Introduction à la Géométrie Algébrique. Le langage des schémas

Cours du 17 novembre 2015

5.1.5 Proposition. *Soit X un S-schéma séparé.*

(1) *Pour tout morphisme de S-schémas $f : Y \to X$, le morphisme graphe $\Gamma_f := (\mathrm{id}, f) : Y \to Y \times_S X$ est une immersion fermée.*

(2) *Pour toute paire de S-morphismes $f, g : Y \to X$, l'égalisateur $\mathrm{egal}(f,g) = Y \times_{(f,g),X\times X,\Delta} X$ est un sous-schéma fermé de Y.*

(3) *Pour toute paire de S-morphismes $f, g : Y \to X$ qui coïncident sur un ouvert schématiquement dense $U \subset Y$, on a $f = g$.*

Démonstration : (1) Le graphe $\Gamma_f : Y \to Y \times_S X$ s'obtient à partir de la diagonale $\Delta_{X/S} : X \to X \times_S X$ par changement de base par le morphisme $(f \times \mathrm{id}) : Y \times_S X \to X \times_S X$. Le résultat découle donc du fait que les immersions fermées sont stables par changement de base.
(2) Par définition $\mathrm{egal}(f, g)$ s'obtient par un changement de base de la diagonale.
(3) Soit i l'immersion fermée de $Z = \mathrm{egal}(f, g)$ dans Y. Soit $j : U \hookrightarrow Y$ l'immersion ouverte. Par hypothèse j se factorise par un morphisme $k : U \to Z$ (qui est nécessairement une immersion), i.e. $j = ik$. Comme U est schématiquement dense (définition 3.4.7), le morphisme composé

$$\mathcal{O}_Y \xrightarrow{i^\sharp} i_*\mathcal{O}_Z \xrightarrow{i_*k^\sharp} j_*\mathcal{O}_U = i_*k_*\mathcal{O}_U$$

est injectif. On en déduit que $\mathcal{O}_Y \to i_*\mathcal{O}_Z$ est injectif, et comme il est surjectif c'est un isomorphisme de faisceaux. Donc $Z \simeq Y$, ce qui montre que $f = g$. □

5.1.6 Exercice. Soit X la droite affine avec origine dédoublée, sur un corps de base k (voir 2.1.9). Montrez que X n'est pas séparé sur k. Donnez un exemple de deux morphismes de k-schémas $f, g : Y \to X$ qui sont distincts mais coïncident sur un ouvert schématiquement dense de Y.

5.2 Morphismes affines et quasi-compacts

5.2.1 Définition. On dit qu'un morphisme de schémas $f : X \to S$ est *affine* si la préimage de tout ouvert affine de S est un ouvert affine de X.

5.2.2 Proposition. *Les morphismes affines sont stables par composition, changement de base, et localisation au but.*

Démonstration : Exercice. □

Une immersion fermée est affine. Tout sous-schéma fermé de $\mathbb{A}^n_S$ est affine sur S.

5.2.3 Exercice. Montrez que $f : X \to S$ est affine si et seulement s'il existe un recouvrement de S par des ouverts affines S_i tels que $f^{-1}(S_i)$ est affine pour tout i.

5.2.4 Exercice. Donnez un exemple d'immersion ouverte qui n'est pas affine.

On peut maintenant généraliser au cadre relatif l'équivalence de catégories entre anneaux et schémas affines.

5.2.5 Proposition. *Si $f : X \to S$ est un S-schéma affine, la $\mathcal{O}_S$-algèbre $\mathscr{A}(X) = f_*\mathcal{O}_X$ est quasi-cohérente. Si $\mathscr{A}$ est une $\mathcal{O}_S$-algèbre quasi-cohérente, le S-schéma* $\mathrm{Spec}(\mathscr{A})$ *est affine. Les foncteurs :*

$$\{\mathcal{O}_S\text{-}\textit{algèbres quasi-cohérentes}\} \underset{\mathscr{A}}{\overset{\mathrm{Spec}}{\rightleftarrows}} \{S\text{-}\textit{schémas affines}\}$$

sont des équivalences de catégories quasi-inverses l'une de l'autre.

