Introduction à la Géométrie Algébrique. Le langage des schémas

Cours du 24 novembre 2015

Avant de passer à la démonstration, rappelons que dans un schéma intègre X, de point générique η, l'anneau local $K := \mathcal{O}_{X,\eta} = \kappa(\eta)$ est un corps. Tous les anneaux de fonctions $\mathcal{O}_X(U)$ d'ouverts non vides, et tous les anneaux locaux $\mathcal{O}_{X,x}$, sont intègres et de corps de fractions K. On appelle K le *corps de fonctions méromorphes* de X.

Démonstration : (1) $\Rightarrow$ (2). Soit π une uniformisante de A, alors $K = A[1/\pi]$ donc $\mathrm{Spec}(K) \subset \mathrm{Spec}(A)$ s'identifie à l'ouvert $D(\pi)$, qui est schématiquement dense. Si $f : X \to S$ est séparé, il découle donc de la proposition 5.1.5 que deux S-morphismes $u, v : \mathrm{Spec}(A) \to X$ qui coïncident sur $\mathrm{Spec}(K)$ sont égaux.

(2) $\Rightarrow$ (1). Il suffit de montrer que la diagonale $\Delta : X \to X \times_S X$ est une immersion fermée. Pour cela il suffit de montrer que l'image de Δ est fermée, cf exercice 5.1.4. Comme S est noethérien et f de type fini, alors X ainsi que $X \times_S X$ sont noethériens. Il en découle que Δ est quasi-compact, donc il suffit de montrer que $\Delta(X)$ est stable par spécialisation, d'après 5.2.9. Soit $t \in \Delta(X)$ un point, et $t \rightsquigarrow s$ une spécialisation. Soit Z le sous-schéma fermé réduit de support l'adhérence du point t, cf 2.5.4. C'est un schéma intègre, dont tous les anneaux locaux des points partagent le même corps de fractions, égal au corps résiduel $K = \kappa(t)$ de t. En particulier, on a l'inclusion $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{Z,s} \subset K$. Dans cette situation, le lemme 5.5.2 affirme qu'il existe un anneau de valuation discrète $A \subset K$ qui domine $\mathcal{O}$, i.e. $\mathcal{O} \subset A$ et $m_A \cap \mathcal{O} = m_{\mathcal{O}}$. Ceci signifie que le morphisme

$$g : \mathrm{Spec}(A) \to \mathrm{Spec}(\mathcal{O}) \to Z \to X \times_S X$$

envoie le point générique sur t et le point fermé sur s. Notons $p_1, p_2 : X \times_S X \to X$ les deux projections et $u_i = p_i \circ g$ pour $i = 1, 2$. Comme $t \in \Delta(X)$, les deux morphismes u_1, u_2 sont égaux en restriction à l'ouvert $\mathrm{Spec}(K) \subset \mathrm{Spec}(A)$. D'après la condition (2), ces morphismes sont égaux, ce qui signifie que g se factorise par la diagonale de X et $s \in \Delta(X)$. $\square$

5.5.5 Théorème (critère valuatif de propreté) Soit S un schéma noethérien, et soit $f : X \to S$ un morphisme de schémas séparé et de type fini. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) f est propre,

(2) pour tout anneau de valuation discrète A de corps de fractions K et tout carré commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Spec}(K) \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "f"] \\
\mathrm{Spec}(A) \arrow[r] \arrow[ur, dashed, "\exists!"] & S,
\end{tikzcd}$$

il existe un unique morphisme $\mathrm{Spec}(A) \to X$ qui rend tout le diagramme commutatif.

