibre de f en y*, notée $f^{-1}(y)$ ou X_y, est par définition le schéma $X \times_Y \mathrm{Spec}(\kappa(y))$.

(2) Soient Y, Z deux sous-schémas d'un schéma X. L'*intersection de Y et Z dans X*, notée $Y \cap Z$, est par définition le schéma $Y \times_X Z$.

(3) Soit $f : X \to S$ un morphisme de schémas. La *diagonale relative de X/S* ou *diagonale du S-schéma X* est par définition le morphisme $\Delta_{X/S} : X \to X \times_S X$ dont les deux composantes sont $\mathrm{id} : X \to X$.

(4) Soient $f, g : X \to Y$ deux morphismes de schémas de mêmes source et but. Soit $(f,g) : X \to Y \times Y$ le morphisme de composantes f et g. Soit $\Delta : Y \to Y \times Y$ la diagonale de Y. L'*égalisateur de f et g* est par définition le schéma $X \times_{(f,g),Y\times Y,\Delta} Y$.

2.6.13 Exercice. (1) On considère le morphisme d'élévation à la puissance n-ième dans la droite affine complexe, plus précisément le morphisme $f : \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}} \to \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$ donné par le morphisme de $\mathbb{C}$-algèbres $\mathbb{C}[t] \to \mathbb{C}[t]$ qui envoie t sur t^n. Calculez la fibre au sens des schémas au-dessus d'un point fermé.

(2) Dans le plan affine complexe $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$, calculez l'intersection au sens des schémas de la parabole d'équation $y = x^2$ et d'une droite horizontale d'équation $y = a$, $a \in \mathbb{C}$.

(3) Calculez la diagonale relative du $\mathbb{C}$-schéma $\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$. Calculez la diagonale relative de l'immersion donnée par un ouvert affine principal $D(f) \hookrightarrow \mathrm{Spec}(A)$. Calculez la diagonale relative d'un monomorphisme de schémas.

3 Exemples de schémas

Dans la section 3.1 nous montrons comment les variétés et ensembles algébriques classiques s'identifient aux schémas de type fini, réduits, sur un corps, algébriquement clos. Nous montrons ensuite la diversité des schémas plus généraux en donnant des exemples obtenus en enlevant l'un après l'autre les qualificatifs séparés par des virgules dans la phrase précédente. Précisément, nous donnons des exemples de schémas sur un corps non algébriquement clos, puis de schémas qui ne sont pas de type fini sur une base (nous prendrons l'exemple des schémas *locaux*), puis de schémas non réduits, et enfin de schémas arithmétiques i.e. sur une base qui n'est pas un corps, comme un anneau d'entiers dans un corps de nombres.

3.1 Variétés classiques

3.1.1 Variétés abstraites et variétés quasi-projectives. Dans 1.1.1, pour simplifier nous n'avons parlé que d'ensembles algébriques affines, fermés dans l'espace affine $\mathbb{A}^n(k)$ sur un corps algébriquement clos. Les géomètres étudiaient également les ensembles algébriques (quasi-)projectifs i.e. (localement) fermés dans l'espace projectif $\mathbb{P}^n(k)$. La notion de quasi-projectivité existe aussi pour les schémas : il s'agit des schémas qui sont sous-schémas d'un espace projectif. Le livre de A. Weil, *Foundations of Algebraic Geometry* publié en 1946 a introduit les ensembles algébriques abstraits, que l'on peut définir comme des espaces topologiques X possédant un recouvrement ouvert par des ensembles algébriques affines X_i. Un morphisme $f : X \to Y$ entre deux tels ensembles est une application continue telle qu'il existe des recouvrements ouverts $X = \cup X_i$, $Y = \cup Y_j$ par des ensembles algébriques affines $X_i \subset \mathbb{A}^{n_i}(k)$ et $Y \subset \mathbb{A}^{m_j}(k)$, et des applications à composantes polynomiales $f_{i,j} : \mathbb{A}^{n_i}(k) \to \mathbb{A}^{m_j}(k)$ satisfaisant $f_{i,j}(X_i) \subset Y_j$ et $f_{|X_i} = f_{i,j}$.

