

Introduction à la Géométrie Algébrique. Le langage des schémas

Cours du 21 septembre 2015

1.5.9 Faisceaux sur une base d'ouverts. Pour terminer cette brève présentation des faisceaux, rappelons-nous que notre objectif est de définir le faisceau de fonctions \mathcal{O}_X d'un schéma affine $X = \text{Spec}(A)$. Comme les ouverts généraux de X sont assez compliqués, il est agréable de travailler seulement avec les ouverts principaux $D(f) = \text{Spec}(A_f)$, qui forment une base. Les valeurs d'un faisceau sur les seuls ouverts de cette base le déterminent entièrement.

1.5.10 Définition. Soit X un espace topologique et \mathcal{B} une base d'ouverts. Un \mathcal{B} -faisceau \mathcal{F}_0 est la donnée d'une collection d'ensembles $\mathcal{F}_0(V)$ pour tous les $V \in \mathcal{B}$, et d'applications de restriction $\text{res}_{W,V}$ pour $V \subset W$ éléments de \mathcal{B} , telles que pour tout $V \in \mathcal{B}$, pour tout recouvrement ouvert de V par des éléments $V_i \in \mathcal{B}$, et toute collection de sections $s_i \in \mathcal{F}_0(V_i)$ qui coïncident sur tous les ouverts $W \subset V_i \cap V_j$ appartenant à \mathcal{B} , il existe une unique section $s \in \mathcal{F}_0(V)$ telle que $s|_{V_i} = s_i$ pour tout i .

1.5.11 Proposition. Soit \mathcal{F}_0 un \mathcal{B} -faisceau. Pour un ouvert quelconque $U \subset X$, posons

$$\mathcal{F}(U) = \varprojlim_{V \subset U, V \in \mathcal{B}} \mathcal{F}_0(V).$$

Alors \mathcal{F} est l'unique faisceau tel que $\mathcal{F}(U) = \mathcal{F}_0(U)$ si $U \in \mathcal{B}$.

On rappelle que la limite projective dans le membre de droite est l'ensemble des collections $(s_V)_{V \in \mathcal{B}}$, $s_V \in \mathcal{F}_0(V)$, telles que $s_W = (s_V)|_W$ pour toute inclusion $W \subset V$ dans \mathcal{B} . Pour des rappels sur les limites projectives (ou limites inverses), voir [Ei], Appendix 6 ou [Mat], Appendix A.

Preuve : Si $U \in \mathcal{B}$, le système projectif des $V \subset U$, $V \in \mathcal{B}$ possède un élément maximal (ou initial) de sorte que $\mathcal{F}(U) = \mathcal{F}_0(U)$. S'il existe un faisceau \mathcal{F} avec cette propriété, alors chacune de ses sections $s \in \mathcal{F}(U)$ est déterminée par la collection de ses restrictions $s|_V$, $V \in \mathcal{B}$, $V \subset U$, astreintes à coïncider sur les ouverts $V \cap V'$, c'est-à-dire sur tous les ouverts $W \subset V \cap V'$ de \mathcal{B} (noter que $V \cap V'$, s'il n'est pas dans \mathcal{B} , est en tout cas recouvert par des éléments de \mathcal{B}). Ainsi s peut être identifiée à l'ensemble des familles $(s_V)_{V \in \mathcal{B}}$, $s_V \in \mathcal{F}_0(V)$, telles que $s_W = (s_V)|_W$ pour toute inclusion $W \subset V$ dans \mathcal{B} . C'est exactement l'expression donnée en termes de limite projective dans l'énoncé. Il reste à montrer que cette expression définit bien un faisceau ; ceci est laissé au lecteur. \square

1.5.12 Exercice. Décrivez les morphismes de restriction du préfaisceau \mathcal{F} défini dans la proposition. Vérifiez que \mathcal{F} est bien un faisceau. Montrez que si $\mathcal{F}_0, \mathcal{G}_0$ sont deux \mathcal{B} -faisceaux, alors toute collection d'applications $\varphi(V) : \mathcal{F}_0(V) \rightarrow \mathcal{G}_0(V)$ pour $V \in \mathcal{B}$, commutant aux restrictions d'ouverts de \mathcal{B} , s'étend en un unique morphisme de faisceaux $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$.