Démonstration : Soit $f : X \to S$ un S-schéma affine. Il suffit de vérifier que $\mathscr{A}(X)$ est quasi-cohérente sur un recouvrement de S par des ouverts affines $S_i = \mathrm{Spec}(R_i)$, d'après 4.2.5. Notons $X_i = f^{-1}(S_i)$ qui est un schéma affine, et $f_i : X_i \to S_i$ la restriction de f. Par définition de $f_*\mathcal{O}_X$ on voit que $\mathscr{A}(X)_{|S_i} = f_{i,*}\mathcal{O}_{X_i}$, qui est une algèbre quasi-cohérente d'après l'exercice 4.2.7. Soit $\mathscr{A}$ une $\mathcal{O}_S$-algèbre quasi-cohérente et $f : X = \mathrm{Spec}(\mathscr{A}) \to S$. Alors, par construction du spectre d'une $\mathcal{O}_S$-algèbre, pour tout ouvert affine $U \subset S$ on a $f^{-1}(U) = \mathrm{Spec}(\mathscr{A}(U))$ qui est un schéma affine. Le fait que les deux foncteurs sont des équivalences quasi-inverses est laissé au lecteur. □

5.2.6 Définition. Soit $f : X \to S$ un morphisme de schémas. On dit que f est *quasi-compact* si la préimage de tout ouvert quasi-compact de S est un ouvert quasi-compact de X.

5.2.7 Proposition. *Les morphismes quasi-compacts sont stables par composition, changement de base, et localisation au but.*

Démonstration : Exercice. □

5.2.8 Exercice. Montrez que $f : X \to S$ est quasi-compact si et seulement s'il existe un recouvrement de S par des ouverts affines S_j tels que $f^{-1}(S_j)$ est quasi-compact pour tout j.

Nous terminons par un résultat sur l'image des morphismes quasi-compacts, qui nous sera utile dans l'étude des morphismes propres.

5.2.9 Proposition. *Soit $f : X \to S$ un morphisme quasi-compact. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) $f(X)$ *est fermé,*

(2) $f(X)$ *est stable par spécialisation.*

Démonstration : On sait que (1) $\Rightarrow$ (2), montrons que (2) $\Rightarrow$ (1). Il suffit de montrer que $f(X)\cap U$ est fermé dans U, pour tout ouvert affine U de S. Comme $f(X)\cap U$ est stable par les spécialisations dans U, quitte à changer S en U on s'est ramené au cas où S est affine. Comme f est quasi-compact, le schéma X est alors recouvert par un nombre fini d'ouverts affines $X_i = \mathrm{Spec}(A_i)$. L'image de f est égale à l'image de la composée $X_1 \amalg \dots \amalg X_n \to X \to S$. Comme $X_1 \amalg \dots \amalg X_n$ est le schéma affine spectre de $A_1 \times \dots \times A_n$, on s'est ramené au cas où X est affine.

Supposons donc que $S = \mathrm{Spec}(R)$ et $X = \mathrm{Spec}(A)$. Soit $s = [p]$ un point dans l'adhérence de $T := f(X)$, c'est-à-dire que $D(g)\cap T \neq \varnothing$ pour tout $g \in R$, $g \notin p$. Comme $D(g)\cap T$ est l'image de la restriction de f à $X_g = D(g1_A) = \mathrm{Spec}(A_g)$, on déduit que A_g est non nul, ou encore que $1 \neq 0$ dans A_g. Soit A_p le localisé de A par rapport à la partie multiplicative $R \smallsetminus p$. On a $A_p = \varinjlim_{g\notin p} A_g$. On a encore $1 \neq 0$ dans A_p, donc cet anneau est non nul. L'image de n'importe quel point de $\mathrm{Spec}(A_p)$ par le composé $\mathrm{Spec}(A_p) \to \mathrm{Spec}(A) \to \mathrm{Spec}(R)$ est un idéal premier p' inclus dans p. Donc $s = [p]$ est spécialisation de $s' = [p'] \in T$. Comme T est stable par spécialisation, on conclut que $s \in T$. $\square$

