

Introduction à la Géométrie Algébrique. Le langage des schémas

Cours du 29 septembre 2015

2.2.3 Définition. Un *sous-schéma fermé* de X est un fermé $i : Y \hookrightarrow X$ muni d'un faisceau \mathcal{O}_Y tel que (Y, \mathcal{O}_Y) est un schéma et le faisceau $i_*\mathcal{O}_Y$ est isomorphe au quotient $\mathcal{O}_X/\mathcal{I}$ de \mathcal{O}_X par un faisceau d'idéaux \mathcal{I} . Une *immersion fermée* est un morphisme de schémas $f : X' \rightarrow X$ qui se factorise en

$$X' \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{i} X$$

où g est un isomorphisme et i est l'inclusion d'un sous-schéma fermé dans X .

2.2.4 Remarque. Tous les faisceaux d'idéaux $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_X$ ne peuvent pas apparaître ainsi, car la condition que (Y, \mathcal{O}_Y) soit un schéma leur impose une contrainte. Les faisceaux d'idéaux qui définissent des sous-schémas fermés sont ceux que nous nommerons *quasi-cohérents*.

Dans le cas affine $X = \text{Spec}(A)$, tout idéal $I \subset A$ définit un sous-schéma fermé $Y = \text{Spec}(A/I)$. Le résultat suivant montre que la réciproque est vraie.

2.2.5 Proposition. *Si $X = \text{Spec}(A)$ est un schéma affine, alors l'application $I \mapsto Y = \text{Spec}(A/I)$ est une bijection entre l'ensemble des idéaux de A et l'ensemble des sous-schémas fermés de X .*

Preuve : La difficulté principale est de montrer que tout sous-schéma fermé $i : Y \hookrightarrow X$ est de la forme $\text{Spec}(A/I)$. Pour y parvenir, notons $\varphi : A \rightarrow \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y)$ le morphisme obtenu en prenant les sections globales de i^\sharp , et $I = \ker(\varphi)$. On dispose alors d'une factorisation $A \rightarrow A/I \hookrightarrow \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y)$, et sur les spectres $Y \rightarrow \text{Spec}(A/I) \hookrightarrow X$. Quitte à remplacer A par A/I , on peut donc supposer que φ est injective et on est ramené à montrer que i est un isomorphisme.

Montrons que i est un homéomorphisme. Comme c'est une application injective et fermée, il suffit de montrer qu'elle est surjective. Soit $D(f) \subset X$ un ouvert principal disjoint de Y . La fonction f est donc nulle en tout point de Y . Localement sur un ouvert affine $\text{Spec}(B) \subset Y$, ceci signifie que f appartient à tous les premiers $p \subset B$ donc est nilpotente. Comme Y est quasi-compact (on utilise ici le fait facile qu'un fermé d'un espace quasi-compact est quasi-compact), on en déduit que $f|_Y = \varphi(f)$ est nilpotente, donc f est nilpotente par injectivité de φ . Il s'ensuit que $D(f) = \emptyset$ donc i est surjective.

Il reste à montrer que $i^\sharp : \mathcal{O}_X \rightarrow i_*\mathcal{O}_Y$ est un isomorphisme. Comme ce morphisme est surjectif, il suffit de montrer l'injectivité. On montre que les applications sur les fibres $\mathcal{O}_{X,x} \rightarrow \mathcal{O}_{Y,x}$ sont injectives, pour tout $x \in Y$. Comme $\mathcal{O}_{X,x}$ est un localisé de A , il suffit de considérer un $g \in A$ tel que le germe de $\varphi(g)$ est nul. Ceci signifie qu'il existe un ouvert affine $U \subset Y$ contenant x tel que $\varphi(g)|_U = 0$. Comme i est un homéomorphisme, on peut trouver $s \in A$ tel que $i^{-1}(D(s))$ contient x et est inclus dans U . Pour un recouvrement $Y = Y_1 \cup \dots \cup Y_r$ par des ouverts affines, la fonction $\varphi(g)$ est alors nulle en restriction à l'ouvert affine $Y_i \cap D(\varphi(s))$, donc il existe n_i tel que $\varphi(s^{n_i}g) = 0$ dans $\Gamma(Y_i, \mathcal{O}_{Y_i})$. Pour $n = \max(n_i)$, on a alors $\varphi(s^n g) = 0$ dans $\Gamma(Y, \mathcal{O}_Y)$. Comme φ est injectif, on déduit que $s^n g = 0$ et ceci implique que le germe de g dans $\mathcal{O}_{X,x}$ est nul, comme souhaité. \square

