Introduction à la Géométrie Algébrique. Le langage des schémas

Cours du 14 septembre 2015

Il nous faut maintenant introduire quelques notions sur les faisceaux. Le vocabulaire des catégories, que nous avons évité jusqu'ici, donnera un cadre très utile pour présenter ces notions.

1.4 Interlude 1 : catégories et foncteurs

La théorie des catégories est basée sur l'idée que dans l'étude d'une famille donnée d'objets mathématiques, les applications entre ces objets sont au moins aussi importantes que les objets eux-mêmes. Ce phénomène est déjà visible pour les ensembles algébriques et les algèbres de type fini, vus précédemment. Nous utiliserons seulement les notions de base sur les catégories. Des références possibles pour compléter ces quelques éléments sont les livres de MacLane [Mac] et Leinster [Le].

1.4.1 Définition. Une *catégorie* C est la donnée de :
— une classe (ou collection) $\mathrm{Ob}(C)$ dont les éléments sont appelés *objets* de C,[1]
— des ensembles notés $\mathrm{Hom}_C(X,Y)$ dont les éléments sont appelés *morphismes* ou *flèches* entre X et Y, pour chaque paire d'objets X, Y,
— des applications $\mathrm{Hom}_C(X,Y) \times \mathrm{Hom}_C(Y,Z) \to \mathrm{Hom}_C(X,Z)$ appelées *compositions* et notées $(f,g) \mapsto g \circ f$, pour chaque triplet d'objets X, Y, Z, qui forment une loi associative possédant des élements neutres à droite et à gauche notés $\mathrm{id}_X \in \mathrm{Hom}_C(X,X)$ et appelés *identités*, pour tout objet X de C.

On note souvent $X \in \mathrm{Ob}(C)$ ou simplement $X \in C$ pour dire que X est un objet de C. On note souvent $f : X \to Y$ au lieu de $f \in \mathrm{Hom}_C(X,Y)$. On note souvent gf au lieu de $g \circ f$.

1.4.2 Exemples. (1) La catégorie des ensembles notée Ens, la catégorie des groupes, la catégorie des variétés différentielles, etc.
(2) À toute catégorie C on peut associer sa catégorie *opposée* C^{op} définie par $\mathrm{Ob}(C^{\mathrm{op}}) = \mathrm{Ob}(C)$ et $\mathrm{Hom}_{C^{\mathrm{op}}}(X,Y) = \mathrm{Hom}_C(Y,X)$.

1.4.3 Définition. Soit C une catégorie. Une *sous-catégorie* D de C est la donnée d'une sous-classe d'objets $\mathrm{Ob}(D)$ de $\mathrm{Ob}(C)$ et, pour chaque paire d'objets $X, Y \in C$ d'un sous-ensemble $\mathrm{Hom}_D(X,Y) \subset \mathrm{Hom}_C(X,Y)$, telle que D contient les identités et est stable par composition. On dit que D est une sous-catégorie *pleine* si $\mathrm{Hom}_D(X,Y) = \mathrm{Hom}_C(X,Y)$ pour tous X, Y.

1. La nature mathématique (classe ou ensemble) de $\mathrm{Ob}(C)$ est un point délicat qui est traité différemment selon les auteurs. Expliquons ceci très brièvement avec l'exemple de la catégorie des ensembles, i.e. la catégorie notée Ens dont les objets sont les ensembles et les applications sont les simples applications ensemblistes. Pour certains auteurs, on peut prendre pour Ob(Ens) la classe de *tous* les ensembles ; elle ne peut alors pas elle-même être un ensemble, à cause du paradoxe de Russell. Pour d'autres, comme la notion de *classe* vit aux frontières (floues) de la théorie des ensembles, il est préférable de travailler avec une catégorie (U-Ens) dont les objets, les ensembles éléments d'un *univers* U fixé, forment un véritable ensemble. On pourra lire [Mac], chap. I, § 6 pour plus de détails.

1.4.4 Exemples, remarques. (1) La catégorie des groupes abéliens est la sous-catégorie pleine de la catégorie des groupes dont les objets sont les groupes abéliens. (On notera que pour spécifier une sous-catégorie pleine, il suffit de spécifier ses objets.)

(2) La catégorie des espaces vectoriels avec pour morphismes les applications linéaires *injectives* est une sous-catégorie non pleine de la catégorie des espaces vectoriels usuelle (i.e. avec pour morphismes toutes les applications linéaires).