5.3 Morphismes de type fini, finis et quasi-finis

5.3.1 Définition. Soit $f : X \to S$ un morphisme de schémas. On dit que f est *localement de type fini* si pour tout ouvert affine $U = \mathrm{Spec}(R)$ de S et pour tout ouvert affine $V = \mathrm{Spec}(A)$ de $f^{-1}(U)$, le morphisme $R \to A$ fait de A une R-algèbre de type fini. On dit que f est *de type fini* s'il est quasi-compact et localement de type fini.

5.3.2 Proposition. *Les morphismes localement de type fini sont stables par composition, changement de base, localisation à la source et localisation au but. Les morphismes de type fini sont stables par composition, changement de base, et localisation au but.*

Démonstration : Exercice. $\square$

5.3.3 Exercice. Montrez que $f : X \to S$ est localement de type fini si et seulement s'il existe un recouvrement de S par des ouverts affines $S_j = \mathrm{Spec}(R_j)$ et un recouvrement de X par des ouverts affines $X_{i,j} = \mathrm{Spec}(A_{i,j})$ tels que $f(X_{i,j}) \subset S_j$ et que $A_{i,j}$ est une R_j-algèbre de type fini.

5.3.4 Définition. On dit qu'un morphisme de schémas $f : X \to S$ est *fini* si pour tout ouvert affine $U = \mathrm{Spec}(R)$ de S, la préimage $V = f^{-1}(U)$ est un ouvert affine $V = \mathrm{Spec}(A)$ et le morphisme $R \to A$ fait de A un R-module de type fini.

On notera bien que l'on demande que A soit R-module de type fini (on dit souvent simplement R-module *fini*), et non pas R-algèbre de type fini. On dit souvent que A est une *R-algèbre finie.*

5.3.5 Définition. On dit que f est *quasi-fini* s'il est de type fini et à fibres finies (ensemblistement).

5.3.6 Proposition. *Les morphismes finis, resp. quasi-finis, sont stables par composition, changement de base, et localisation au but.*

Démonstration : Exercice. $\square$

5.3.7 Exercice. Montrez qu'une immersion ouverte est localement de type fini. Donnez un exemple d'immersion ouverte qui n'est pas quasi-compacte. Montrez qu'une immersion fermée est de type fini et même quasi-finie.

5.3.8 Proposition. *Tout morphisme fini est affine et quasi-fini.*

Démonstration : Un morphisme fini $f : X \to S$ est affine par définition. Comme une R-algèbre finie est clairement de type fini comme algèbre, on voit que f est aussi de type fini. Pour voir qu'il est quasi-fini, on se ramène au cas affine et il suffit de montrer que pour toute R-algèbre finie A, et pour tout corps résiduel $R \to \kappa$, le schéma $\mathrm{Spec}(A \otimes_R \kappa)$ est ensemblistement fini. Soient $x_1, \dots, x_r$ des générateurs de A comme R-module. Leurs images dans $A \otimes_R \kappa$ l'engendrent comme κ-espace vectoriel. En particulier $A \otimes_R \kappa$ est un anneau artinien, produit direct d'un nombre fini d'anneaux locaux artiniens dont le spectre est un point. Ceci conclut. □

5.3.9 Remarque. Nous avons mentionné plus haut le fait que, sur des schémas de base qui ne sont pas (localement) noethériens, le bon analogue de la notion de $\mathcal{O}_X$-module de type fini est celle de module cohérent. Cette dernière incorpore une idée de finitude non seulement pour les générateurs, mais aussi pour les relations, et grâce à ceci elle se comporte mieux dans le cadre non noethérien. Pour les mêmes raisons, sur des schémas non (localement) noethériens, il existe des analogues des notions de morphismes localement de type fini et de type fini, qui sont les morphismes localement de présentation finie, et de présentation finie. Dans ce cours nous n'introduisons pas ces notions, dont nous ne ferons pas usage.