2.2.6 Définition. Un *sous-schéma* de X est un sous-schéma fermé d'un sous-schéma ouvert de X . La terminologie *sous-schéma localement fermé* est parfois utilisée aussi. Une *immersion* est un morphisme de schémas $f : X' \rightarrow X$ qui se factorise en

$$X' \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{i} X$$

où g est un isomorphisme et i est l'inclusion d'un sous-schéma Z dans X .

2.2.7 Exercice. Montrez qu'un sous-schéma ouvert d'un sous-schéma fermé de X est un sous-schéma de X . Déduisez-en qu'un sous-schéma d'un sous-schéma de X est un sous-schéma de X , et que la composée de deux immersions est une immersion. *Commentaire* : très souvent, un sous-schéma fermé d'un sous-schéma ouvert est un sous-schéma ouvert d'un sous-schéma fermé, mais il existe des exemples (un peu pathologiques) où ce n'est pas le cas (et la lectrice curieuse peut trouver un exemple ici). C'est pour cela que la définition de sous-schéma est ainsi faite.

2.2.8 Exercice. Montrez qu'une immersion est un monomorphisme de schémas. (Traitez séparément les immersions fermées et les immersions ouvertes.)

2.2.9 Sous-schémas de support donné. Nous avons vu qu'un sous-schéma ouvert $U \subset X$ est déterminé par son support. La situation est très différente pour les sous-schémas fermés $Y \subset X$. Plus précisément, dans le cas affine on a les conditions équivalentes :

- (1) $Y = V(I) = V(J)$ ensemblistement,
- (2) pour $p \subset A$ premier, $p \supset I \iff p \supset J$,
- (3) $\sqrt{I} = \sqrt{J}$.

En revanche, l'égalité des *sous-schémas* $Y = V(I)$ et $Z = V(J)$ implique :

$$I = \ker(\Gamma(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y)) = \ker(\Gamma(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow \Gamma(Z, \mathcal{O}_Z)) = J.$$

(Notez qu'un morphisme de schémas $f : V \rightarrow W$ induit un morphisme d'anneaux $\Gamma(W, \mathcal{O}_W) \rightarrow \Gamma(V, \mathcal{O}_V)$ obtenu en prenant les sections globales dans le comorphisme $f^\# : \mathcal{O}_W \rightarrow f_*\mathcal{O}_V$.) En particulier, les idéaux I^n pour $n \geq 1$ définissent des sous-schémas fermés de même support ; il en va de même pour deux idéaux I, J tels que $I^n \subset J \subset I^m$ pour $m, n \geq 1$. Ceci est lié au fait que si on ne se souvient d'une fonction régulière $f \in A$ que ses valeurs $\{f(x) \in \kappa(x), x \in X\}$, alors l'annulation des $f(x)^n$ est équivalente à celle des $f(x)^m$. La fonction elle-même, information plus subtile que la collection de ses valeurs, diffère.

2.2.10 Exercice. Soit $X = \mathbb{A}_k^1 = \text{Spec}(k[t])$ la droite affine sur un corps et $x = \{t = 0\}$ l'origine. Trouvez tous sous-schémas fermés de support $\{x\}$. Pour chaque tel sous-schéma $i : Y \hookrightarrow X$, et chaque fonction $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$, décrivez ce que signifie l'annulation de f sur Y .

