Introduction à la Géométrie Algébrique. Le langage des schémas

Cours du 28 septembre 2015

2 Premières propriétés, premières constructions

Dans cette partie, nous introduisons quelques propriétés et attributs des schémas. Nous donnons aussi quelques constructions et des premiers exemples, mais l'accent est surtout mis sur la présentation de concepts qui permettront de décrire des exemples plus concrets dans la partie suivante.

2.1 Recollement

En topologie, le procédé de *recollement* (*gluing* ou *glueing* en anglais) consiste à de donner des espaces topologiques X_i indicés par un ensemble I, et des ouverts $X_{i,j} \subset X_i$ pour chaque paire d'indices i, j que l'on recolle au moyen d'homéomorphismes convenables $\varphi_{i,j} : X_{i,j} \simeq X_{j,i}$ pour former un nouvel espace topologique X contenant les X_i comme ouverts. La construction réalise X comme un quotient de la somme disjointe $\amalg X_i$ par une relation d'équivalence ; il s'agit donc d'un cas particulier de la notion d'espace topologique quotient. Ce procédé est familier par exemple pour fabriquer la droite projective complexe comme réunion de deux copies de $\mathbb{C}$ le long de leurs ouverts $\mathbb{C}^*$. Nous décrivons ici sa formulation dans le cadre des schémas.

2.1.1 Proposition. *Supposons donnés :*

— *une famille de schémas* $\{X_i\}_{i\in I}$,
— *des familles d'ouverts* $X_{i,j} \subset X_i$ *pour* $i, j \in I$,
— *des isomorphismes de schémas* $\varphi_{i,j} : X_{i,j} \xrightarrow{\sim} X_{j,i}$ *pour* $i, j \in I$,

satisfaisant les conditions :

— $X_{i,i} = X_i$ *et* $\varphi_{i,i} = \mathrm{id}$ *pour tout* i,
— $\varphi_{j,i} = \varphi_{i,j}^{-1}$,
— $\varphi_{i,j}(X_{i,j} \cap X_{i,k}) = X_{j,i} \cap X_{j,k}$ *et* $(\varphi_{j,k} \circ \varphi_{i,j})_{|X_{i,j}\cap X_{i,k}} = \varphi_{i,k|X_{i,j}\cap X_{i,k}}$ *pour tous* i, j, k.

Alors il existe un unique schéma X *possédant un recouvrement par des ouverts* $U_i \subset X$ *isomorphes aux* X_i, *de telle manière que les intersections* $U_i \cap U_j$ *sont isomorphes aux* $X_{i,j}$ *et que les applications identiques* $U_i \cap U_j \to U_j \cap U_i$ *s'identifient aux isomorphismes* $\varphi_{i,j}$.

Par exemple, si tous les $X_{i,j}$ sont vides, on obtient le schéma *somme disjointe* $X = \amalg X_i$. Ce cas simple renferme déjà quelques subtilités que l'on voit sur des exemples proposés en exercice.

2.1.2 Exercice. (1) Montrez que $\mathrm{Spec}(A_1) \amalg \cdots \amalg \mathrm{Spec}(A_n) \simeq \mathrm{Spec}(A_1 \times \cdots \times A_n)$.

(2) Soit k un corps. Soit $X = \amalg_{i\in\mathbb{N}} X_i$ une somme disjointe dénombrable de k-points $X_i = \mathrm{Spec}(k)$. Calculez $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$. Montrez que X n'est pas un schéma affine. Montrez qu'il existe un morphisme $X \to \mathrm{Spec}(k^{\mathbb{N}})$ qui n'est pas surjectif.