1.4.5 Définition. Soit C une catégorie et $f : X \to Y$ un morphisme dans C. On dit que f est :

— un *monomorphisme* (ou simplement un *mono*) si pour toute paire de morphismes $g, h : W \to X$ telle que $fg = fh$, on a $g = h$.

— un *épimorphisme* (ou simplement un *épi*) si pour toute paire de morphismes $g, h : Y \to Z$ telle que $gf = hf$, on a $g = h$.

— un *isomorphisme* (ou simplement un *iso*) s'il existe $g : Y \to X$ tel que $gf = \mathrm{id}_X$ et $fg = \mathrm{id}_Y$.

1.4.6 Exercice. (1) Dans une catégorie C, un iso est mono et épi.

(2) Dans la catégorie des ensembles, les monos, épis, isos sont les injections, surjections, bijections, respectivement. En particulier, un morphisme qui est mono et épi est iso.

(3) Dans la catégorie des anneaux commutatifs unitaires, le morphisme d'inclusion $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ est un mono et un épi, mais pas un iso. Dans la catégorie des variétés différentielles, l'application $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ d'élévation au cube est un mono et un épi mais pas un iso.

1.4.7 Définition. Soient C, D deux catégories. Un *foncteur* $F : C \to D$ est la donnée de :

— un objet $F(X) \in D$ pour chaque objet $X \in C$,

— un morphisme $F(f) : F(X) \to F(Y)$ pour chaque morphisme $f : X \to Y$ dans C,

de telle sorte que $F(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{FX}$ et $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$ pour tous f, g composables.

Un *foncteur contravariant* de C dans D est un foncteur $F : C^{\mathrm{op}} \to D$; à chaque morphisme $f : X \to Y$ dans C il associe donc un morphisme $F(f) : F(Y) \to F(X)$.

1.4.8 Remarques. (1) On peut composer deux foncteurs $F : C \to D$ et $G : D \to E$ de manière évidente. (Il y a en fait une catégorie des catégories, dont les morphismes sont les foncteurs.)

(2) Il est fréquent de définir un foncteur en donnant seulement les valeurs $F(X)$ des objets, lorsque les valeurs $F(f)$ des morphismes sont faciles à trouver avec le contexte. Par exemple, si C est une catégorie et $X \in C$ un objet fixé, on définit un foncteur $F : C \to \mathrm{Ens}$ en posant $F(Y) = \mathrm{Hom}_C(X, Y)$. (Comment est défini $F(f)$, pour un morphisme $f : Y_1 \to Y_2$?) De même, si Y est fixé, on définit un foncteur $G : C^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ens}$ en posant $G(X) = \mathrm{Hom}_C(X, Y)$. (Même question.) On dit que Hom est un bifoncteur, contravariant en la première variable, covariant en la seconde.

(3) On prendra garde au fait que l'image d'un foncteur (définie de la manière naturelle) n'est pas une sous-catégorie en général.

1.4.9 Définition. Soit $F : C \to D$ un foncteur. On dit que F est un *isomorphisme de catégories* s'il existe un foncteur $G : D \to C$ tel que $G \circ F = \mathrm{id}_C$ et $F \circ G = \mathrm{id}_D$.

La notion d'isomorphisme de catégories est naturelle, mais elle est souvent trop rigide dans les applications. Voici un exemple. Avec un corps k fixé, considérons la catégorie C des k-espaces vectoriels de dimension finie, avec pour morphismes les isomorphismes k-linéaires. Utilisant la notion de dimension, on voit que les *classes d'isomorphisme* d'éléments de C forment un ensemble qui est en bijection avec $\mathbb{N}$. Si on voit $\mathbb{N}$ comme une catégorie dont les objets sont les entiers naturels et les morphismes sont réduits aux identités id_n pour $n \in \mathbb{N}$, on peut même étendre la dimension en un foncteur $\dim : C \to \mathbb{N}$. Cependant, ce foncteur ne peut pas être un isomorphisme, car il n'existe pas de bijection entre la classe (énorme, non dénombrable) des espaces vectoriels et l'ensemble $\mathbb{N}$. Au mieux existe-t-il un foncteur $G : \mathbb{N} \to C$ qui associe à $n \in \mathbb{N}$ l'espace vectoriel canonique k^n. Mais on n'a pas $G \circ \dim = \mathrm{id}_C$, car un espace vectoriel de dimension n est *isomorphe*, mais non *égal à*, l'espace k^n. La notion adaptée pour décrire cet exemple et bien d'autres est celle d'équivalence de catégories.