2.3 Fermés irréductibles et points

Les fermés irréductibles jouent un rôle essentiel pour comprendre la topologie d'un schéma ; nous allons décrire leur relation avec les points. Soulignons le fait que les énoncés suivants sont purement topologiques : seul l'espace topologique sous-jacent entre en jeu. On rappelle que la notion d'espace irréductible possède différentes définitions équivalentes, voir exercice 1.1.5. La lectrice qui voudrait plus de détails sur la notion d'irréductibilité d'un espace topologique peut consulter Bourbaki, Algèbre Commutative, chap. II, § 4, no 1.

2.3.1 Définition. Soit X un espace topologique. On appelle *composante irréductible* de X un fermé irréductible maximal, i.e. un fermé irréductible Y tel que pour toute inclusion $Y \subset Y'$ avec Y' fermé irréductible, on a $Y' = Y$.

2.3.2 Proposition. *Tout espace topologique est recouvert par ses composantes irréductibles.*

Preuve : Soit $x \in X$ et E l'ensemble des fermés irréductibles de X qui contiennent x . On a $E \neq \emptyset$ car $\{x\} \in E$. De plus, la relation d'inclusion est un ordre inductif sur E , c'est-à-dire que toute chaîne d'éléments de E possède une borne supérieure. D'après le lemme de Zorn, E possède un élément maximal Y qui est un fermé irréductible maximal. (Pour se rafraîchir les idées sur le lemme de Zorn, on peut consulter l'excellent livre de Paul Halmos [Hal].) \square

2.3.3 Lemme. *Soit $X = \text{Spec}(A)$ un schéma affine.*

- (1) *L'adhérence d'un point $x = [p]$ est le fermé irréductible $V(p)$.*
- (2) *Les fermés irréductibles de X sont les ensembles $V(p)$ avec p premier.*
- (3) *Pour tout fermé irréductible $F \subset X$, il existe un unique point $\eta = \eta_F \in X$ tel que $\overline{\{\eta\}} = F$, appelé point générique de F . Les applications $x \mapsto \overline{\{x\}}$ et $F \mapsto \eta_F$ définissent une bijection :*

$$\text{Spec}(A) \xleftarrow{1-1} \{\text{fermés irréductibles de } X\}.$$

- (4) *La bijection précédente est décroissante : si $x = [p]$ et $y = [q]$ sont deux points de X , on a $p \subset q$ si et seulement si $\overline{\{y\}} \subset \overline{\{x\}}$.*
- (5) *Les points fermés de X sont les $x = [p]$ où p est un premier maximal.*
- (6) *Les composantes irréductibles sont les fermés $V(p)$ où p est un premier minimal.*
- (7) *L'espace X est irréductible si et seulement si le nilradical de A est premier.*

Preuve : (1) On a $\overline{\{x\}} = \bigcap_{p \in V(I)} V(I) = \bigcap_{p \supset I} V(I) = V(p)$ en utilisant, pour la dernière égalité, le fait que $I \subset J$ entraîne $V(I) \supset V(J)$.

(2) Un point $x = [p]$ est irréductible, donc son adhérence $V(p)$ aussi. Réciproquement, soit $F = V(I)$ un fermé irréductible de X . Soit $\sqrt{I} = \{x \in A; \exists n \geq 1, x^n \in I\}$ l'idéal racine de I . On sait que $\sqrt{I} = \bigcap_{p \supset I} p$, donc $V(I) = V(\sqrt{I})$. Quitte à remplacer I par \sqrt{I} on peut donc supposer que I est un idéal radical. Supposons que I n'est pas premier, alors il existe $a, b \in A$ tels que $a, b \notin I$ mais $ab \in I$. Alors $V(I, a) \cup V(I, b) = V(I)$. Par ailleurs, on a $V(I, a) \subsetneq V(I)$ car sinon, tout idéal

premier contenant I contient a , donc $I = \sqrt{I} = \bigcap_{p \supset I} p$ contient a , contradiction. De même, on a $V(I, b) \subsetneq V(I)$. Ceci montre que $V(I)$ n'est pas irréductible, contradiction. Donc I est premier.