5.4 Morphismes propres

La notion relative de compacité en topologie est celle d'application *propre*, ce qui désigne (au moins dans le cadre des espaces séparés localement compacts) une application continue telle que la préimage de tout compact est un compact. De même que pour la notion de séparation, la notion de compacité ne peut pas être transposée trop naïvement en géométrie algébrique. Par exemple, la définition « séparé et quasi-compact » ne suffit pas car l'espace affine $\mathbb{A}^n_k$ sur un corps vérifie ces conditions sans posséder aucune des propriétés de finitude que l'on attend des objets compacts.

En fait, la bonne notion topologique de propreté est celle d'application continue universellement fermée (sans hypothèse localement compacte), comme on peut le lire dans Bourbaki, *Topologie Générale*, chap. I, § 10, no 3, prop. 7. On s'inspire de cette définition pour obtenir une notion de propreté fructueuse en géométrie algébrique.

5.4.1 Définition. On dit qu'un morphisme de schémas $f : X \to S$ est *universellement fermé* si pour tout $S' \to S$, le morphisme $f' : X' = X \times_S S' \to S'$ obtenu après changement de base est fermé. On dit qu'un morphisme de schémas $f : X \to S$ est *propre* s'il est séparé, de type fini, et universellement fermé.

5.4.2 Proposition. *Les morphismes universellement fermés, resp. propres, sont stables par composition, changement de base, et localisation au but.*

Démonstration : Exercice. □

Voici un exemple relativement facile de morphisme propre.

5.4.3 Théorème. *Tout morphisme fini est propre.*

Démonstration : Il s'agit d'une formulation géométrique du théorème suivant de Cohen et Seidenberg (voir [Ei], prop. 4.15) : *pour toute extension entière d'anneaux $R \to A$, tout premier $p \subset R$ et tout idéal $I \subset A$ tel que $I \cap R \subset p$, il existe un premier $q \subset A$ tel que $q \cap R = p$.* On rappelle qu'un morphisme d'anneaux $R \to A$ est *entier* si tout élément $x \in S$ est racine d'un polynôme unitaire non nul à coefficients dans R. D'après le théorème de Cayley-Hamilton ([Ei], th. 4.3), toute R-algèbre finie est entière et nous pourrons donc appliquer le théorème de Cohen-Seidenberg. Passons à la preuve du théorème. Soient $f : X \to S$ un morphisme fini, $Y \subset X$ un fermé, et $T = f(Y)$ son image ensembliste. Pour montrer que T est fermé, il suffit de le faire localement sur S. On peut donc remplacer S par un ouvert affine $U = \mathrm{Spec}(R)$ et X par la préimage, qui est un ouvert affine $f^{-1}(U) = \mathrm{Spec}(A)$ puisque f est affine. Alors $Y = V(I)$ pour un certain idéal I. Montrons que $f(Y) = V(I \cap R)$. Il s'agit de démontrer l'énoncé algébrique suivant : les premiers $p \subset R$ tels que $p = q \cap R$ pour un certain premier $q \subset A$ contenant I sont exactement les premiers contenant $I \cap R$. L'inclusion directe est immédiate et l'inclusion réciproque est le théorème de Cohen-Seidenberg. Nous obtenons ainsi que f est fermé. De plus, le morphisme $f' : X' \to S'$ déduit de f par un changement de base $S' \to S$ est encore fini, donc fermé d'après ce qui précède. Ainsi f est universellement fermé. (Et la preuve montre d'ailleurs que le résultat est vrai aussi pour les morphismes *entiers*, i.e. les $f : X \to S$ tels que pour tout ouvert affine $U = \mathrm{Spec}(R)$ de S, la préimage $V = f^{-1}(U)$ est un ouvert affine $V = \mathrm{Spec}(A)$ et le morphisme $R \to A$ fait de A une R-algèbre entière.) □