La théorie des schémas englobe ces variétés classiques. Ce fait est résumé dans l'énoncé suivant. Pour en faciliter la lecture, rappelons que les variétés sont les ensembles algébriques irréductibles et que les schémas de type fini sur k ont été définis dans 2.4.3.

3.1.2 Théorème. *Soit k un corps algébriquement clos. Il existe un foncteur pleinement fidèle de la catégorie des ensembles algébriques (abstraits) sur k dans la catégorie des k-schémas, qui induit les équivalences de catégories suivantes :*

$$\begin{array}{ccc}
\{\textit{ensembles algébriques abstraits}\} & \xrightarrow{\sim} & \{k\textit{-schémas de type fini réduits}\} \\
\bigcup & & \bigcup \\
\{\textit{ensembles algébriques quasi-projectifs}\} & \xrightarrow{\sim} & \{k\textit{-schémas quasi-projectifs réduits}\} \\
\bigcup & & \bigcup \\
\{\textit{variétés algébriques quasi-projectives}\} & \xrightarrow{\sim} & \{k\textit{-schémas quasi-projectifs intègres}\}
\end{array}$$

Preuve : Le Nullstellensatz de Hilbert affirme que tout ensemble algébrique affine X détermine une k-algèbre de type fini réduite $A = \Gamma(X)$ telle que $X = \mathrm{Spm}(A)$. En particulier $X = \mathrm{Spm}(A)$ détermine le schéma $X' = \mathrm{Spec}(A)$. De plus, une inclusion ouverte d'ensembles algébriques affines $i : X_1 \to X_2$ induit un morphisme de k-algèbres $A_2 \simeq A_1$ et une immersion ouverte de schémas $i' : X_1' \simeq X_2'$, telle que i est un isomorphisme si et seulement si i' est un isomorphisme. Si X est un ensemble algébrique abstrait quelconque, choisissons un recouvrement ouvert par des ensembles algébriques affines X_i, notons $X_{i,j} = X_i \cap X_j$ et soit $\varphi_{i,j} : X_{i,j} \to X_{j,i}$ l'identité de $X_i \cap X_j$. Par ce qui précède, ces données donnent naissance à une famille de schémas X'_i et de sous-schémas ouverts $X'_{i,j} \subset X'_i$ avec des isomorphismes $\varphi'_{i,j} : X'_{i,j} \to X'_{j,i}$ qui satisfont clairement les conditions de recollement. On note X' le schéma obtenu par recollement. Il n'est pas difficile de construire de même le morphisme de schémas $f' : X_1 \to X_2$ associé à un morphisme d'ensembles algébriques $f : X'_1 \to X'_2$. On a ainsi définit le foncteur annoncé. Le fait que ce foncteur soit pleinement fidèle provient du fait que la bijection $\mathrm{Hom}(X_1, X_2) \simeq \mathrm{Hom}(A_2, A_1) \simeq \mathrm{Hom}(X'_1, X'_2)$ donnée par le Nullstellensatz pour X_1, X_2 affines, s'étend par recollement au cas d'ensembles algébriques quelconques. Le fait que l'image essentielle de ce foncteur soit égale à la sous-catégorie pleine des k-schémas de type fini réduits peut se prouver en construisant un foncteur inverse $X' \mapsto X'$ par le même procédé que pour le foncteur direct, i.e. en définissant $X' \mapsto A = \Gamma(X', \mathcal{O}_{X'}) \mapsto X = \mathrm{Spm}(A)$ dans le cas affine et en recollant. Le fait qu'ensembles algébriques quasi-projectifs et k-schémas quasi-projectifs réduits se correspondent provient essentiellement du fait que $(\mathbb{P}^n(k))' = \mathbb{P}^n_k$, i.e. le schéma associé à la variété algébrique classique $\mathbb{P}^n(k)$ est le schéma $\mathbb{P}^n_k$. Le fait que les variétés correspondent aux schémas intègres provient du fait qu'un schéma réduit est irréductible si et seulement s'il est intègre. $\square$

On notera que, comme on l'a déjà dit, l'inclusion $\mathrm{Spm}(A) \hookrightarrow \mathrm{Spec}(A)$ identifie $\mathrm{Spm}(A)$ à l'ensemble des points fermés, ou fermés irréductibles minimaux, de $\mathrm{Spec}(A)$. Plus généralement, un ensemble algébrique abstrait X peut se voir comme l'ensemble des points fermés du support $|X'|$ de son schéma associé ; et le support $|X'|$ d'un k-schéma de type fini réduit peut se voir comme l'ensemble des sous-variétés de la variété classique correspondante X.