1.6 Le faisceau de fonctions d'un schéma affine

Soit A un anneau et $X = \text{Spec}(A)$. Nous voulons définir le *faisceau des fonctions régulières* \mathcal{O}_X . D'après 1.5.9, il suffit de définir un \mathcal{B} -faisceau, pour la base \mathcal{B} composée des ouverts principaux $D(f)$, $f \in A$. Cette base possède la propriété agréable d'être stable par intersections finies puisque $D(f_1) \cap D(f_2) = D(f_1 f_2)$, ce qui simplifie la condition de coïncidence de la définition 1.5.10. Nous avons vu en 1.2.2 et 1.3.2 que $D(f)$ est l'ensemble des points où f ne s'annule pas, et s'identifie au spectre de l'anneau $A_f = A[1/f]$. Ceci est en harmonie avec l'idée naturelle que sur l'ouvert où f ne s'annule pas, les quotients a/f^n définissent d'honnêtes fonctions.

1.6.1 Proposition. *Les données suivantes :*

- (1) $\mathcal{O}_X(D(f)) = A_f$ pour tout $f \in A$,
- (2) $\text{res}_{D(g), D(f)} : A_g \rightarrow A_f$ égal au morphisme d'anneaux naturel (voir exercice 1.3.5), pour toute inclusion $D(f) \subset D(g)$,

définissent un \mathcal{B} -faisceau.

Preuve : D'abord il convient de noter que lorsque $D(f) = D(g)$, les anneaux A_f et A_g sont canonicquement isomorphes (voir exercice 1.3.5). Par conséquent, si $U = D(f)$, la définition $\mathcal{O}_X(U) = A_f$ ne dépend pas du choix de f . Maintenant, fixons $f \in A$ et montrons la propriété de \mathcal{B} -faisceau pour tous les recouvrements ouverts de $D(f)$. Celui-ci étant un spectre, et ses ouverts principaux étant des ouverts principaux dans X , quitte à remplacer A par A_f on se ramène au cas $f = 1$. Il reste à montrer que pour tout recouvrement ouvert de la forme $X = \cup_i D(f_i)$, toute famille d'éléments $s_i \in A_{f_i}$ tels que s_i et s_j deviennent égaux dans $A_{f_i f_j}$ se recolle en un unique $s \in A$.

D'abord une remarque. Pour tout entier $\alpha \geq 1$ on a $D(f) = D(f^\alpha)$, donc $X = \cup_i D(f_i^\alpha)$. Comme X est quasi-compact (voir 1.3.4), il existe un sous-recouvrement fini $D(f_1^\alpha), \dots, D(f_n^\alpha)$. Ceci entraîne qu'il existe a_1, \dots, a_n dans A tels que $1 = a_1 f_1^\alpha + \dots + a_n f_n^\alpha$, par le même argument que dans 1.3.4. (Les a_i dépendent de α , bien sûr.) Dans la suite de la preuve, nous utiliserons ce type d'écriture, appelé une *partition de l'unité*.

Montrons l'unicité. Si s et t sont égaux dans chaque A_{f_i} , alors pour chaque i il existe $\alpha_i \geq 1$ tel que $f_i^{\alpha_i}(s - t) = 0$. Si $\alpha = \max(\alpha_i)$, on trouve $f_i^\alpha(s - t) = 0$ pour tout i . En utilisant une partition de l'unité, on en déduit que $s - t = 0$.

Montrons maintenant l'existence. Soient $\alpha, \beta \geq 1$ tels que, pour tous i, j on a $s_i = d_i/f_i^\alpha$ et $(f_i f_j)^\beta (f_j^\alpha d_i - f_i^\alpha d_j) = 0$, ce qui traduit l'hypothèse que s_i et s_j deviennent égaux dans $A_{f_i f_j}$. Les entiers α et β peuvent être choisis uniformes, par quasi-compacité. Fixons une partition de l'unité $1 = \sum_j a_j f_j^{\alpha+\beta}$. Posons $s = \sum_j a_j f_j^\beta d_j$. On a :

$$f_i^{\alpha+\beta} s = \sum_j a_j f_j^\beta f_i^{\alpha+\beta} d_j = \sum_j a_j f_j^{\alpha+\beta} f_i^\beta d_i = f_i^\beta d_i.$$

Ceci montre que dans A_{f_i} on a $s = d_i/f_i^\alpha = s_i$, pour tout i . □

Un schéma général sera défini comme une paire (X, \mathcal{O}_X) composée d'un espace topologique muni d'un faisceau d'anneaux, localement isomorphe à un schéma affine. Dans la catégorie où l'expression « localement isomorphe » prendra son sens, les morphismes relient les faisceaux via une image directe ou une image inverse. Il nous faut faire un troisième interlude pour présenter ces notions.