1.4.10 Définition. Soient $F, G : C \to D$ deux foncteurs de mêmes source et but. Une *transformation naturelle*, ou simplement *morphisme de foncteurs* $u : F \to G$ est la donnée d'un morphisme $u(X) : F(X) \to G(X)$ pour tout $X \in C$, de telle sorte que $G(\alpha) \circ u(X) = u(Y) \circ F(\alpha)$ pour tout morphisme $\alpha : X \to Y$ dans C.

$$\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[r, "u(X)"] \arrow[d, "F(\alpha)"'] & G(X) \arrow[d, "G(\alpha)"] \\
F(Y) \arrow[r, "u(Y)"] & G(Y)
\end{tikzcd}$$

On peut composer les morphismes de foncteurs de manière naturelle. Les foncteurs de C vers D forment ainsi une catégorie $\mathrm{Fonct}(C, D)$. On dispose donc de la notion générale d'isomorphisme : un morphisme de foncteurs $u : F \to G$ est un iso lorsqu'il existe $v : G \to F$ tel que $v \circ u = \mathrm{id}_F$ et $u \circ v = \mathrm{id}_G$.

1.4.11 Définition. Une *équivalence de catégories* est un foncteur $F : C \to D$ tel qu'il existe un foncteur $G : D \to C$ et des isomorphismes de foncteurs $G \circ F \xrightarrow{\sim} \mathrm{id}_C$ et $F \circ G \xrightarrow{\sim} \mathrm{id}_D$.

Dans ce cas, le foncteur $G : D \to C$ est aussi une équivalence, appelée *inverse* de F. Citons Awodey [Awo], page 148 : *Experience has shown that the mathematically significant properties of objects are those that are invariant under isomorphisms, and in category theory, identity of objects is a much less important relation than isomorphism. So it is really equivalence of categories that is the more important notion of "similarity" for categories. One can think of equivalence of categories as "isomorphism up to isomorphism."*

1.4.12 Définition. Soit $F : C \to D$ un foncteur. On dit que F est
— *plein* si les applications $\mathrm{Hom}_C(X, Y) \to \mathrm{Hom}_D(FX, FY)$ sont injectives,
— *fidèle* si les applications $\mathrm{Hom}_C(X, Y) \to \mathrm{Hom}_D(FX, FY)$ sont surjectives,
— *pleinement fidèle* s'il est plein et fidèle.
On dit que F est *essentiellement surjectif* si tout $Y \in D$ est isomorphe à FX, pour un $X \in C$.

Par exemple, toute sous-catégorie $D \subset C$ détermine un foncteur d'inclusion $i : D \to C$ qui est fidèle mais n'est plein que si D est une sous-catégorie pleine.

1.4.13 Lemme. *Un foncteur $F : C \to D$ est une équivalence si et seulement s'il est pleinement fidèle et essentiellement surjectif.*

Preuve : Voir Prop. 7.25 dans Awodey [Awo]. Noter que la partie « si » utilise une forme forte de l'axiome du choix. Une preuve se trouve aussi dans [Mac], chap. IV, § 4, th. 1. □

1.4.14 Exercice. Soit C une catégorie telle que pour tous $X, Y \in C$ il existe un unique morphisme $X \to Y$. Soit C_0 la catégorie composée d'un seul objet avec un seul morphisme, l'identité de cet objet. Montrez qu'il existe un unique foncteur $C \to C_0$ et que c'est une équivalence de catégories.

Pour conclure cette brève introduction aux catégories en revenant à notre sujet, signalons que si k est un corps algébriquement clos, alors les foncteurs $X \mapsto \Gamma(X)$ et $A \mapsto \mathrm{Spm}(A)$ sont des équivalences de catégories inverses entre la catégorie des ensembles algébriques affines sur k et la catégorie des k-algèbres de type fini réduites.

1.5 Interlude 2 : faisceaux

Comme nous l'avons indiqué dans 1.1, un schéma sera défini comme un couple composé d'un espace topologique et d'un faisceau d'anneaux d'un certain type. Nous aurons donc besoin d'être à l'aise avec quelques notions liées aux faisceaux sur un espace topologique X.