3.1.3 Exercice. Soit k un corps algébriquement clos. On considère la variété algébrique classique $\mathbb{A}^1(k) \smallsetminus \{0\} = k^*$, complémentaire du point origine 0 dans la droite affine sur k. Munie de la multiplication dans k^*, c'est un groupe algébrique qu'on l'appelle le *groupe multiplicatif* de k et qu'on note $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}(k)$.

(1) La variété k^* est-elle réduite ? quasi-projective ? intègre ?

(2) Décrivez le k-schéma de type fini $\mathbb{G}_{\mathrm{m},k}$ associé par l'équivalence de 3.1.2 à $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}(k)$.

(3) Décrivez en termes schématiques les morphismes qui donnent la structure de « schéma en groupes » i.e. la multiplication $\mathbb{G}_{\mathrm{m},k} \times_{\mathrm{Spec}(k)} \mathbb{G}_{\mathrm{m},k} \to \mathbb{G}_{\mathrm{m},k}$ et le morphisme qui donne la section neutre $\mathrm{Spec}(\mathbb{C}) \to \mathbb{G}_{\mathrm{m},\mathbb{C}}$.

(3) Pour tout n entier, calculez le morphisme d'élévation à la puissance n-ième, au sens de la multiplication itérée dans ce schéma en groupes.

(4) Le noyau du morphisme de puissance n-ième, défini comme un égalisateur convenable (cf 2.6.12), est noté $\mu_{n,k}$ et appelé *schéma en groupes des racines n-ièmes de l'unité*. Donnez sa définition précisément et décrivez-le : quel est son espace topologique sous-jacent ? Est-il affine, irréductible, réduit ?

3.2 Schémas sur un corps non algébriquement clos

Nous allons donner des exemples de schémas sur un corps k qui illustrent trois caractéristiques de la situation où k possède une arithmétique intéressante, c'est-à-dire n'est pas algébriquement clos :

— la présence ou non de points rationnels,

— la possibilité que le schéma soit défini sur un certain sous-corps,

— le fait que certaines propriétés soient perdues par changement de base à une clôture algébrique, et la nécessité de considérer les propriétés *géométriques*.

On fixe donc un corps k. Tout k-schéma X est muni d'un morphisme $X \to \mathrm{Spec}(k)$ appelé « morphisme de structure ». Les anneaux $\mathcal{O}_X(U)$ de fonctions régulières sur des ouverts, les anneaux locaux et les corps résiduels de points $x \in X$ sont des k-algèbres.

Un point rationnel du sous-schéma fermé de $\mathbb{A}^n$ défini par des polynômes en n variables $f_1, \dots, f_r$ doit correspondre à une solution $a = (a_1, \dots, a_r)$ dans k^r du système $f_1(x_1, \dots, x_n) = \dots = f_r(x_1, \dots, x_n) = 0$. Si on pose $A = k[x_1, \dots, x_n]/(f_1, \dots, f_r)$, une telle solution détermine un unique morphisme de k-algèbres $A \to k$ c'est-à-dire un unique morphisme $\mathrm{Spec}(k) \to X = \mathrm{Spec}(A)$. Si on veut considérer aussi les solutions $a \in l^r$ pour des extensions l/k, on est amené à la définition suivante.

3.2.1 Définition. Soit l/k une extension de corps. Un *point l-rationnel*, ou *l-point*, ou *point à valeurs dans l*, est un morphisme de k-schémas $\mathrm{Spec}(l) \to X$. On dit parfois *point rationnel* au lieu de *point k-rationnel*. On note $X(l) = \mathrm{Hom}_k(\mathrm{Spec}(l), X)$ l'ensemble des points l-rationnels de X.