2.1.3 Preuve de 2.1.1 : Nous allons expliquer la construction de X et laisser en exercice la vérification des propriétés annoncées. On note X' la somme disjointe des X_i ; ses élements sont des paires (i,x) avec $x \in X_i$. On munit X' de la relation définie par $(i,x_i) \sim (j,x_j)$ si et seulement si $x_j = \varphi_{i,j}(x_i)$. Les trois conditions de compatibilité assurent que la relation est réflexive, symétrique et transitive i.e. une relation d'équivalence. On note X le quotient de X' par cette relation d'équivalence et $\pi : X' \to X$ l'application quotient. On munit X de la topologie quotient, i.e. une partie $U \subset X$ est déclarée ouverte si et seulement si $\pi^{-1}(U) \subset X'$ est ouvert. Il reste à munir X d'un faisceau de fonctions $\mathcal{O}_X$. Le candidat naturel est le faisceau des fonctions sur X' qui sont invariantes pour la relation d'équivalence ; nous allons formaliser ceci précisément. Dans le cadre ensembliste, une relation d'équivalence est une certaine partie $R \subset X' \times X'$. Cette donnée est équivalente à celle de deux applications $s,t : R \to X'$ telles que $x_1 \sim x_2$ si et seulement s'il existe $r \in R$ tel que $x_1 = s(r)$, $x_2 = t(r)$. Une fonction $f : X' \to Z$ est invariante pour la relation d'équivalence ssi $f \circ s = f \circ t$, ce qui s'écrit encore $s^\sharp f = t^\sharp f$. Ainsi formulées, ces idées s'adaptent sans problème. La relation d'équivalence sur X' est l'ensemble $R = \amalg X_{i,j}$. Le morphisme $s : R \to X'$ est donné par les inclusions évidentes $X_{i,j} \hookrightarrow X'$, et on a un morphisme de faisceaux $s^\sharp : \mathcal{O}_{X'} \to s_*\mathcal{O}_R$ qui fait de s un morphisme de schémas. De même $t : R \to X'$ est donné par les morphismes $X_{i,j} \xrightarrow{\varphi_{i,j}} X_{j,i} \hookrightarrow X'$. On pose :

$$\mathcal{O}_X(U) = \{f \in \mathcal{O}_{X'}(U); s^\sharp(f) = t^\sharp(f)\}.$$

Pour finir, on vérifie que X est un schéma et qu'il satisfait les propriétés attendues. Signalons que la construction du faisceau $\mathcal{O}_X$ peut être formulée d'une manière différente, susceptible d'apporter un éclairage complémentaire, dans la proposition 3.10 du livre Görtz et Wedhorn [GW]. □

2.1.4 Remarques. (1) Il est bien sûr suffisant de se donner des $X_{i,j}$ et des $\varphi_{i,j}$ pour $i \neq j$, mais nous avons préféré inclure les données $i = j$ pour mettre en évidence le fait que les trois conditions de compatibilité correspondent aux trois propriétés de la relation d'équivalence qui définit le recollement.

(2) La donnée des schémas X_i, des ouverts $X_{i,j}$ et des isomorphismes $\varphi_{i,j}$ peut sembler lourde à manipuler. En fait, dans la plupart des situations concrètes, ces objets sont souvent « naturels » au point où la vérification des conditions de compatibilité est à peu près triviale. Comme il est écrit dans [EH], § I.2.4 : *In these and indeed in almost all applications, we don't really need to give the maps $\psi_{\alpha\beta}$ explicitly : we are actually given a topological space $|X|$ and a family of open subsets $|X_\alpha|$, each endowed with the structure of an affine scheme — that is, with a structure sheaf $\mathcal{O}_{X_\alpha}$ — in such a way that $\mathcal{O}_{X_\alpha}(X_\alpha \cap X_\beta)$ is naturally identified with $\mathcal{O}_{X_\beta}(X_\alpha \cap X_\beta)$. For example, they might both be given as subsets of a fixed set.* Nous allons tout de suite illustrer cette observation.