Démonstration : (1) ⇒ (2). Pour tout carré commutatif comme dans (2), on notera $X_A = X \times_S \mathrm{Spec}(A)$. On dispose d'un diagramme :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Spec}(K) \arrow[r] \arrow[dr] & X_A \arrow[r] \arrow[d, "f_A"] & X \arrow[d, "f"] \\
& \mathrm{Spec}(A) \arrow[r] & S.
\end{tikzcd}$$

On voit qu'il suffit de trouver une section $\mathrm{Spec}(A) \to X_A$ du morphisme f_A, car la composition avec $X_A \to X$ fournira la flèche pointillée recherchée. En d'autres termes, quitte à remplacer X par X_A on peut supposer que $S = \mathrm{Spec}(A)$ ce que nous faisons désormais. Soit x le point image de $\mathrm{Spec}(K) \to X$. Le point $\eta = f(x)$ est le point générique de $\mathrm{Spec}(A)$, on a donc les inclusions $K = \kappa(\eta) \hookrightarrow \kappa(x) \hookrightarrow K$ ce qui montre que $\kappa(x) = K$. Soit Z l'adhérence de x dans X, muni de la structure de sous-schéma fermé réduit. C'est un schéma intègre, de corps de fractions (le corps de fractions commun à tous les ouverts affines non vides de Z) égal à K. Comme f est universellement fermé, l'image de Z dans $S = \mathrm{Spec}(A)$ est un fermé donc égal à S entier. Ceci implique qu'il existe $z \in Z$ dont l'image par f est égale au point fermé $s \in S$. On a une inclusion de sous-anneaux locaux $A = \mathcal{O}_{S,s} \hookrightarrow \mathcal{O}_{Z,z}$ de K. Comme A est un anneau de valuation, il est maximal pour la relation de domination (lemme 5.5.3) donc $A = \mathcal{O}_{Z,z}$. Ceci fournit la section recherchée $\mathrm{Spec}(A) = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{Z,z}) \to Z \hookrightarrow X$.

(2) ⇒ (1). On doit montrer que f est universellement fermé. Soit S'/S un morphisme de changement de base et $X' = X \times_S S'$. Considérons un diagramme de la forme :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Spec}(K) \arrow[r] \arrow[d] & X' \arrow[r] \arrow[d, "f'"] & X \arrow[d, "f"] \\
\mathrm{Spec}(A) \arrow[r] & S' \arrow[r] & S.
\end{tikzcd}$$

Par propriété universelle du produit fibré qui définit X', le morphisme $\mathrm{Spec}(A) \to X$ dont la condition (2) affirme l'existence se relève en un morphisme $\mathrm{Spec}(A) \to X'$. Ceci démontre que $X' \to S'$ vérifie encore la condition (2). En conséquence, quitte à changer S en S' et X en $X' = X \times_S S'$, pour montrer que $f' : X' \to S'$ est fermé on peut supposer que $S' = S$. Soit $Z \subset X$ un fermé, vu comme sous-schéma fermé muni de la structure réduite. Soit $W \subset S$ son image par f. D'après la proposition 5.2.9, il suffit de montrer que W est stable par spécialisation. Notons $w = f(z)$ un point de W et soit $w \rightsquigarrow w'$ une spécialisation dans S ; on doit montrer que $w' \in W$. C'est une question topologique ; on peut remplacer Z (resp. X) par l'adhérence de z dans Z (resp. dans X), et S par l'adhérence de w dans S, tous munis des structures de sous-schémas réduits. Alors Z et S sont intègres, de corps de fractions $K := \kappa(z)$ et $K_0 := \kappa(w)$. Comme w est une générisation de w', il appartient au schéma local $S_{w'} = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{S,w'})$ qui est intègre. D'après le lemme 5.5.2, il existe un anneau de valuation discrète $A \subset K$ qui domine $\mathcal{O}_{S,w'}$. Notons σ le point fermé de $\mathrm{Spec}(A)$; le morphisme $\mathrm{Spec}(A) \to \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{S,w'})$ l'envoie sur w'. On se trouve avec un diagramme commutatif comme dans la condition (2). Par hypothèse, il existe un morphisme $\mathrm{Spec}(A) \to X$ qui complète le diagramme, et l'image z' de σ vérifie donc $f(z') = w'$. Ceci termine la démonstration. □