3.2.2 Remarques. (1) Sur un corps algébriquement clos, cette notation est cohérente avec les notations $\mathbb{A}^n(k)$ et $\mathbb{P}^n(k)$ que nous avons utilisées pour désigner l'espace affine et l'espace projectif en tant que variétés algébriques classiques, qui sont les ensembles de points k-rationnels des schémas $\mathbb{A}^n_k$ et $\mathbb{P}^n_k$. (Et la notation évidemment redondante $\mathbb{A}^n_k(k)$ est simplifiée en $\mathbb{A}^n(k)$.)

(2) Pour toute extension de corps l/k, notons $X_l = X \otimes_k l = X \times_{\mathrm{Spec}(k)} \mathrm{Spec}(l)$ qui est naturellement un l-schéma. On a alors une bijection naturelle entre $X(l)$ et $X_l(l)$, i.e. entre points l-rationnels du k-schéma X et points rationnels du l-schéma X_l.

(3) Si l/k est une extension galoisienne, le groupe de Galois $G = \mathrm{Gal}(l/k)$ agit à droite sur $X(l)$ de la manière suivante : à tout k-automorphisme $\sigma : l \to l$ est associé un morphisme $\mathrm{Spec}(l) \to \mathrm{Spec}(l)$ et on agit sur $\mathrm{Hom}_k(\mathrm{Spec}(l), X)$ par précomposition.

3.2.3 Proposition. *Soit k un corps et X un k-schéma localement de type fini. Soit $\overline{k}$ une clôture algébrique, et notons $G_l := \mathrm{Gal}(l/k)$ le groupe des k-automorphismes d'une extension $k \subset l \subset \overline{k}$. Alors, l'ensemble $|X|_0$ des points fermés de X est dense et on a :*

$$|X|_0 = \bigcup_{\substack{l/k \text{ finie} \\ \text{galoisienne}}} X(l)/G_l = X(\overline{k})/G_{\overline{k}}.$$

Autrement dit, les points fermés de X sont en bijection avec les orbites de $X(\overline{k})$ sous l'action du groupe de Galois.

Le symbole $\cup$ qui apparaît désigne soit une réunion dans $X(\overline{k})/G_{\overline{k}}$ soit une limite inductive.

Preuve : L'énoncé est local sur X donc on peut remplacer X par un ouvert affine et donc supposer $X = \mathrm{Spec}(A)$ affine. Dire que l'ensemble des points fermés de X est dense revient à dire qu'un idéal $I \subset A$ qui contient tous les idéaux maximaux est nilpotent. Ceci découle du fait que les algèbres de type fini sur un corps sont des *anneaux de Jacobson*, i.e. tout premier est intersection d'idéaux maximaux (plus généralement, la propriété de Jacobson est stable par passage à une algèbre de type fini). Ce résultat est une forme forte du Nullstellensatz et on le trouve dans [Mat], th. 5.5 ou [Ei], th. 4.19.

Maintenant soit $x \in X$ un point fermé, i.e. $x = [m]$ avec m maximal. Alors le corps résiduel $l := \kappa(x) = A/m$ est une extension finie de k d'après [Mat], th. 5.4. Ceci détermine un l-point de X puis une orbite sous G_l. Réciproquement, considérons une orbite de $X(l)$ sous G_l. Elle est représentée par un morphisme de k-algèbres $\varphi : A \to l$. Le noyau $m = \ker(\varphi)$ est un idéal maximal de A, qui ne dépend pas du choix d'un élément dans l'orbite de φ puisque $\ker(\sigma\varphi) = \ker(\varphi)$. Il détermine un point fermé de X.

Enfin, le fait que tout $\overline{k}$-point de X se factorise par un l-point pour une extension finie l/k provient du fait que si $\varphi : A \to \overline{k}$ est un morphisme de k-algèbres, alors l'image est une k-algèbre intègre, algébrique et de type fini, donc un corps extension finie de k. On en déduit que l'ensemble $|X|_0$ se décrit aussi comme $X(\overline{k})/G_{\overline{k}}$. $\square$

3.2.4 Exemple. Le groupe de Galois de $\mathbb{C}/\mathbb{R}$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et engendré par la conjugaison complexe. Dans le $\mathbb{R}$-schéma $\mathbb{A}^1_{\mathbb{R}} = \mathrm{Spec}(\mathbb{R}[t])$, le point déterminé par l'idéal maximal (t^2+1) correspond à l'orbite du $\mathbb{C}$-point $\mathbb{R}[t] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto i$. L'autre point de l'orbite est le $\mathbb{C}$-point $\mathbb{R}[t] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto -i$.

