Introduction à la Géométrie Algébrique. Le langage des schémas

Cours du 6 octobre 2015

2.4 Schémas noethériens

Les propriétés de finitude d'un anneau noethérien ont pour conséquence des propriétés de finitude pour le spectre : par exemple, les chaînes de fermés irréductibles $Y_1 \subsetneq Y_2 \subsetneq Y_3 \subsetneq \dots$, qui correspondent aux chaînes d'idéaux premiers de l'anneau, sont de longueur finie. Sur un schéma général, il est clair que l'hypothèse de quasi-compacité est nécessaire pour conserver ces propriétés.

2.4.1 Définition. On dit qu'un schéma X est *localement noethérien* s'il possède un recouvrement par des ouverts affines dont les anneaux de fonctions sont noethériens. On dit qu'un schéma X est *noethérien* s'il est localement noethérien et quasi-compact.

2.4.2 Proposition. *Soit X un schéma. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) *X est localement noethérien,*

(2) *pour tout ouvert affine $U \subset X$, l'anneau $\mathcal{O}_X(U)$ est noethérien.*

Preuve : Seule l'implication (1) $\Rightarrow$ (2) mérite un argument. Soit $U = \mathrm{Spec}(A)$ ouvert affine et $\{I_k\}_{k\geqslant 0}$ une suite croissante d'idéaux de A. Utilisant le fait que X est localement noethérien et que tout localisé d'un anneau noethérien est noethérien, on voit que U peut être recouvert par des ouverts affines distingués $D(f)$ d'anneaux de fonctions A_f noethériens. De plus, par quasi-compacité de U on peut supposer ce recouvrement fini. Alors, pour tout f, la suite d'idéaux localisés $(I_k)_f$ est stationnaire, à partir d'un entier n que l'on peut supposer indépendant de f. Or, si I, J sont deux idéaux de A tels que $I_f = J_f$ pour tout f, alors $I = J$ (pour le voir, utiliser une partition de l'unité adaptée aux f^α pour un entier α bien choisi). Ceci montre que la suite I_k est stationnaire. Donc A est noethérien. □

Voici un exemple de schéma noethérien.

2.4.3 Exemple. Soit k un corps. Un schéma est *localement de type fini sur k* s'il possède un recouvrement par des ouverts affines dont les anneau de fonctions sont des k-algèbres de type fini. On dit que X est *de type fini sur k* s'il est localement de type fini et quasi-compact. Par exemple, un sous-schéma d'un espace affine $\mathbb{A}^n_k$ ou d'un espace projectif $\mathbb{P}^n_k$ est de type fini sur k.

La propriété noethérienne a un pendant topologico-combinatoire introduit dans l'exercice suivant.

2.4.4 Exercice. On dit qu'un espace topologique X est *noethérien* si toute chaîne décroissante $Y_0 \supset Y_1 \supset Y_2 \supset \dots$ de fermés est stationnaire.

(1) Soit X un espace noethérien. Montrez que (i) toute partie munie de la topologie induite est un espace noethérien (ii) X est quasi-compact (iii) X possède un nombre fini de composantes irréductibles (iv) toute composante irréductible contient un ouvert non vide de X.

(2) Montrez que le spectre d'un anneau noethérien est un espace topologique noethérien. Montrez que la réciproque est fausse en à l'aide d'un anneau non noethérien dont le spectre est ponctuel.

2.4.5 Proposition. *Tout sous-schéma d'un schéma (localement) noethérien est (localement) noethérien.*

Preuve : Supposons X localement noethérien. Si $U \subset X$ est un sous-schéma ouvert, le fait que U est encore localement noethérien est clair. Si $Y \subset X$ est un sous-schéma fermé, c'est tout aussi clair. Le cas d'un sous-schéma quelconque s'en déduit. Supposons de plus X quasi-compact. Alors il est réunion d'un nombre fini d'ouverts affines dont le spectre est un espace noethérien, d'après 2.4.2 et 2.4.4(2). On en déduit que l'espace $|X|$ lui-même est noethérien. Alors tout sous-schéma a pour support un espace noethérien, donc quasi-compact, d'après 2.4.4(1). Ceci conclut. $\square$