5.5.6 Corollaire. *Soient S un schéma et n un entier. Alors l'espace projectif $\mathbb{P}^n_S$ est propre sur S.*

Démonstration : Il suffit de montrer que $X = \mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}}$ est propre sur $\mathbb{Z}$. On sait qu'il est de type fini, car recouvert par les ouverts affines standard qui sont des espaces affines. Il reste à vérifier les critères valuatifs. Considérons un anneau de valuation discrète A de corps de fractions K et un diagramme carré commutatif comme celui présent dans les critères valuatifs. Quitte à remplacer X par $X \otimes_{\mathbb{Z}} A$ on se ramène à la situation suivante :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Spec}(K) \arrow[r, "g"] \arrow[dr] & \mathbb{P}^n_A \arrow[d, "f"] \\ & \mathrm{Spec}(A) \end{tikzcd}$$

D'après la description des morphismes d'un schéma local vers l'espace projectif (voir 4.6.8), le morphisme g est donné par un $(n+1)$-uplet de coordonnées homogènes $(x_0 : \ldots : x_n)$ avec $x_i \in K$, l'un au moins d'entre eux étant non nul. On peut multiplier tous les x_i simultanément par un élément $a \in K^\times$ sans changer g. Après choix d'une uniformisante π pour A, un tel élément s'écrit $a = u\pi^n$ avec $u \in A^\times$ et $n \in \mathbb{Z}$. Étendre g en un morphisme défini sur $\mathrm{Spec}(A)$ veut dire trouver a tel que les $y_i = ax_i$ soient dans A, l'un d'entre eux étant inversible. Notons v_i la valuation de x_i et $v = \min(v_i)$. Aux inversibles de A près, l'extension est possible d'une unique manière en prenant $a = \pi^{-v}$. $\square$

5.6 Aperçu de quelques résultats sur les morphismes de schémas

Les différentes propriétés des morphismes introduites dans la partie 5 sont importantes avant tout parce qu'elles entretiennent des relations entre elles et permettent de dresser un paysage structuré de l'ensemble des morphismes. Nous présentons maintenant sans preuve quelques résultats fondamentaux qui illustrent cette réflexion, pour donner à la lectrice / au lecteur l'envie d'en savoir plus.

5.6.1 Sur la structure des morphismes séparés quasi-compacts. Considérons la catégorie QC des morphismes de schémas $X \to S$ séparés et quasi-compacts ; elle contient presque tous les schémas sur lesquels on se pose les questions les plus naturelles. Sous une hypothèse faible sur S, le théorème suivant affirme que tout objet de QC se factorise en une partie affine et une partie propre.

Théorème de décomposition de Temkin. *Supposons S quasi-séparé (i.e. à diagonale quasi-compacte) et quasi-compact (par exemple noethérien). Alors tout morphisme séparé quasi-compact $X \to S$ possède une factorisation en un morphisme affine $X \to Y$ et un morphisme propre $Y \to S$.*

Notons A, resp. P la sous-catégorie pleine des morphismes affines, resp. propres. Le théorème de Temkin affirme donc que A et P engendrent QC d'une certaine manière. Pour compléter cette perception, il est utile de connaître $\mathsf{A} \cap \mathsf{P}$ pour savoir à quel point ces deux sous-catégories sont en « somme directe ». La réponse est apportée par le résultat suivant.

Théorème de Chevalley-Grothendieck. *Soit $f : X \to S$ un morphisme. Les conditions suivantes sont équivalentes : f est fini ; f est propre et affine ; f est propre à fibres finies.*

Si l'on considère les morphismes finis comme « négligeables », on obtient donc une description assez claire. On peut penser à une factorisation $X \to Y \to S$ comme à une sorte de suite exacte [3] et résumer les deux résultats précédents en termes approximatifs en disant qu'on a une extension

$$0 \to \mathsf{A}' \to \mathsf{QC}' \to \mathsf{P}' \to 0$$

où les « prime » désignent les catégories $\mathsf{A}, \mathsf{QC}, \mathsf{P}$ modulo les morphismes finis. (On peut donner un sens à ces catégories « prime », en revanche la suite exacte n'est qu'une image.)