2.1.5 Exemple 1 : l'espace affine sur un schéma S. Soit S un schéma et $n \geqslant 0$ un entier. Lorsque $S = \mathrm{Spec}(A)$, on note $A[t_1,\dots,t_n]$ l'anneau de polynômes et on pose $\mathbb{A}^n_S = \mathbb{A}^n_A = \mathrm{Spec}(A[t_1,\dots,t_n])$. Si on note $\pi : \mathbb{A}^n_S \to S$ le morphisme déduit de l'injection $A \to A[t_1,\dots,t_n]$, il est clair que la préimage par π d'un ouvert affine $V \subset S$ s'identifie canoniquement à $\mathbb{A}^n_V$. Lorsque S est arbitraire, choisissons un recouvrement ouvert affine $S_i = \mathrm{Spec}(A_i)$. Notons $X_i = \mathbb{A}^n_{S_i}$ et $X_{i,j} \subset X_i$ l'ouvert préimage de $S_{i,j}$ par $\pi_i : X_i \to S_i$. Pour tout ouvert affine $V \subset S_i \cap S_j$, les ouverts $\pi_i^{-1}(V)$ et $\pi_j^{-1}(V)$ s'identifient canoniquement à l'espace affine $\mathbb{A}^n_V$ sur V. En particulier on dipose d'isomorphismes $\pi_i^{-1}(V) \simeq \pi_j^{-1}(V)$ qui se recollent en un isomorphisme $\varphi_{i,j} : X_{i,j} \xrightarrow{\sim} X_{j,i}$. La vérification de la condition de compatibilité $\varphi_{j,k} \circ \varphi_{i,j} = \varphi_{i,k}$ sur l'ouvert $X_{i,j} \cap X_{i,k}$ peut se faire localement au-dessus d'ouverts affines $V \subset S_i \cap S_j \cap S_k$, auquel cas elle est triviale car elle se réduit à l'identité. La proposition 2.1.1 s'applique et on note $X = \mathbb{A}^n_S$ le schéma obtenu par recollement.

2.1.6 Exercice. Décrivez les différents types de points de $X = \mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}$, la droite affine sur $\mathbb{Z}$, comme dans [EH], § II.4.3, exercice II-37.

2.1.7 Exemple 2 : l'espace projectif sur un schéma S**.** Commençons par le cas $S = \mathrm{Spec}(A)$ affine. Considérons des indéterminées $t_0, \dots, t_n$ et l'anneau $K = A[t_0, \dots, t_n, \frac{1}{t_0 \dots t_n}]$. Pour tout entier $i \in \{0, \dots, n\}$, les n éléments $t_0/t_i, \dots, t_{i-1}/t_i, t_{i+1}/t_i, \dots, t_n/t_i$ sont algébriquement indépendants sur A. Ainsi l'anneau

$$A_i = A\left[\frac{t_0}{t_i}, \dots, \frac{t_n}{t_i}\right]$$

est isomorphe à un anneau de polynômes sur A, donc le schéma $X_i = \mathrm{Spec}(A_i)$ est un espace affine de dimension n au-dessus de $\mathrm{Spec}(A)$. Pour tout $j \neq i$, le schéma

$$X_{i,j} = D\left(\frac{t_j}{t_i}\right) = \mathrm{Spec}\left(A\left[\frac{t_0}{t_i}, \dots, \dots, \frac{t_n}{t_i}, \frac{t_i}{t_j}\right]\right)$$

est un ouvert principal de X_i. De l'isomorphisme d'anneaux

$$u_{i,j} : A\left[\frac{t_0}{t_j}, \dots, \dots, \frac{t_n}{t_j}, \frac{t_j}{t_i}\right] \longrightarrow A\left[\frac{t_0}{t_i}, \dots, \dots, \frac{t_n}{t_i}, \frac{t_i}{t_j}\right]$$

égal à l'*égalité comme sous-anneaux de* K, on déduit un isomorphisme de schémas :

$$\varphi_{i,j} = \mathrm{Spec}(u_{i,j}) : X_{i,j} \longrightarrow X_{j,i}.$$

Le fait que les $u_{i,j}$ soient des morphismes identiques dans un anneau ambiant K fait que toutes les conditions de compatibilité nécessaires au recollement sont automatiques. Par exemple, la condition $(\varphi_{j,k} \circ \varphi_{i,j})_{|X_{i,j} \cap X_{i,k}} = \varphi_{i,k|X_{i,j} \cap X_{i,k}}$ revient à dire que les trois anneaux