2.4.6 Exercice. La proposition précédente implique que tout ouvert d'un schéma noethérien est quasi-compact. On peut construire un exemple de schéma affine (donc quasi-compact) qui possède des ouverts non quasi-compacts de la manière suivante. Sur un corps k, on prend l'anneau produit $A = k^{\mathbb{N}}$. Montrez que $X = \mathrm{Spec}(A)$ contient comme ouvert le schéma non quasi-compact $U = \amalg_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Spec}(k)$, somme disjointe dénombrable de k-points. Retrouvez le fait que $U \neq X$ en expliquant pourquoi il existe un idéal premier de A qui n'est pas le noyau de l'une des projections naturelles $A \to k$.

2.4.7 Définition. Soit A un anneau. On appelle *dimension de Krull* de A et on note $\dim(A)$ le supremum des longueurs r de chaînes $p_0 \subsetneq p_1 \subsetneq \cdots \subsetneq p_r$ d'idéaux premiers de A.

Soit X un espace topologique. On appelle *dimension combinatoire* de X et on note $\dim(X)$ le supremum des longueurs r de chaînes $Y_0 \supsetneq Y_1 \supsetneq \cdots \supsetneq Y_r$ de fermés irréductibles de X.

La théorie de la dimension des anneaux noethériens est une partie très importante et subtile de l'algèbre commutative. Nous nous contentons d'en citer sans preuve quelques résultats marquants.

2.4.8 Proposition. *Soit A un anneau noethérien.*

(1) *Si A est local, alors* $\dim(A) < \infty$.

(2) *On a* $\dim(A) = \sup\{\dim(A_p),\ p \subset A \text{ premier}\}$.

(3) *Si A est une algèbre intègre de type fini sur un corps k, alors* $r = \dim(A) < \infty$ *est égal au degré de transcendance sur k du corps de fractions de A. De plus, toutes les chaînes maximales de premiers sont de longueur r.*

(4) *L'anneau A possède un nombre fini d'idéaux premiers minimaux.*

(5) *Si A est un corps alors* $\dim(A) = 0$. *Si $A = \mathbb{Z}$ alors* $\dim(A) = 1$. *Si t est une indéterminée, on a* $\dim(A[t]) = \dim(A) + 1$.

(6) *Il existe un anneau noethérien de dimension infinie.*

Preuve : Dans le livre de Eisenbud [Ei], ces résultats sont discutés dans l'introduction du chapitre 8 (notamment dans la section 8.1 qui est très intéressante), puis démontrés au fur et à mesure du chapitre. Par exemple (1) est conséquence de cor. 10.7, (3) est le th. A dans la section 13.1, (4) est le th. 3.1, (5) est cor. 10.13. Enfin pour (6) on peut trouver un exemple dans [Na], appendice A1, exemple 1 et reproduit dans [Ei], exer. 9.6 ou ici. □

2.4.9 Exercice. Montrez que $\dim(A) = \dim(A_{\text{red}})$.

2.5 Schémas réduits et intègres

2.5.1 Définition. On dit qu'un schéma X est *réduit* si pour tout ouvert $U \subset X$, l'anneau $\mathcal{O}_X(U)$ est réduit. On dit qu'un schéma est *irréductible* si l'espace topologique sous-jacent $|X|$ l'est. On dit qu'un schéma X est *intègre* si pour tout ouvert *non vide* $U \subset X$, l'anneau $\mathcal{O}_X(U)$ est intègre.

2.5.2 Exercice. Montrez que X est réduit ssi pour tout $x \in X$, l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$ est réduit.

Pour tout ouvert $U \subset X$, on note $\mathscr{N}_0(U)$ l'ensemble des fonctions nilpotentes de $\mathcal{O}_X(U)$ et $\mathscr{N}(U)$ l'ensemble des fonctions *localement* nilpotentes dans $\mathcal{O}_X(U)$. On appelle $\mathscr{N}_0$ le *préfaisceau nilradical* de $\mathcal{O}_X$ et $\mathscr{N}$ le *faisceau nilradical* de $\mathcal{O}_X$, à cause de l'exercice suivant.

2.5.3 Exercice. Montrez que :

(1) $\mathscr{N}_0(U) = \mathscr{N}(U)$ pour tout U quasi-compact.