5.6.2 Sur la structure des morphismes séparés quasi-finis. On s'intéresse maintenant à la catégorie QF des morphismes séparés quasi-finis. Les immersions ouvertes et les morphismes finis sont des exemples simples (ci-dessus nous avons négligé les morphismes finis mais ici ils seront très importants). Le théorème suivant affirme que tout morphisme qui est dans QF se factorise en termes de ces exemples.

Théorème principal de Zariski. *Soit S un schéma quasi-séparé et quasi-compact. Alors tout morphisme séparé quasi-fini $f : X \to S$ possède une factorisation en une immersion ouverte quasi-compacte $X \to Y$ et un morphisme fini $Y \to S$.*

Notons IO, resp. F, la sous-catégorie pleine des immersions ouvertes quasi-compactes, resp. des morphismes finis. L'intersection $\mathsf{IO} \cap \mathsf{F}$ est constituée des immersions ouvertes et finies $X \to S$, qui sont fermées donc identifient X à une somme disjointe de composantes connexes de S. Si S est connexe, ces immersions sont des isomorphismes. Comme dans 5.6.1, on peut donc dire qu'on a une sorte d'extension $0 \to \mathsf{IO}' \to \mathsf{QF}' \to \mathsf{F}' \to 0$ où les « prime » désignent les catégories modulo les immersions ouvertes et fermées.

5.6.3 Sur la structure des morphismes propres. On s'intéresse enfin à la structure de la catégorie P des morphismes propres. La décomposition qui sera donnée ici fera jouer un rôle à la sous-catégorie pleine PC dont les objets sont les morphismes propres à fibres géométriquement connexes, et à la sous-catégorie pleine F des morphismes finis. Moralement, il s'agit des deux familles d'objets contraires : connexes d'une part, totalement discontinus d'autre part.

Théorème de finitude. *Soit S un schéma localement noethérien. Alors pour tout morphisme propre $f : X \to S$ et tout $\mathcal{O}_X$-module cohérent $\mathscr{F}$, l'image directe $f_*\mathscr{F}$ est un $\mathcal{O}_S$-module cohérent.*

Par exemple, si X est un schéma propre sur un corps k, ce théorème implique que $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ est un k-espace vectoriel de dimension finie. Dans l'énoncé suivant, il implique que $f_*\mathcal{O}_X$ est une $\mathcal{O}_S$-algèbre finie et le morphisme fini $S' \to S$ est donné par $S' = \mathrm{Spec}(f_*\mathcal{O}_X)$.

Théorème de factorisation de Stein. *Soit S un schéma localement noethérien. Alors tout morphisme propre $f : X \to S$ se factorise en un morphisme propre à fibres non vides et géométriquement connexes $X \to S'$, et un morphisme fini $S' \to S$.*

3. Dans la catégorie des schémas en groupes de type fini sur un corps k, l'analogie avec la suite exacte n'est pas qu'une analogie, en vertu du théorème suivant dû à Barsotti et Chevalley : pour tout k-schéma en groupes de type fini G, il existe une suite exacte de schémas en groupes $1 \to H \to G \to A \to 1$ avec H affine et distingué, et A propre, lisse et géométriquement connexe sur k. Un tel A est appelé une *variété abélienne* sur k.

L'intersection $\mathsf{PC} \cap \mathsf{F}$ est composée des morphismes finis à fibres géométriquement connexes, qui sont aussi les morphismes finis et universellement injectifs. Deux exemples typiques de tels morphismes sont l'immersion fermée $X_{\mathrm{red}} \hookrightarrow X$ du sous-schéma réduit, et le morphisme $\mathrm{Spec}(\ell) \to \mathrm{Spec}(k)$ induit par une extension finie purement inséparable de corps. Ici encore, on se représente la situation de manière imagée par une extension $0 \to \mathsf{PC}' \to \mathsf{P}' \to \mathsf{F}' \to 0$ où les « prime » désignent les catégories modulo les morphismes finis universellement injectifs.