1.7 Interlude 3 : image directe et image inverse de faisceaux

Nous introduisons ces opérations d'abord pour les préfaisceaux, puis pour les faisceaux.

1.7.1 Définition. Soit $f : X \rightarrow Y$ une application continue entre deux espaces topologiques.

(1) Si $\mathcal{F} \in P(X)$ on définit $f_*\mathcal{F} \in P(Y)$ par $(f_*\mathcal{F})(V) = \mathcal{F}(f^{-1}V)$, pour tout ouvert $V \subset Y$. Ce préfaisceau est appelé *image directe de \mathcal{F}* par l'application continue f .

(2) Si $\mathcal{F} \in P(Y)$ on définit $f^{-1}\mathcal{F} \in P(X)$ par $(f^{-1}\mathcal{F})(U) = \varinjlim_{V \supset f(U)} \mathcal{F}(V)$, pour tout ouvert $U \subset X$. Ce préfaisceau est appelé *image inverse de \mathcal{F}* par f .

Notez que dans (2), lorsque $f(U)$ est ouvert, on a $(f^{-1}\mathcal{F})(U) = \mathcal{F}(f(U))$. Cependant, en général $f(U)$ n'est pas ouvert et une telle formule n'est pas licite.

1.7.2 Exemple : restriction à un ouvert. Soit $U \subset X$ un ouvert et $i : U \rightarrow X$ l'inclusion. Le faisceau $i^{-1}\mathcal{F}$ est noté $\mathcal{F}|_U$ et appelé la *restriction de \mathcal{F} à U* . On a $(i^{-1}\mathcal{F})(V) = \mathcal{F}(i(V)) = \mathcal{F}(V)$ pour tout $V \subset U$.

1.7.3 Exercice. Montrez que f_* s'étend en un foncteur $f_* : P(X) \rightarrow P(Y)$, i.e. montrez comment associer à un morphisme $\psi : \mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{F}_2$ de préfaisceaux sur X un morphisme $f_*\psi : f_*\mathcal{F}_1 \rightarrow f_*\mathcal{F}_2$. Montrez de même que f^{-1} s'étend en un foncteur $f^{-1} : P(Y) \rightarrow P(X)$.

1.7.4 Exercice. Soit $f : X \rightarrow Y$ une application continue et $x \in X$ un point.

(1) Soit \mathcal{F} un préfaisceau d'ensembles sur Y . Construisez une bijection naturelle $(f^{-1}\mathcal{F})_x \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_{f(x)}$.

(2) Soit \mathcal{F} un préfaisceau d'ensembles sur X . Construisez une application naturelle $(f_*\mathcal{F})_{f(x)} \rightarrow \mathcal{F}_x$ et montrez qu'en général elle n'est ni injective ni surjective.

L'apparition de la limite inductive dans la définition de $f^{-1}\mathcal{F}$ trouve en fait son origine dans la *formule d'adjonction* suivante :

1.7.5 Proposition (Adjonction (f^{-1}, f_*)). Si $f : X \rightarrow Y$ est continue, on a une bijection

$$\mathrm{Hom}_{P(X)}(f^{-1}\mathcal{G}, \mathcal{F}) = \mathrm{Hom}_{P(Y)}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F})$$

fonctorielle en les préfaisceaux $\mathcal{F} \in P(X)$ et $\mathcal{G} \in P(Y)$.