5.5 Critères valuatifs

5.5.1 Préliminaires sur les anneaux de valuation. On trouvera dans [Mat], §§ 10-11 les faits suivants. Rappelons d'abord qu'un *anneau de valuation* est un anneau intègre A tel que pour tout élément non nul x du corps de fractions K, on a $x \in A$ ou $x^{-1} \in A$. Dans un anneau de valuation, l'ensemble des idéaux est totalement ordonné par inclusion. En particulier, un anneau de valuation est un anneau local. Un *anneau de valuation discrète* est un anneau de valuation dont l'idéal maximal est principal. Dans un tel anneau, on appelle *uniformisante* un générateur de l'idéal maximal, c'est-à-dire un élément premier de A. D'après [Mat], th. 11.2, les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) A est un anneau de valuation discrète,

(ii) A est un anneau local principal qui n'est pas un corps,

(iii) A est un anneau local noethérien de dimension > 0 et son idéal maximal est principal,

(iv) A est un anneau local noethérien de dimension 1 normal.

Les anneaux $k[X]_{(X)}$, $k[[X]]$ avec k un corps, $\mathbb{Z}_{(p)}$, $\mathbb{Z}_p$ sont des exemples. Si $A \subset B$ est une inclusion d'anneaux locaux, on dit que B *domine* A si et seulement si $m_B \cap A = m_A$. Il est équivalent de dire que $m_A B \subset m_B$, on encore que l'inclusion $A \hookrightarrow B$ est un morphisme d'anneaux locaux, ou encore que le morphisme $\mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$ envoie le point fermé sur le point fermé.

5.5.2 Lemme. *Soit A_0 un anneau local intègre noethérien de corps de fractions K_0. Soit K/K_0 une extension de corps de type fini. Alors, il existe un anneau de valuation discrète A de corps de fractions K et qui domine A_0.*

Démonstration : Voir [GW], lemma 15.6. $\square$

5.5.3 Lemme. *Soit A un anneau de valuation de corps de fractions K. Soit $A \subset B \subsetneq K$ un sous-anneau strict de K, local, qui domine A. Alors $B = A$.*

Démonstration : Soit $x \in B$ un élément non nul. Comme $K = \mathrm{Frac}(A)$, on peut écrire $x = r/s$ avec $r, s \in A$. Comme l'ensemble des idéaux de A est totalement ordonné, on a soit $rA \subset sA$, soit $sA \subset rA$. Dans le premier cas, il existe $t \in A$ tel que $r = st$. Alors $x = r/s = t \in A$. Dans le second cas, il existe $t \in A$ tel que $s = rt$. Alors $t \notin m_A$ car sinon $1 = rt/s = tx \in m_A B \subset m_B$, ce qui est impossible. Comme A est un anneau de valuation, on déduit que $t \in A^\times$ donc $x = 1/t \in A$. $\square$

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer et démontrer les critères valuatifs de séparation et de propreté. Nous donnons une version valable sur un schéma de base noethérien pour nous limiter à la manipulation d'anneaux de valuation *discrète*, mais en utilisant des versions non noethériennes de 5.5.2 et 5.5.3 avec des anneaux de valuation généraux, on démontrerait sans beaucoup plus de mal les critères sur une base S quelconque.

5.5.4 Théorème (critère valuatif de séparation) Soit S un schéma noethérien, et soit $f : X \to S$ un morphisme de schémas de type fini. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) f est séparé,

(2) pour tout anneau de valuation discrète A de corps de fractions K et tout carré commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Spec}(K) \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "f"] \\ \mathrm{Spec}(A) \arrow[r] \arrow[ur, dashed, "!"] & S, \end{tikzcd}$$

il existe au plus un morphisme $\mathrm{Spec}(A) \to X$ qui rend tout le diagramme commutatif.

Le morphisme $\mathrm{Spec}(K) \to \mathrm{Spec}(A)$ du diagramme est bien sûr celui induit par l'inclusion $A \subset K$.