$$A\left[\frac{t_0}{t_i}, \dots, \dots, \frac{t_n}{t_i}, \frac{t_i}{t_j}, \frac{t_i}{t_k}\right] \quad , \quad A\left[\frac{t_0}{t_j}, \dots, \dots, \frac{t_n}{t_j}, \frac{t_j}{t_i}, \frac{t_j}{t_k}\right] \quad , \quad A\left[\frac{t_0}{t_k}, \dots, \dots, \frac{t_n}{t_k}, \frac{t_k}{t_i}, \frac{t_k}{t_j}\right]$$

sont égaux. On en déduit que les X_i se recollent en un schéma que l'on note $X = \mathbb{P}^n_S = \mathbb{P}^n_A$. Pour un schéma S général, on procède comme dans le cas de l'espace affine $\mathbb{A}^n_S$ en recouvrant S par des ouverts affines pour construire $X = \mathbb{P}^n_S$ par recollement.

2.1.8 Exercice. Comparez la « droite affine avec origine dédoublée » et la droite projective, obtenues en recollant de deux manières différentes deux droites affines : exercice [EH], I-44.

2.1.9 Exercice. (1) Soit k un corps, $X = \mathbb{A}^2_k$ et $U = X \smallsetminus \{0\}$. Calculez $\Gamma(U, \mathcal{O}_U)$ à l'aide d'un recouvrement de U par deux ouverts principaux de X. Déduisez-en que U n'est pas affine.

(2) Soit X le plan affine avec origine dédoublée, obtenu en recollant $X_1 = \mathbb{A}^2_k$ avec $X_2 = \mathbb{A}^2_k$ le long de leur ouvert commun $U_1 = U_2 = \mathbb{A}^n_k \smallsetminus \{0\}$ (avec isomorphisme de recollement égal à l'identité). Montrez qu'il existe dans X deux ouverts affines sont l'intersection n'est pas affine.

2.2 Sous-schémas

Soit X un schéma. Si $i : U \subset X$ est un ouvert de l'espace topologique sous-jacent à X, l'espace annelé $(U, \mathcal{O}_U)$ avec $\mathcal{O}_U := \mathcal{O}_{X|U} = i^{-1}\mathcal{O}_X$, est un schéma. En effet, soit $x \in U$ un point. Soit $V = \mathrm{Spec}(A)$ un ouvert affine de X contenant x. Comme les ouverts distingués de V forment une base de sa topologie, il existe $f \in A$ tel que $W = D(f) \subset U$. Alors $(W, \mathcal{O}_W) = (W, \mathcal{O}_{X|W}) = (W, \mathcal{O}_{U|W})$ est un schéma affine et on a ainsi recouvert U par des schémas affines. On dit que la structure de schéma sur U est *induite* par celle de X.

2.2.1 Définition. Un *sous-schéma ouvert* de X est un ouvert $U \subset X$ muni de sa structure de schéma induit. Une *immersion ouverte* est un morphisme de schémas $f : X' \to X$ qui se factorise en

$$X' \xrightarrow{g} U \xrightarrow{i} X$$

où g est un isomorphisme et i est l'inclusion d'un sous-schéma ouvert dans X.

Si $i : Y \to X$ est un fermé de l'espace topologique sous-jacent à X, il n'est pas aussi simple de le munir d'une structure de schéma. Pour commencer, le couple $(Y, i^{-1}\mathcal{O}_X)$ n'est pas un schéma en général. Par exemple, soit k un corps et supposons que Y est le point origine $y = \{t = 0\}$ dans la droite affine $X = \mathbb{A}^1_k = \mathrm{Spec}(k[t])$. Si Y est muni d'une structure de schéma, étant le seul voisinage de y, il est nécessairement affine. Si cette structure de schéma est donnée par $(Y, i^{-1}\mathcal{O}_X)$, l'anneau de fonctions de Y est égal à $\Gamma(Y, i^{-1}\mathcal{O}_X) = \varinjlim_{U \ni y} \mathcal{O}_X(U) = \mathcal{O}_{X,y} = k[t]_{(t)}$. Or le spectre de $k[t]_{(t)}$ est composé de deux points, contradiction.