Preuve : On construit d'abord deux flèches naturelles $\eta : \mathcal{G} \rightarrow f_*f^{-1}\mathcal{G}$ et $\epsilon : f^{-1}f_*\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$. Pour η , on observe que comme l'ouvert $V \subset Y$ contient $f(f^{-1}V)$, on a une application

$$\mathcal{G}(V) \rightarrow (f_*f^{-1}\mathcal{G})(V) = (f^{-1}\mathcal{G})(f^{-1}(V)) = \varinjlim_{W \supset f^{-1}V} \mathcal{G}(W)$$

qui à $s \in \mathcal{G}(V)$ associe sa classe d'équivalence dans la limite inductive. La construction de ϵ est laissée en exercice. La bijection annoncée se construit ainsi : à un morphisme $u : f^{-1}\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F}$ on associe la composée $v = f_*u \circ \eta : \mathcal{G} \rightarrow f_*f^{-1}\mathcal{G} \rightarrow f_*\mathcal{F}$. Réciproquement, à un morphisme $v : \mathcal{G} \rightarrow f_*\mathcal{F}$ on associe $u = \epsilon \circ f^{-1}v$. La preuve du fait que ces deux flèches sont inverses l'une de l'autre est laissée en exercice. Il reste à montrer que la bijection est fonctorielle en \mathcal{F} et \mathcal{G} . Cela découle essentiellement du

fait que $\eta = \eta_{\mathcal{G}}$ et $\epsilon = \epsilon_{\mathcal{F}}$ sont fonctorielles. Ceci signifie (pour η) qu'à tout morphisme $\varphi : \mathcal{G}_1 \rightarrow \mathcal{G}_2$ de préfaisceaux sur Y est associé un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}_1 & \xrightarrow{\eta_{\mathcal{G}_1}} & f_* f^{-1} \mathcal{G}_1 \\ \varphi \downarrow & & \downarrow f_* f^{-1} \varphi \\ \mathcal{G}_2 & \xrightarrow{\eta_{\mathcal{G}_2}} & f_* f^{-1} \mathcal{G}_2. \end{array}$$

La preuve de ces faits est laissée en exercice. □

1.7.6 Exercice. Décrivez le morphisme de préfaisceaux $\epsilon : f^{-1} f_* \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ puis vérifiez que les applications $u \mapsto f_* u \circ \alpha$ et $v \mapsto \beta \circ f^{-1} v$ sont inverses l'une de l'autre.

1.7.7 Remarque. Insistons sur le fait que les propriétés formelles (fonctorielles, catégoriques) des objets qu'on manipule sont fondamentales. En l'occurrence, nous venons de rencontrer un exemple de la notion générale d'adjonction dans une catégorie : on dit que deux foncteurs $F : C \rightarrow D$ et $G : D \rightarrow C$ sont *adjoints* s'il existe une bijection $\text{Hom}_D(FX, Y) = \text{Hom}_C(X, GY)$ fonctorielle en $X \in C$ et $Y \in D$ (on peut parler aussi d'un *isomorphisme de bifoncteurs*). On dit que F est adjoint à gauche de G , et G adjoint à droite de F . On montre que si F (resp. G) possède un adjoint à gauche (resp. à droite), alors celui-ci est unique à isomorphisme unique près. Voir [Mac], chap. IV, § 1. De nombreux exemples sont familiers, en voici deux grandes familles (voir exercice 1.7.8) :

- (1) les adjoints à gauche de foncteurs d'oubli, appelés foncteurs d'*objets libres*.
- (2) les adjoints à gauche d'inclusions de catégories, ou *réflecteurs*.

Pour revenir aux préfaisceaux, la définition de $f_* \mathcal{F}$ est naturelle et c'est la formule d'adjonction qui guide la définition de $f^{-1} \mathcal{F}$.

1.7.8 Exercice. (1) *Objets libres.* Montrez que le foncteur qui associe à un ensemble I le groupe libre sur l'ensemble de générateurs I est un adjoint à gauche du foncteur d'oubli qui associe à un groupe son ensemble sous-jacent. Montrez que le foncteur qui associe à un ensemble I l'algèbre de polynômes $A[(X_i)_{i \in I}]$ est un adjoint à gauche du foncteur d'oubli qui associe à une A -algèbre commutative unitaire son ensemble sous-jacent.