(2) L'inclusion $i : \mathscr{N}_0 \hookrightarrow \mathscr{N}$ identifie $\mathscr{N}$ au faisceau associé à $\mathscr{N}_0$.

(3) Le faisceau d'idéaux $\mathscr{N}$ est quasi-cohérent.

(4) Si X est noethérien, $\mathscr{N}_0$ est un faisceau.

(5) Si $X = \coprod_{n\geqslant 0} \operatorname{Spec}(k[t]/(t^n))$, pour un corps k, alors $\mathscr{N}_0$ n'est pas un faisceau.

L'exemple (4) montre que $\mathscr{N}_0$ n'est pas toujours un faisceau, contrairement à ce qui est affirmé dans [EH], page 25. On peut même fabriquer un exemple dans lequel X est affine, en prenant le spectre de $A = \prod_{n\geqslant 0} k[t]/(t^n)$ et en raisonnant de la même manière que dans l'exercice 2.4.6.

2.5.4 Proposition. *Soit X un schéma et $F \subset |X|$ un fermé. Alors, il existe un plus petit sous-schéma fermé $Y \subset X$ de support F. C'est le seul sous-schéma fermé de X de support F qui soit réduit. Si $F = |X|$, ce sous-schéma fermé est le schéma réduit X_{red}, dont le faisceau d'idéaux est le nilradical $\mathscr{N}$.*

Preuve : Si $X = \operatorname{Spec}(A)$ est affine, le fermé F est de la forme $V(I)$, pour un idéal $I \subset A$. De plus, on a vu en 2.2.9 que parmi tous les idéaux qui conviennent, il y en a un qui est maximal : c'est le seul qui soit *radical* i.e. tel que $I = \sqrt{I}$. Ceci signifie que le quotient A/I est réduit, c'est-à-dire que le schéma $V(I)$ est réduit. Si X est un schéma arbitraire, sur chaque ouvert affine U on dispose par ce qui précède d'un plus petit sous-schéma fermé Y_U de support $F \cap U$. Par unicité, les sous-schémas fermés Y_U coïncident sur les intersections $U \cap V$, donc se recollent en un unique sous-schéma fermé Y qui remplit les conditions demandées. □

2.5.5 Proposition. *Un schéma est intègre si et seulement s'il est irréductible et réduit.*

Preuve : Si X n'est pas réduit, il n'est pas intègre. S'il n'est pas irréductible, il existe deux ouverts non vides disjoints U, V. Dans ce cas $\mathcal{O}_X(u \cup V) = \mathcal{O}_X(U) \times \mathcal{O}_X(V)$ n'est pas intègre, donc X n'est pas intègre.

Réciproquement, supposons X irréductible et réduit. Soit U un ouvert non vide et $f, g \in \mathcal{O}_X(U)$ tels que $fg = 0$. Alors les fermés $Z_f = \{x \in U;\ f(x) = 0 \in \kappa(x)\}$ et Z_g recouvrent X (le fait que ce sont des fermés découle de 1.8.6). Par irréductibilité, l'un des deux égale X, par exemple Z_f. Ceci signifie que le germe f_x est dans l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{X,x}$, pour tout $x \in U$. Alors dans tout ouvert affine de U la fonction f est nilpotente, donc nulle sur U par hypothèse. □

2.6 Produits fibrés

2.6.1 Produit de schémas. Le produit de variétés est une opération fondamentale ; en géométrie différentielle, c'est lui qui permet de définir la variété $\mathbb{R}^n$ à partir de $\mathbb{R}$. En géométrie algébrique, il serait bienvenu qu'il permette de définir l'espace affine $\mathbb{A}^n_k$ à partir de $\mathbb{A}^1_k$. Malheureusement, en ce qui concerne les espaces topologiques ce n'est pas du tout le cas. Par exemple, l'espace $|\mathbb{A}^2_k|$ est beaucoup plus gros que $|\mathbb{A}^1_k| \times |\mathbb{A}^1_k|$. En effet, supposant le corps k algébriquement clos pour simplifier, on a $|\mathbb{A}^1_k| = k \cup \{\eta_{\mathbb{A}^1}\}$ où $\eta_{\mathbb{A}^1}$ est le point générique, alors que $|\mathbb{A}^2_k|$ comprend k^2 (points de dimension 0), les points génériques de courbes irréductibles planes (points de dimension 1), et un point générique $\eta_{\mathbb{A}^2}$. Il y a une application continue naturelle $|\mathbb{A}^2_k| \longrightarrow |\mathbb{A}^1_k| \times |\mathbb{A}^1_k|$ décrite ainsi :