3.2.5 Remarque. On trouvera une étude plus fine du lien entre le k-schéma X et le $\overline{k}$-schéma $X \otimes_k \overline{k}$ dans Mumford [Mu], II, § 4.

3.2.6 Exercice. (1) Soit k un corps algébriquement clos. Montrez que dans la catégorie des ensembles algébriques classiques, les produits existent, et que ensemblistement l'ensemble algébrique produit $X \times Y$ est le produit des ensembles algébriques X et Y. (On pourra commencer par le cas affine.)

(2) Montrez que l'équivalence de catégories du théorème 3.1.2 est compatible au produit.

(3) Montrez que si k n'est pas algébriquement clos, il est faux en général que l'ensemble des points fermés d'un schéma produit $X \times_{\mathrm{Spec}(k)} Y$ est égal au produit des ensembles de points fermés de X et Y. (On pourra regarder le cas où $X = Y = \mathbb{A}^1_{\mathbb{R}}$ dans [EH], II.2.)

3.2.7 Définition. Soit k un corps et X un k-schéma. On dit que X est *géométriquement réduit* (resp. *irréductible*, *intègre*, *connexe*) si $X \otimes_k \overline{k}$ est réduit (resp. irréductible, intègre, connexe).

Il est équivalent de demander que $X \otimes_k l$ soit réduit (irréductible, intègre, connexe) pour toute extension finie l/k. On montre facilement que si X est géométriquement *truc*, alors il est *truc*. Par exemple, dans le cas géométriquement réduit, on se ramène au cas affine et le résultat découle du fait qu'on a une injection d'anneaux $A \hookrightarrow A \otimes_k \overline{k}$ donc A est réduit si $A \otimes_k \overline{k}$ l'est.

Nous sommes plutôt intéressés par des exemples qui montrent que les assertions réciproques ne sont pas vraies en général.

3.2.8 Exemples. (1) Soit k un corps non parfait et $a \in k$ un élement qui n'est pas une puissance p-ième. Soit $l = k[t]/(t^p - a)$ qui est un corps, extension purement inséparable de degré p de k. Posons $X = \mathrm{Spec}(l)$. Alors X est réduit (et même intègre). Soit $\alpha \in l$ une racine p-ième de a, par exemple la classe de t. On a :

$$l \otimes_k l = l[t]/(t^p - a) = l[t]/((t-\alpha)^p).$$

Cet anneau n'est pas réduit, donc $X \otimes_k l = \mathrm{Spec}(l \otimes_k l)$ non plus. De manière générale, ce sont les extensions inséparables de corps qui sont responsables de la perte du caractère réduit par extension de corps.

(2) Soit $k = \mathbb{Q}$ et X le sous-schéma fermé de $\mathbb{A}^2_{\mathbb{Q}}$ d'équation $x^2 - 2y^2 = 0$. Alors X est intègre, mais comme $x^2 - 2y^2 = (x + \sqrt{2}y)(x - \sqrt{2}y)$, le schéma $X \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ n'est pas irréductible. De manière générale, ce sont les extensions séparables de corps qui sont responsables de la perte du caractère irréductible par extension de corps.

(3) Soit l/k une extension finie galoisienne non triviale de groupe de Galois G. On a un morphisme d'anneaux $u : l \otimes_k l \to \prod_{\sigma \in G} l$ défini sur les tenseurs irréductibles par $a \otimes b \mapsto (a\sigma(b))_{\sigma \in G}$. On peut voir que u est un isomorphisme d'au moins deux manières :

— on observe que u peut être vu comme une application linéaire entre deux l-espaces vectoriels de dimension $n = [l : k]$, puisque $u(a \otimes b) = au(1 \otimes b)$. Comme l/k est séparable, elle est monogène et on peut en choisir un générateur α. Alors $\{1 \otimes 1, 1 \otimes \alpha, \dots, 1 \otimes \alpha^{n-1}\}$ est une l-base de $l \otimes_k l$. Notons $G = \{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$. Le déterminant de u dans les bases convenables est le déterminant de Vandermonde $\det(\sigma_i(\alpha)^j) = \prod_{i<j}(\sigma_j(\alpha) - \sigma_i(\alpha))$. Il est non nul.