(2) *Réflecteurs.* Montrez que le foncteur corps de fractions est adjoint à gauche de l'inclusion de la catégorie des corps commutatifs dans la catégorie des anneaux commutatifs intègres. Montrez que le foncteur d'abélianisation $G \mapsto G/[G, G]$ est adjoint à gauche de l'inclusion de la catégorie des groupes abéliens dans celle de tous les groupes (ici $[G, G]$ est le groupe dérivé). Montrez que le foncteur $M \mapsto M/M_{\text{tor}}$ est adjoint à gauche de l'inclusion de la catégorie des \mathbb{Z} -modules sans torsion dans celle de tous les \mathbb{Z} -modules (ici M_{tor} est le sous-module de torsion).

Si $f : X \rightarrow Y$ est continue et $\mathcal{F} \in F(X)$, alors $f_* \mathcal{F}$ tel qu'on l'a défini est un faisceau. En revanche, pour $\mathcal{F} \in F(Y)$, le préfaisceau $f^{-1} \mathcal{F}$ n'est pas toujours un faisceau. Un exemple simple de ce phénomène est donné dans l'exercice suivant.

1.7.9 Exercice. Soit X un espace topologique irréductible, par exemple $X = \text{Spec}(A)$ avec A intègre. On rappelle que dans ce cas, tous les ouverts non vides de X sont denses, voir 1.3.4. Montrez que le préfaisceau défini par $\mathcal{F}(U) = \mathbb{Z}$ est un faisceau. Supposons que X contient deux points fermés $x_1 \neq x_2$ et notons $f : \{x_1, x_2\} \hookrightarrow X$ l'inclusion. Montrez que le préfaisceau $f^{-1}\mathcal{F}$ n'est pas un faisceau.

Il est donc crucial de savoir qu'on peut revenir dans la catégorie des faisceaux en associant à un préfaisceau une « meilleure approximation par un faisceau ». Ceci s'exprime ainsi.

1.7.10 Proposition. *Il existe un foncteur $a : P(X) \rightarrow F(X)$ de faisceau associé ou faisceautisation qui est adjoint à gauche pour l'inclusion $i : F(X) \hookrightarrow P(X)$, i.e. on a*

$$\text{Hom}_{P(X)}(\mathcal{F}, i(\mathcal{G})) = \text{Hom}_{F(X)}(a(\mathcal{F}), \mathcal{G})$$

fonctoriellement en $\mathcal{F} \in P(X)$ et $\mathcal{G} \in F(X)$. (On note $i(\mathcal{G})$ pour souligner l'adjonction, mais on note \mathcal{G} dans la pratique.) Le morphisme canonique $\mathcal{F} \rightarrow a(\mathcal{F})$, correspondant à l'identité de $\mathcal{G} = a(\mathcal{F})$ par adjonction, est un isomorphisme sur les fibres.

La situation est similaire à celle de l'exemple (2) de la remarque 1.7.7, c'est-à-dire que a est un adjoint de la famille des réflecteurs.

Preuve : Soit \mathcal{F} un préfaisceau (de groupes abéliens). Pour $U \subset X$ ouvert, soit $\mathcal{F}'(U)$ l'ensemble des collections $(s(x))_{x \in U}$, $s(x) \in \mathcal{F}_x$, qui proviennent localement d'une section, comme dans l'exercice 1.5.5. Alors \mathcal{F}' est un faisceau ; on pose $a(\mathcal{F}) := \mathcal{F}'$. On montre facilement que a s'étend en un foncteur. Si $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ est un morphisme à valeurs dans un faisceau \mathcal{G} , on en déduit un morphisme $\mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{G}'$. Comme \mathcal{G} est un faisceau, on a $\mathcal{G} \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}'$, d'où on déduit un morphisme $\mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{G}$ par lequel φ se factorise. Ceci montre que a vérifie la propriété attendue. \square

On utilise la faisceautisation pour définir l'image inverse faisceautique :

1.7.11 Définition. L'image inverse d'un faisceau $\mathcal{F} \in F(X)$ par une application continue $f : Y \rightarrow X$ est le faisceau associé au préfaisceau $f^{-1}(\mathcal{F})$ défini précédemment. On la note encore $f^{-1}(\mathcal{F})$.