1.5.1 Définition. Un *préfaisceau d'ensembles* $\mathscr{F}$ sur X est la donnée d'une collection d'ensembles $\mathscr{F}(U)$ pour tous les ouverts $U \subset X$, et d'une collection d'applications appelées *restrictions* $\mathrm{res}_{V,U} : \mathscr{F}(V) \to \mathscr{F}(U)$ pour toute inclusion d'ouverts $U \subset V$, satisfaisant les propriétés suivantes : $\mathrm{res}_{U,U} = \mathrm{id}_U$ pour tout U, et $\mathrm{res}_{V,U} \circ \mathrm{res}_{W,V} = \mathrm{res}_{W,U}$ pour toute chaîne $U \subset V \subset W$.

Un *morphisme de préfaisceaux* $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ est la donnée d'applications $\varphi(U) : \mathscr{F}(U) \to \mathscr{G}(U)$ pour tous les ouverts $U \subset X$, qui commutent aux applications de restriction des préfaisceaux $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ i.e. $\mathrm{res}^{\mathscr{G}}_{V,U} \circ \varphi(V) = \varphi(U) \circ \mathrm{res}^{\mathscr{F}}_{V,U}$.

Un préfaisceau de groupes, ou d'anneaux (etc) est une collection de groupes, d'anneaux (etc) munie d'applications de restriction qui sont des morphismes de groupes, d'anneaux (etc). Les notions de *morphisme de préfaisceaux de groupes, d'anneaux (etc)* sont définies naturellement.

Les éléments de $\mathscr{F}(U)$ sont souvent appelés *sections de $\mathscr{F}$ au-dessus de U* [2]. Si $U \subset V \subset X$ et $s \in \mathscr{F}(V)$, la restriction $\mathrm{res}_{V,U}(s)$ est souvent notée $s_{|U}$. Avec cette notation simplifiée, la relation $\mathrm{res}^{\mathscr{G}}_{V,U} \circ \varphi(V) = \varphi(U) \circ \mathrm{res}^{\mathscr{F}}_{V,U}$ s'écrit $\varphi(s)_{|U} = \varphi(s_{|U})$ pour tous U, V, s.

1.5.2 Remarque. On peut reformuler cette définition en introduisant la catégorie $\mathrm{Ouv}(X)$ dont les objets sont les ouverts de X, et les morphismes sont les seules inclusions $U \subset V$ (il n'y a donc pas de morphisme entre U et V si $U \not\subset V$). En ces termes, un préfaisceau est simplement un foncteur contravariant $\mathscr{F} : \mathrm{Ouv}(X)^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ens}$, et un morphisme de préfaisceaux est un morphisme de foncteurs.

On dispose donc de catégories de préfaisceaux d'ensembles, de groupes, d'anneaux (etc) sur X. Dans la suite, tant que les résultats énoncés ne dépendent pas du type particulier de faisceau considéré, nous ne le spécifierons pas. Nous noterons $P(X)$ une catégorie que la lectrice ou le lecteur peut imaginer comme étant la catégorie des préfaisceaux d'ensembles, ou de groupes, ou d'anneaux.

2. Pour une raison historique : aux débuts de la théorie des faisceaux, ceux-ci étaient présentés plutôt comme des espaces topologiques munis d'une application continue $\pi : \mathscr{F} \to X$, et dans ce cadre les éléments de $\mathscr{F}(U)$ correspondaient à des sections de $\pi^{-1}(U) \to U$. Voir par exemple l'exposé de Henri Cartan, *Faisceaux sur un espace topologique, I*, Séminaire Henri Cartan, 3 (1950-1951), Exp. No. 14, accessible ici. On peut aussi regarder l'exercice I.8 de [EH].

1.5.3 Exercice. Les monos, épis, isos de $P(X)$ sont les morphismes $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ tels que $\varphi(U)$ est injectif, surjectif, bijectif pour tout ouvert U. En particulier, les isos sont les morphismes qui sont mono et épi.

Venons-en aux faisceaux. Ceux-ci servent à relier données locales et données globales. Si $\mathscr{F}$ est un préfaisceau, ce qu'on entend par « données globales » c'est les sections de $\mathscr{F}(X)$. Ce qu'on entend par « données locales » c'est les sections de $\mathscr{F}(U)$ pour de « petits » ouverts U, ou encore plus local, les éléments des *fibres* (en anglais : *stalks*)