— le point fermé $(a, b) \in k^2$ est envoyé sur le couple (a, b),

— le point générique η_C d'une courbe verticale $C = \{a\} \times \mathbb{A}^1(k)$ est envoyé sur $(a, \eta_{\mathbb{A}^1})$, le point générique η_C d'une courbe horizontale $C = \mathbb{A}^1(k) \times \{b\}$ est envoyé sur $(\eta_{\mathbb{A}^1}, b)$, et le point générique η_C d'une courbe transverse est envoyé sur $(\eta_{\mathbb{A}^1}, \eta_{\mathbb{A}^1})$,

— le point générique $\eta_{\mathbb{A}^2}$ est envoyé sur $(\eta_{\mathbb{A}^1}, \eta_{\mathbb{A}^1})$.

On voit que les courbes transverses contribuent à grossir excessivement la fibre au-dessus de $(\eta_{\mathbb{A}^1}, \eta_{\mathbb{A}^1})$. En fait la bonne définition du produit est la définition *catégorique*, c'est celle que nous adoptons dans la catégorie des schémas.

2.6.2 Définition. Dans une catégorie C, le *produit* de deux objets X, Y est un objet Z muni de deux morphismes $p_1 : Z \to X$ et $p_2 : Z \to Y$ tel que pour toute paire de morphismes $u : W \to X$ et $v : W \to Y$, il existe un unique morphisme $w : W \to Z$ tel que $u = p_1 w$ et $v = p_2 w$.

2.6.3 Exercice. Démontrez que le produit $\mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}} \times \mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}$ est égal à $\mathbb{A}^2_{\mathbb{Z}}$.

2.6.4 Produit fibré de schémas. Le résultat de l'exercice ci-dessus met en évidence un phénomène curieux : on a $\dim(\mathbb{A}^2_{\mathbb{Z}}) = 3$ alors que $\dim(\mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}) + \dim(\mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}) = 4$ (rappelons-nous que $\dim(A[t]) = \dim(A) + 1$ pour A noethérien, voir 2.4.8). Ceci provient du fait que le schéma $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ est de dimension 1. Si on pose $\dim^*(X) = \dim(X) - \dim(\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})) = \dim(X) - 1$, on obtient $\dim^*(\mathbb{A}^n_{\mathbb{Z}}) = n$ et la relation

$$\dim^*(\mathbb{A}^{n+m}_{\mathbb{Z}}) = \dim^*(\mathbb{A}^n_{\mathbb{Z}}) + \dim^*(\mathbb{A}^m_{\mathbb{Z}})$$

a lieu. Pour comprendre pourquoi la définition de $\dim^*$ est naturelle, il suffit de mettre $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ à sa juste place, qui est celle d'objet terminal de la catégorie des schémas. (Rappelons qu'un *objet* *terminal* dans une catégorie C est un objet $T \in C$ tel que tout objet X possède un unique morphisme $X \to T$.) La catégorie des espaces topologiques et celle des variétés différentielles ont un objet terminal qui est le point ; c'est parce qu'il est de dimension 0 qu'il ne perturbe pas la relation $\dim(X \times Y) = \dim(X) + \dim(Y)$.

Dans une catégorie qui possède un objet terminal, le produit est un cas particulier de produit fibré. Le produit fibré porte bien son nom : c'est un produit pour des objets *fibrés au-dessus d'une base* S, et c'est pour mesurer la dimension des fibres que l'invariant $\dim^*$ est pertinent.