1.7.12 Proposition (Adjonction (f^{-1}, f_*)). Si $f : X \rightarrow Y$ est continue, on a une bijection

$$\text{Hom}_{F(X)}(f^{-1}\mathcal{G}, \mathcal{F}) = \text{Hom}_{F(Y)}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F})$$

fonctorielle en les faisceaux $\mathcal{F} \in F(X)$ et $\mathcal{G} \in F(Y)$. \square

1.7.13 Exercice. Démontrez cette proposition.

1.7.14 Exercice. Soit X un espace topologique. Étant donné un ensemble E possédant au moins deux éléments, on définit le *préfaisceau constant de valeur E* en posant $\mathcal{F}(U) = E$ pour tout ouvert U , et en prenant toutes les restrictions égales à l'identité de E . Donnez une condition nécessaire et suffisante pour que \mathcal{F} soit un faisceau. Dans le cas général, décrivez le faisceau associé \mathcal{F}' , que l'on appelle le *faisceau constant de valeur E* .

1.7.15 Exercice. On construit quatre catégories dont les objets sont les paires (X, \mathcal{F}) composées d'un espace topologique et un faisceau d'ensembles dessus. Les morphismes entre (X, \mathcal{F}) et (Y, \mathcal{G}) sont les paires (f, φ) où $f : X \rightarrow Y$ est une application continue et φ est un certain morphisme de faisceaux. Les quatre catégories diffèrent par le morphisme φ .

(1) Dans C_1 , on prend pour $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow f^{-1}\mathcal{G}$ un morphisme de faisceaux sur X . Dans C_2 , on prend pour $\varphi : f_*\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ un morphisme de faisceaux sur Y . Justifiez qu'on obtient bien des catégories, en décrivant la composition naturelle des morphismes dans chacune. Montrez que C_1 et C_2 ne sont pas équivalentes (*suggestion : regardez les ensembles $\text{Hom}_{C_i}((X, \mathcal{F}), (Y, \mathcal{G}))$ lorsque $X = \emptyset$*).

(2) Dans C_3 , on prend pour $\varphi : f^{-1}\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F}$ un morphisme de faisceaux sur X . Dans C_4 , on prend pour $\varphi : \mathcal{G} \rightarrow f_*\mathcal{F}$ un morphisme de faisceaux sur Y . Décrivez la composition naturelle des morphismes dans ces catégories. Montrez que C_3 et C_4 sont isomorphes.

Lorsque \mathcal{F}, \mathcal{G} représentent des faisceaux de fonctions (de n'importe quelle sorte) sur X, Y , la functorialité naturelle est *contravariante*, puisque $f : X \rightarrow Y$ fait correspondre à une fonction u sur Y la fonction $u \circ f$ sur X . C'est donc la situation (2).

1.8 Définition des schémas et des morphismes de schémas

1.8.1 Définition. On appelle *espace localement annelé* ou *espace annelé en anneaux locaux* un couple (X, \mathcal{O}_X) composé d'un espace topologique et un faisceau d'anneaux dont les fibres $\mathcal{O}_{X,x}$ sont des anneaux locaux. On note souvent X au lieu de (X, \mathcal{O}_X) . On appelle *morphisme d'espaces localement annelés* un couple $(f, f^\#)$ composé d'une application continue $f : X \rightarrow Y$ et d'un morphisme de faisceaux $f^\# : \mathcal{O}_Y \rightarrow f_*\mathcal{O}_X$ tel que pour tout $x \in X$ d'image $y = f(x)$, le morphisme naturel

$$\mathcal{O}_{Y,y} \xrightarrow{f_y^\#} (f_*\mathcal{O}_X)_y \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x}$$

est un morphisme d'anneaux locaux. On note souvent $f : X \rightarrow Y$ au lieu de $(f, f^\#)$.

Si U est un ouvert de X et $i : U \rightarrow X$ est l'inclusion, l'espace U muni du faisceau $\mathcal{O}_U := \mathcal{O}_X|_U = i^{-1}\mathcal{O}_X$ (voir 1.7.2) est un espace localement annelé. Si $f : X \rightarrow Y$ est un morphisme, $V \subset Y$ un ouvert, $U \subset X$ sa préimage, on a de même un morphisme d'espaces localement annelés induit $f|_U : U \rightarrow V$.

1.8.2 Définition. On appelle *schéma* un espace localement annelé (X, \mathcal{O}_X) qui possède un recouvrement ouvert $X = \cup U_i$ tel que les espaces localement annelés (U_i, \mathcal{O}_{U_i}) sont isomorphes à des schémas affines. Si X, Y sont deux schémas, un *morphisme de schémas* est un morphisme d'espaces annelés $f : X \rightarrow Y$. Le faisceau \mathcal{O}_X est appelé *faisceau de fonctions* ou *faisceau structural* du schéma X . L'espace topologique sous-jacent au schéma X est parfois noté $|X|$ et appelé le *support* de X .