$$\mathscr{F}_x = \varinjlim_{U \ni x} \mathscr{F}(U).$$

(On rappelle que cette limite inductive est l'ensemble des classes d'équivalence de paires (U, s) avec $U \ni x$ ouvert et $s \in \mathscr{F}(U)$, pour la relation suivante : $(U, s) \sim (U', s')$ si et seulement s'il existe $V \subset U \cap U'$ contenant x tel que $s_{|V} = s'_{|V}$. Pour plus de rappels sur les limites inductives, voir [Le], ou [Ei], Appendix 6 ou [Mat], Appendix A.) L'opération « fibre en x » est un foncteur : pour tout morphisme de préfaisceaux $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ on a un morphisme induit $\varphi_x : \mathscr{F}_x \to \mathscr{G}_x$ sur les fibres. Si U est un ouvert contenant x et $s \in \mathscr{F}(U)$, l'image de s par l'application $\mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}_x$ est appelée *germe de s au point x*. Les fibres sont particulièrement importantes en géométrie algébrique car les ouverts de la topologie de Zariski sont très gros. Ce qu'on entend par « relier données locales et données globales » s'exprime dans la définition d'un faisceau.

1.5.4 Définition. Un *faisceau* (d'ensembles, de groupes, d'anneaux, etc) $\mathscr{F}$ sur X est un préfaisceau tel que pour tout ouvert $U \subset X$, pour tout recouvrement ouvert $(U_i)_{i \in I}$ de U, et toute collection de sections $s_i \in \mathscr{F}(U_i)$ qui coïncident sur les intersections $U_i \cap U_j$, il existe une unique section $s \in \mathscr{F}(U)$ telle que $s_{|U_i} = s_i$ pour tout i. Un *morphisme de faisceaux* $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ est un morphisme de préfaisceaux.

On résume parfois la propriété de faisceau par un diagramme exact

$$\mathscr{F}(U) \to \prod_{i \in I} \mathscr{F}(U_i) \rightrightarrows \prod_{i,j} \mathscr{F}(U_i \cap U_j).$$

Voici en exercice une conséquence de la propriété de faisceau.

1.5.5 Exercice. Soit $\mathscr{F}$ un préfaisceau sur X. Pour chaque ouvert U, notons $\mathscr{F}'(U)$ l'ensemble des collections $(s(x)) \in \prod_{x \in U} \mathscr{F}_x$ qui *proviennent localement d'une section* au sens où tout point $y \in U$ possède un voisinage ouvert $V \subset U$ sur lequel les éléments $s(x)$, $x \in V$, sont considérons .

(a) Montrez que $\mathscr{F}'$ est un faisceau.

(b) Soit $\gamma(U) : \mathscr{F}(U) \to \prod_{x \in U} \mathscr{F}_x$ l'application qui envoie s sur la collection de germes $(s_x)_{x \in U}$. Montrez que les $\gamma(U)$ induisent un morphisme de préfaisceaux $\gamma : \mathscr{F} \to \mathscr{F}'$ et que γ est un isomorphisme si $\mathscr{F}$ est un faisceau.

On dispose aussi des notions de faisceaux en groupes, en anneaux, etc. Considérons le cas de la catégorie $F(X)$ des faisceaux de groupes abéliens sur X. Dans les exercices suivants, on décrit ses monos, épis, isos. Ceux-ci sont souvent appelés injections, surjections et bijections de faisceaux, même si cette terminologie peut porter à confusion comme on va le voir.

1.5.6 Exercice. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ est un mono,
(b) $\varphi(U)$ est injectif pour tout ouvert U,
(c) φ_x est injectif pour tout $x \in X$.

Pour les épis, la situation n'est pas si simple, et c'est heureux car c'est précisément ce point qui fait tout l'intérêt de la notion de faisceau. En effet, il existe des épis $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ dans $F(X)$ tels que $\varphi(U)$ n'est pas surjectif, pour un certain ouvert U. Cf exercice I.10 dans [EH] :

- dans (a) les ouverts de Zariski sont trop gros pour extraire des racines carrées ;
- dans (b) les variétés projectives ont trop peu de fonctions globales.

1.5.7 Exercice. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ est un épi,

(b) φ est *localement surjectif* : pour tout ouvert U et tout $t \in \mathscr{G}(U)$, il existe un recouvrement ouvert $U = \cup_{i \in I} U_i$ et des sections $s_i \in \mathscr{F}(U_i)$ telles que $\varphi(s_i) = t_{|U_i}$ pour tout i,

(c) φ_x est surjectif pour tout $x \in X$.

1.5.8 Exercice. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ est un iso,
(b) φ est un mono et un épi,
(c) φ_x est un iso, pour tout $x \in X$.