— si on choisit un polynôme $P \in k[t]$ dont l est le corps de décomposition, alors l est engendré par une racine β de P et ses conjugués $\sigma_i(\beta)$. Le morphisme u s'identifie au morphisme :

$$l \otimes_k l \simeq l[t]/(P(t)) \simeq \prod_{\sigma \in G} l[t]/(t - \sigma(\beta)) \simeq \prod_{\sigma \in G} l.$$

Considérons le k-schéma $X = \mathrm{Spec}(l)$. Il résulte de ce qui précède que $X \otimes_k l = \mathrm{Spec}(l \otimes_k l) = \amalg_{\sigma \in G} \mathrm{Spec}(l)$. Ainsi X est connexe, mais pas géométriquement connexe. Ici aussi, les extensions séparables de corps causent la perte du caractère connexe par extension de corps.

3.2.9 Définition. Soit X un schéma sur un corps k. On dit que X *peut être défini sur un sous-corps* $k_0 \subset k$ s'il existe un k_0-schéma X_0 et un isomorphisme de k-schémas $X \simeq X_0 \otimes_{k_0} k$.

Le k_0-schéma X_0, s'il existe, n'est pas unique en général. Voici un exemple.

3.2.10 Exemple. La droite projective complexe $X = \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ peut être définie sur $\mathbb{R}$ d'au moins deux manières. Notons $X_0 \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ la conique projective plane réelle d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 0$. On a $X_0 \not\simeq \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ car la conique X_0 ne possède pas de point $\mathbb{R}$-rationnel. Il est clair que $X \simeq \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ et nous allons voir que l'on a aussi $X \simeq X_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. Ce fait classique provient de la paramétrisation des coniques ayant un point rationnel. Plus précisément, si P est un point rationnel d'une conique projective plane C, les droites D_t passant par P sont paramétrées par les points $t = (u : v)$ d'une droite projective. Elles intersectent la conique en un unique point Q distinct de P, sauf la tangente en P pour laquelle on prend $Q = P$. Ceci fournit l'isomorphisme désiré. Explicitement, en prenant le point $\mathbb{C}$-rationnel $P = (i : 1 : 0)$ dans la conique $X_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, on obtient l'isomorphisme :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} & \longrightarrow & X_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \\ (u : v) & \longmapsto & (i(u^2 + v^2) : u^2 - v^2 : 2uv) \\ (y - ix : z) & \longleftarrow\!\!\shortmid & (x : y : z) \end{array}$$

La présence inévitable du i montre qu'un isomorphisme $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}} \to X_0$ peut être défini après changement de base à $\mathbb{C}$, alors qu'il n'en existe pas sur $\mathbb{R}$.

3.3 Schémas locaux

De nombreux schémas ne sont pas de type fini sur une base (par exemple un corps), témoignant de comportements très variés. Nous allons donner l'exemple des schémas locaux et montrer comment ils permettent d'obtenir de l'information fine concernant diverses notions de voisinages d'un point.

3.3.1 Définition. On appelle *schéma local* un schéma affine, spectre d'un anneau local.

Si X est local, spectre d'un anneau local A, il possède un unique point fermé x dont tous les autres points sont des générisations. L'anneau local de x dans X s'identifie naturellement à A.

Si X est un schéma arbitraire, on peut associer un schéma local X_x à tout point x.

3.3.2 Définition. On appelle *schéma local de X en x* le schéma $X_x = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$.