Dans le cas où $X = \mathrm{Spec}(A)$ est affine, ce sont les schémas $Y = V(I) = \mathrm{Spec}(A/I)$ qui jouent le rôle de sous-schémas fermés. Ils sont déterminés par leur idéal $I \subset A$. On note que I détermine un faisceau $\mathscr{I}$ sur X par la formule $\mathscr{I}(D(f)) = I_f \subset A_f$. La fibre de ce faisceau en $x = [p]$ est égale à $I_p = IA_p$. Comme $p \supset I$ si et seulement si $I_p \neq A_p$, on a donc :

$$Y = V(\mathscr{I}) := \{x \in X, \mathscr{I}_x \neq \mathcal{O}_{X,x}\}.$$

La version globale de ce type d'objet, sur un schéma quelconque, est la suivante.

2.2.2 Définition. Soit X un schéma. Un *faisceau d'idéaux quasi-cohérent* sur X est un faisceau d'idéaux $\mathscr{I} \subset \mathcal{O}_X$ tel que sur tout ouvert affine $U = \mathrm{Spec}(A) \subset X$, le faisceau $\mathscr{I}_{|U}$ est défini par un idéal I de A.

On note qu'il existe des faisceaux d'idéaux $\mathscr{I} \subset \mathcal{O}_X$ qui ne sont pas quasi-cohérents. Voici un exemple. Considérons le schéma $X = \mathrm{Spec}(k[t]_{(t)})$ qui est le germe de l'origine dans la droite affine. L'ensemble sous-jacent possède deux points, le premier $x = [(t)]$ est fermé et le second $\eta = [(0)]$ est ouvert. Il y a donc trois ouverts $\varnothing$, $U = \{\eta\}$ et X. Le préfaisceau d'idéaux de $\mathcal{O}_X$ défini par $\mathscr{I}(X) = \mathscr{I}(\varnothing) = 0$ et $\mathscr{I}(U) = \mathcal{O}_X(U) = k(t)$, avec les applications de restriction évidentes, ne peut pas être défini par un idéal $I \subset k[t]_{(t)}$ car sinon on aurait $\mathscr{I}(X) = I$ et $\mathscr{I}(U) = I_t$, ce qui est impossible. Les idéaux convenables sont les suivants :

De manière analogue au cas affine, un faisceau d'idéaux quasi-cohérent $\mathscr{I}$ sur X définit un fermé $Y = V(\mathscr{I}) = \{x \in X, \mathscr{I}_x \neq \mathcal{O}_{X,x}\}$. Si $i : Y \to X$ désigne l'inclusion, le couple $(Y, i^{-1}(\mathcal{O}_X/\mathscr{I}))$ est un schéma puisqu'il est recouvert par les ouverts $U \cap Y = \mathrm{Spec}(A/I)$, lorsque U parcourt les ouverts affines de X, avec $U = \mathrm{Spec}(A)$ et $\mathscr{I}_{|U}$ défini par $I \subset A$.

2.2.3 Définition. Un *sous-schéma fermé* de X est un fermé $i : Y = V(\mathscr{I}) \hookrightarrow X$ défini par un faisceau d'idéaux quasi-cohérent $\mathscr{I}$, muni de la structure de schéma $(Y, i^{-1}(\mathcal{O}_X/\mathscr{I}))$. Une *immersion fermée* est un morphisme de schémas $f : X' \to X$ qui se factorise en

$$X' \xrightarrow{g} U \xrightarrow{i} X$$

où g est un isomorphisme et i est l'inclusion d'un sous-schéma fermé dans X.

Table des matières

1 Définition des schémas **2**

1.1 Pourquoi les schémas 2
1.2 L'ensemble sous-jacent à un schéma affine 4
1.3 L'espace topologique d'un schéma affine 4
1.4 Interlude 1 : catégories et foncteurs 6
1.5 Interlude 2 : faisceaux 9
1.6 Le faisceau de fonctions d'un schéma affine 13
1.7 Interlude 3 : image directe et image inverse de faisceaux 14
1.8 Définition des schémas et des morphismes de schémas 17

2 Premières propriétés, premières constructions **19**

2.1 Recollement 19
2.2 Sous-schémas 22