2.6.5 Définition. Dans une catégorie C, le *produit fibré* de deux morphismes $f : X \to S$ et $g : Y \to S$ est un objet Z muni de deux morphismes $p_1 : Z \to X$ et $p_2 : Z \to Y$ tels que $fp_1 = gp_2$, avec la propriété suivante : pour toute paire de morphismes $u : W \to X$ et $v : W \to Y$ tels que $fu = gv$, il existe un unique morphisme $w : W \to Z$ tel que $u = p_1 w$ et $v = p_2 w$. On dit que u et v sont les *composantes* de w et on note $w = (u, v)$. Lorsqu'il existe, le produit fibré est unique à unique isomorphisme près et il est noté $X \times_{f,S,g} Y$ ou simplement $X \times_S Y$.

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[dr, dashed, "w"] \arrow[drr, bend left, "v"] \arrow[ddr, bend right, "u"'] & & \\
& X \times_S Y \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & Y \arrow[d, "g"] \\
& X \arrow[r, "f"] & S
\end{tikzcd}$$

Par exemple, dans la catégorie des ensembles le produit fibré est l'ensemble $\{(x, y) ;\ f(x) = g(y)\}$ muni des deux projections naturelles.

2.6.6 Théorème. *Le produit fibré $X \times_S Y$ de deux morphismes $f : X \to S$ et $g : Y \to S$ existe dans la catégorie des schémas.*

Preuve : Premier cas : $X = \mathrm{Spec}(A)$, $Y = \mathrm{Spec}(B)$, $S = \mathrm{Spec}(R)$ tous trois affines. Dans ce cas, se donner des morphismes $u : W \to X$ et $v : W \to Y$ tels que $fu = gv$ est équivalent à se donner des morphismes d'anneaux $u' : A \to \Gamma(W, \mathcal{O}_W)$ et $v' : B \to \Gamma(W, \mathcal{O}_W)$ tels que $u'f' = v'g'$, d'après 1.8.7. Comme la somme amalgamée de A et B le long de R dans la catégorie des anneaux commutatifs unitaires est leur produit tensoriel, on en déduit qu'il existe un unique morphisme d'anneaux $w' : A \otimes_R B \to \Gamma(W, \mathcal{O}_W)$ par lequel u' et v' se factorisent. Au morphisme w' est associé un morphisme de schémas $w : W \to \mathrm{Spec}(A \otimes_R B)$. Ceci montre que $X \times_S Y = \mathrm{Spec}(A \otimes_R B)$.

Deuxième cas : seul S est affine. Choisissons des recouvrements ouverts affines $X = \cup X_i$ et $Y = \cup Y_k$ et notons $X_{i,j} = X_i \cap X_j$, $Y_{k,l} = Y_k \cap Y_l$. D'après le premier cas, les produits fibrés $Z_{i,k} := X_i \times_S Y_k$ existent. Il n'est pas difficile de voir que le produit fibré $X_{i,j} \times_S Y_{k,l}$ existe également et qu'on peut le réaliser comme un ouvert dans les schémas $Z_{i,k}$, $Z_{i,l}$, $Z_{j,k}$ et $Z_{j,l}$. Plus précisément, notons $Z = Z_{i,j,k,l}$ le sous-schéma ouvert $p_1^{-1}(X_{i,j}) \cap p_2^{-1}(Y_{k,l})$ dans $Z_{i,k} = X_i \times_S Y_k$, où $p_1 : Z_{i,k} \to X_i$ et $p_2 : Z_{i,k} \to Y_k$ sont les projections. On vérifie immédiatement que Z possède la propriété universelle du produit fibré (catégorique) $X_{i,j} \times_S Y_{k,l}$. Ceci réalise ce produit fibré comme un ouvert de $Z_{i,k}$ et la même construction permet de le voir comme un ouvert de $Z_{i,l}$, $Z_{j,k}$ et $Z_{j,l}$. On peut alors recoller les schémas $Z_{i,k}$ le long des ouverts $Z_{i,j,k,l}$ pour former un schéma $X \times_S Y$. (Il s'agit d'un recollement ordinaire dans lequel l'ensemble d'indices de la famille de schémas à recoller est un produit cartésien de deux ensembles.) Vérifions que c'est bien le produit fibré attendu. Étant donnés $u : W \to X$ et $v : W \to Y$ tels que $fu = gv$, on considère les ouverts $W_{i,k} = a^{-1}(X_i) \cap b^{-1}(Y_k)$ dans W. On construit des morphismes $W_{i,k} \to X_i \times_S Y_k$ qui se recollent en un morphisme $W \to X \times_S Y$.