(3) D'après le point (2), le fermé F est de la forme $V(p)$ donc $\eta = [p]$ convient. Soient p, q deux premiers tels que $F = V(p) = V(q)$. Alors $p \in V(q)$ donc $p \supset q$. De même $q \supset p$, donc $p = q$ ce qui montre l'unicité de η . La bijection annoncée est claire.

(4) Laissez à la lectrice.

(5), (6). Comme la bijection précédente est décroissante, elle fait correspondre éléments minimaux et éléments maximaux de part et d'autre. Donc les points fermés (i.e. les fermés irréductibles minimaux) correspondent aux premiers maximaux, et les composantes irréductibles (i.e. les fermés irréductibles maximaux) correspondent aux premiers minimaux.

(7) L'espace X est irréductible ssi il n'a qu'une composante irréductible, ssi A ne possède qu'un premier minimal p . Ceci signifie que le nilradical, qui est l'intersection de tous les premiers (les minimaux suffisent, bien sûr), est égal à p i.e. est un idéal premier. \square

L'énoncé 2.3.3(3) est valable pour un schéma quelconque :

2.3.4 Proposition. Soit X un schéma. Alors tout fermé $F \subset X$ possède un unique point générique η_F et les applications $x \mapsto \overline{\{x\}}$ et $F \mapsto \eta_F$ définissent une bijection :

$$|X| \xleftrightarrow{1-1} \{\text{fermés irréductibles de } X\}.$$

Preuve : Nous nous contenterons de construire le point générique d'un fermé irréductible ; le reste est plus facile et laissé en exercice. Nous utiliserons le fait que pour tout ouvert $U \subset X$, l'application $F \mapsto F \cap U$ est une bijection de l'ensemble des fermés irréductibles de X qui rencontrent U vers l'ensemble des fermés irréductibles de U , dont l'inverse est $G \mapsto \overline{G}$. De plus cette bijection est compatible avec la restriction à un sous-ouvert, en un sens évident.

Soit $F \subset X$ un fermé irréductible. Alors par définition F est non vide ; soit $x \in F$ un point. Soit $U \subset X$ un voisinage ouvert affine de x dans X . D'après le résultat dans le cas affine (lemme 2.3.3(3)), le fermé irréductible $F \cap U$ possède un unique point générique η_U dans U . Soit $V \subset X$ un autre voisinage ouvert affine de x dans X . Alors, pour tout choix d'un troisième voisinage ouvert affine $W \subset U \cap V$ de x , on a $\eta_U = \eta_W = \eta_V$ d'après l'assertion d'unicité dans le cas affine. Donc $\eta_F := \eta_U$ ne dépend pas de U . \square

L'ensemble des fermés irréductibles de X est muni de la relation d'inclusion. Si on traduit cette relation sur X à l'aide de la bijection précédente, on tombe sur les notions générales de spécialisation et de générisation dans un espace topologique.

2.3.5 Définition. Soient X un espace topologique et x, y deux points tels que $\overline{\{y\}} \subset \overline{\{x\}}$, ou de manière équivalente $y \in \overline{\{x\}}$. On dit alors que y est une *spécialisation* de x , ou que x est une *générisation* de y . On dit aussi que x se *spécialise* sur y , et on note $x \rightsquigarrow y$.

2.3.6 Exercice. (1) Dans un espace topologique, montrez que tout fermé est stable par spécialisation et tout ouvert est stable par générisation.

(2) Soit $f : X \rightarrow Y$ une application continue entre espaces topologiques. Soient $x_1, x_2 \in X$. Montrez que $x_1 \rightsquigarrow x_2$ implique $f(x_1) \rightsquigarrow f(x_2)$.

2.3.7 Exercice. Soient X un schéma et k un corps. Établissez une bijection entre $\text{Hom}(\text{Spec}(k), X)$ et l'ensemble des paires (x, i) composées d'un point $x \in X$ et d'une extension de corps $i : \kappa(x) \rightarrow k$.