1.8.3 Les schémas affines. La catégorie des schémas affines est définie comme une sous-catégorie pleine de la catégorie des schémas. On peut (enfin) compléter la définition du foncteur spectre :

$$\text{Spec} : \{\text{anneaux}\} \longrightarrow \{\text{schémas affines}\},$$

déjà défini sur les objets, en décrivant son action sur les morphismes. Si $\varphi : A \rightarrow B$ est un morphisme d'anneaux, on a défini une application continue $f = \text{Spec}(\varphi) : Y = \text{Spec}(B) \rightarrow X = \text{Spec}(A)$ et nous

devons lui adjoindre un morphisme de faisceaux $f^\# : \mathcal{O}_X \rightarrow f_*\mathcal{O}_Y$ pour en faire un morphisme de schémas. On sait qu'il suffit de définir $f^\#$ sur les ouverts principaux $U = D(f)$, $f \in A$. Pour un tel ouvert, on a $f^{-1}(U) = \{y = [q] \in Y; q \cap A \not\cong f\} = \{y = [q] \in Y; q \ni f\} = D(f)$ où l'on note encore f l'image de f dans B , pour simplifier. On aura donc $f_*\mathcal{O}_Y(U) = \mathcal{O}_Y(f^{-1}(U)) = \mathcal{O}_Y(D(f)) = B_f$ et on peut définir $f^\#(U) : A_f \rightarrow B_f$ comme étant le morphisme d'anneaux naturel déduit de $\varphi : A \rightarrow B$ par passage aux localisés. On vérifie que ces constructions font de $f^\#$ un morphisme de faisceaux, et que Spec devient un foncteur comme désiré.

1.8.4 Exercice. Montrez que le foncteur *sections globales du faisceau de fonctions* $X \mapsto \Gamma(X, \mathcal{O}_X) := \mathcal{O}_X(X)$ et le foncteur spectre $A \mapsto \text{Spec}(A)$ sont des équivalences de catégories inverses :

$$\{\text{schémas affines}\} \begin{array}{c} \xrightarrow{\Gamma} \\ \xleftarrow{\text{Spec}} \end{array} \{\text{anneaux}\}.$$

On a ainsi complété le diagramme de 1.1.2.

1.8.5 Exercice. Soit $X = \text{Spec}(A)$ un schéma affine et U l'ouvert $D(f)$ pour $f \in A$. Montrez que $U = (U, \mathcal{O}_{X|U}) \simeq \text{Spec}(A_f)$.

1.8.6 Exercice. Soit X un schéma et $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ une fonction régulière globale. Montrez que l'ensemble $X_f = \{x \in X, f(x) \neq 0\}$ est un ouvert de X .

1.8.7 Exercice. (1) Soit A un anneau et X un schéma. Construisez une bijection naturelle :

$$\text{Hom}_{\text{Sch}}(X, \text{Spec}(A)) \xrightarrow{\simeq} \text{Hom}_{\text{Ann}}(A, \Gamma(X, \mathcal{O}_X)).$$

Montrez que cette bijection est fonctorielle en A et X et interprétez-la comme fournissant l'existence d'un adjoint pour l'inclusion de la catégorie des schémas affines dans la catégorie de tous les schémas.

(2) On appelle *droite affine sur \mathbb{Z}* le schéma $\mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^1 = \text{Spec}(\mathbb{Z}[t])$ où t est une indéterminée (voir aussi 2.1.5 à venir). En prenant $A = \mathbb{Z}[t]$ dans (1), montrez que les fonctions régulières sur un ouvert $U \subset X$, i.e. les sections de \mathcal{O}_X sur U , s'identifient aux morphismes de schémas $U \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^1$.

(3) En prenant $A = \mathbb{Z}$ dans (1), montrez que tout schéma possède un et un seul morphisme vers $\text{Spec}(\mathbb{Z})$. On dit que $\text{Spec}(\mathbb{Z})$ est un *objet terminal* (ou *final*) de la catégorie des schémas.