Troisième cas : cas général. Soit $S = \cup S_i$ un recouvrement de S par des ouverts affines. Soient $X_i = f^{-1}(S_i)$ et $Y_i = g^{-1}(S_i)$ qui sont ouverts dans X et Y. Par restriction, on dispose de morphismes

$f_i : X_i \to S_i$ et $g_i : Y_i \to S_i$. D'après le deuxième cas, les produits fibrés $X_i \times_{S_i} Y_i$ existent. Il n'est pas difficile de voir que les produits fibrés $X_{i,j} \times_{S_{i,j}} Y_{i,j}$ existent également et se réalisent comme des ouverts dans $X_i \times_{S_i} Y_i$ et dans $X_j \times_{S_j} Y_j$. Ces derniers se recollent donc pour former un schéma $X \times_S Y$ pour lequel on vérifie comme précédemment la propriété de produit fibré. $\square$

2.6.7 Schémas relatifs. Nous avons vu que l'espace affine sur $\mathbb{Z}$ est mieux compris comme un morphisme $\mathbb{A}^n_{\mathbb{Z}} \to \operatorname{Spec}(\mathbb{Z})$ que comme un simple schéma. De même, les variétés sur un corps k doivent être vues comme des morphismes $X \to \operatorname{Spec}(k)$. Plus généralement, dans de nombreux problèmes de géométrie algébrique on travaille avec un schéma de base S et le cadre naturel est celui de la catégorie Sch/S des *schémas au-dessus de S* ou *S-schémas* décrite ainsi :

— les objets sont les morphismes $f : X \to S$;

— les morphismes entre $f : X \to S$ et $g : Y \to S$ sont les morphismes $u : X \to Y$ tels que $gu = f$.

Un objet de Sch/S est parfois noté simplement X/S. Un morphisme entre X/S et Y/S est appelé un morphisme de S-schémas ou S-morphisme, et on note $\operatorname{Hom}_S(X, Y)$ au lieu de $\operatorname{Hom}_{\operatorname{Sch}/S}(X, Y)$. Par construction, le schéma S est un objet terminal de Sch/S. Le produit de deux S-schémas n'est autre que le produit fibré $X \times_S Y$.

Lorsque $S = \operatorname{Spec}(A)$, on parle aussi de la catégorie Sch/A des A-schémas, on note $\operatorname{Hom}_A(X, Y)$ au lieu de $\operatorname{Hom}_S(X, Y)$, etc. Si X est un A-schéma et $A \to B$ est un morphisme d'anneaux, on note parfois abusivement $X \otimes_A B$ au lieu de $X \times_{\operatorname{Spec}(A)} \operatorname{Spec}(B)$.

2.6.8 Exercice. Montrez que $\mathbb{A}^n_S \simeq \mathbb{A}^n_{\mathbb{Z}} \times S$ et $\mathbb{P}^n_S \simeq \mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}} \times S$. Déduisez-en une nouvelle preuve du fait que ces schémas ne dépendent pas des choix de recouvrements ouverts faits pour les construire dans 2.1.5 et 2.1.8.

2.6.9 Exercice. Soient X/S et Y/S deux S-schémas. Montrez qu'il existe une application naturelle $|X \times_S Y| \to |X| \times_{|S|} |Y|$ et qu'elle est surjective.

2.6.10 Exercice. Soit S un schéma et $S' \to S$ un morphisme.

(1) Définissez un foncteur *changement de base* $\operatorname{Sch}/S \to \operatorname{Sch}/S'$, $X \mapsto X_{S'} := X \times_S S'$.

(2) Montrez que le changement de base par $S'' \to S' \to S$ est le composé des changements de base par $S' \to S$ et $S'' \to S'$.

(2) Soit $f : X \to Y$ un morphisme de S-schémas. Montrez que si f est une immersion, alors pour tout $S' \to S$, le morphisme $f_{S'} : X_{S'} \to Y_{S'}$ est une immersion. On dit que la propriété d'être une immersion est *stable par changement de base*.