On peut « calculer » l'anneau local de la manière suivante. Dans la limite qui définit

$$\mathcal{O}_{X,x} = \varinjlim_{U;\, U \ni x} \mathcal{O}_X(U),$$

on peut se restreindre aux voisinages ouverts inclus dans un voisinage ouvert *affine* fixé $U_0 = \mathrm{Spec}(A)$, car ceux-ci forment un système cofinal de tous les voisinages ouverts de x. On peut ensuite se restreindre aux ouverts affines distingués dans U_0, i.e. $U = D(f)$, pour la même raison. En notant $x = [p]$ pour un premier $p \subset A$, on obtient :

$$\mathcal{O}_{X,x} = \varinjlim_{f;\ f \notin p} A_f = A_p.$$

3.3.3 Proposition. (1) *Il existe un unique morphisme de schémas $j_x : X_x \to X$ qui envoie le point fermé $t \in X_x$ sur x et tel que $j_x^\sharp : \mathcal{O}_{X,x} \to \mathcal{O}_{X_x,t}$ est l'identité (via l'identification naturelle $\mathcal{O}_{X_x,t} = \mathcal{O}_{X,x}$).*

(2) *Le morphisme j_x induit un homéomorphisme entre $|X_x|$ et l'ensemble des générisations de x dans X. En particulier $|X_x|$ s'identifie à l'ensemble des fermés irréductibles de X contenant x.*

(3) *Le morphisme j_x est un monomorphisme de schémas.*

Preuve : Fixons un voisinage ouvert affine $U = \mathrm{Spec}(A)$ de $x = [p]$.

(1) L'application canonique $A \to A_p = \mathcal{O}_{X,x}$ définit en passant au spectre un morphisme $X_x \to U$. Soit $j_x : X_x \to U \to X$ la composée. Soit $f : X_x \to X$ un morphisme qui envoie t sur x. Comme f préserve les générisations (voir exercice 2.3.6), pour tout $y \in X_x$ l'image $f(y)$ est une générisation de x, donc appartient à U. Ainsi f est induit par un morphisme de schémas affines $X_x \to U$, lui-même déterminé par le morphisme d'anneaux correspondants. Il s'ensuit que si $f_x^\sharp$ est prescrit égal à l'identité, nécessairement $f = j_x$. Ceci démontre que j_x est unique et en particulier ne dépend pas du choix de U.

(2) Comme $|X_x| \subset U$, on peut remplacer X par U. On sait que dans $\mathrm{Spec}(A)$, les générisations de $x = [p]$ sont les $y = [q]$ tels que $q \subset p$, voir lemme 2.3.3(4), et ces points $[q]$ correspondent naturellement aux premiers de A_p. Ceci montre que j_x induit une bijection entre $|X_x|$ et l'ensemble des générisations de x. La propriété d'homéomorphisme est laissée en exercice. La dernière assertion est une traduction de la dualité entre point et fermés irréductibles de 2.3.4.

(3) Soient $u, v : Y \to X_x$ deux morphismes tels que $j_x u = j_x v$. Comme j_x se factorise par U on obtient une égalité entre deux morphismes de Y vers U. Utilisant la description des morphismes à valeurs dans un schéma affine donnée en 1.8.7, ceci se traduit en une égalité de deux morphismes $A \to A_p \to \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y)$. Or dans la catégorie des anneaux le morphisme de localisation $A \to A_p$ est un épimorphisme. On en déduit que $u^\sharp = v^\sharp$ puis que $u = v$. Donc j_x est un monomorphisme. $\square$

Le point (2) de la proposition montre que $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$ contient beaucoup plus de points que son seul point fermé. En ceci, les schémas locaux sont très différents des schémas de type fini sur un corps (algébriquement clos ou non) dont les points fermés forment un ensemble dense.

3.3.4 Exercice. Montrez que pour tout schéma local Y de point fermé y, et tout morphisme $f : Y \to X$ tel que $f(y) = x$, il existe un unique morphisme $g : Y \to X_x$ tel que $f = j_x \circ g$. Exprimez ceci comme une propriété d'adjonction pour l'inclusion de la catégorie des schémas locaux dans une catégorie de schémas pointés.

3.3.5 Exercice. (1) Montrez que tout schéma dont l'ensemble sous-jacent possède au plus deux points est affine.

(2) Le nombre « deux » dans la question précédente est optimal : montrez que le « germe du point dédoublé » dans la droite affine avec origine dédoublée ([EH], I-44) décrit dans [EH], I-25 peut être obtenu en recollant les schémas locaux des droites Y et Z en leurs points génériques.

3.3.6 Exercice. Dessinez des éléments typiques du schéma local X_x de l'espace affine réel $X = \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ en l'origine $x = O$.