Introduction à la Géométrie Algébrique. Le langage des schémas

Cours du 7 septembre 2015

Références

[Pour la géométrie]

[EH] D. Eisenbud, J. Harris, *The geometry of schemes*, Graduate Texts in Math. 197, Springer-Verlag (2000).

[Ha] R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, Graduate Texts in Math. 52, Springer-Verlag (1977).

[Liu] Q. Liu, *Algebraic geometry and arithmetic curves*, Oxford Graduate Texts in Math. no. 6, Oxford University Press (2002).

[Pour l'algèbre commutative]

[Ei] D. Eisenbud, *Commutative algebra with a view toward algebraic geometry*, Graduate Texts in Math., Springer-Verlag (1995).

[Mat] H. Matsumura, *Commutative ring theory*, Cambridge Studies in Advanced Math. 8. Cambridge University Press (1989).

[Pour la théorie des catégories]

[Le] T. Leinster, *Basic category theory*, Cambridge Studies in Advanced Math. 143. Cambridge University Press (2014).

[Mac] S. MacLane, *Categories for the working mathematician*, Graduate Texts in Math. no. 5, Springer (1978).

[Références complémentaires]

[Per] D. Perrin, *Géométrie Algébrique, une introduction*, EDP Sciences - CNRS éditions (2001).

[Awo] S. Awodey, *Category Theory*, Oxford University Press (2006).

$\therefore$

Dans ce cours, tous les anneaux considérés sont commutatifs et unitaires.

1 Définition des schémas

1.1 Pourquoi les schémas

1.1.1 Variétés algébriques affines. Nous rappelons d'abord brièvement ce que sont les variétés algébriques « classiques », qui composaient le sujet d'étude de la géométrie algébrique jusqu'à la fin des années 1950, puis nous expliquons la place que sont venus occuper les schémas au côté de celles-ci.

Pour ces rappels, on peut se reporter à un cours de M1 d'algèbre et géométrie, ou au chapitre I du livre de D. Perrin [Per], ou au chapitre 1 de Hartshorne [Ha].

Soit k un corps algébriquement clos. En géométrie algébrique classique, on étudie les *ensembles algébriques affines*, qui sont les lieux de zéros communs de polynômes $f_1, \dots, f_r \in k[t_1, \dots, t_n]$:

$$X = \{x \in k^n ; f_1(x) = \cdots = f_r(x) = 0\}.$$

L'ensemble X est muni de la *topologie de Zariski* dont les fermés sont les ensembles algébriques affines inclus dans X. L'espace affine $\mathbb{A}^n(k) = k^n$ est un exemple, et tout ensemble algébrique affine est fermé dans un espace affine. On dit que X est une *variété affine* s'il est irréductible, i.e. s'il est non vide et n'est pas réunion de deux fermés propres. Par exemple, la courbe $X \subset \mathbb{A}^2(k)$ d'équation $y^2 = x^3 + 1$ est irréductible, alors que la courbe d'équation $xy = 0$ est réductible, avec deux composantes irréductibles d'équations $x = 0$ et $y = 0$. Un *morphisme* entre deux ensembles algébriques affines $X \subset \mathbb{A}^n(k)$, $Y \subset \mathbb{A}^m(k)$ est une application induite par une application à composantes polynomiales $\mathbb{A}^n(k) \to \mathbb{A}^m(k)$. À un ensemble algébrique affine X on associe l'idéal $\mathfrak{a}_X \subset k[t_1, \dots, t_n]$ des fonctions nulles sur X, et l'*anneau des fonctions régulières* :

$$\Gamma(X) = k[t_1, \dots, t_n]/\mathfrak{a}_X.$$

Celui-ci est réduit, i.e. sans élément nilpotent (non nul). De plus X est une variété ssi $\Gamma(X)$ est intègre. Si $Y \subset X$ est un fermé, son idéal $\mathfrak{a}_Y$ contient $\mathfrak{a}_X$, et l'anneau des fonctions régulières $\Gamma(Y)$ est donc un quotient de $\Gamma(X)$. Si $u : X \to Y$ est un morphisme, toute fonction f sur Y induit une fonction $\Gamma(u) = f \circ u$ sur X, de sorte qu'on obtient un morphisme de k-algèbres $\Gamma(Y) \to \Gamma(X)$.

Le Nullstellensatz (théorème des zéros) de Hilbert permet de reconstruire X à partir de $A = \Gamma(X)$. Il affirme que tout idéal maximal $m \subset A$ est de la forme $(t_1 - x_1, \dots, t_n - x_n)$ pour un unique point $x \in X$. Le morphisme de quotient $A \to A/m \simeq k$ s'identifie alors au morphisme d'évaluation $f \mapsto f(x)$. On est amené à associer à toute k-algèbre de type fini A son *spectre maximal* :

$$\mathrm{Spm}(A) = \{\text{idéaux maximaux de } A\}.$$

Un fermé de Zariski de $\mathrm{Spm}(A)$ s'identifie à un ensemble $\mathrm{Spm}(A/I)$ pour un idéal $I \subset A$. Grâce au Nullstellensatz, la préimage d'un idéal maximal par un morphisme de k-algèbres de type fini $\varphi : A \to B$ est un idéal maximal. On peut donc définir une application $\mathrm{Spm}(\varphi) : \mathrm{Spm}(B) \to \mathrm{Spm}(A)$ par $n \mapsto \varphi^{-1}(n)$. Les applications $V \mapsto \Gamma(V)$ et $A \mapsto \mathrm{Spm}(A)$ donnent une bijection

$$\big\{\text{ensembles algébriques affines sur } k\big\} \xleftrightarrow{1-1} \big\{k\text{-algèbres de type fini réduites}\big\}\ .$$

1.1.2 Schémas affines. Dans le membre de droite, les restrictions imposées aux anneaux (être une algèbre sur un corps algébriquement clos ; de type fini ; réduite) sont des obstacles pour traiter de nombreuses questions géométriques et arithmétiques. Il est souhaitable de les lever. Les schémas affines réalisent ce souhait : ils généralisent les ensembles algébriques affines de manière à étendre la correspondance bijective :

$$\begin{tikzcd}
\big\{\text{ensembles algébriques affines sur } k\big\} \arrow[r, leftrightarrow, "1-1"] \arrow[d, hook, dashed] & \big\{k\text{-algèbres de type fini réduites}\big\} \arrow[d, hook] \\
\big\{\text{schémas affines}\big\} \arrow[r, leftrightarrow, dashed, "1-1"] & \big\{\text{anneaux}\big\}.
\end{tikzcd}$$

On notera que la correspondance entre espaces et anneaux de fonctions est un phénomène classique qui existe dans d'autres contextes. L'exercice suivant présente un exemple.

1.1.3 Exercice. Soit X un espace topologique compact et A l'anneau des fonctions continues de X dans $\mathbb{R}$. Pour $x \in X$, on note $m_x = \{f \in A; f(x) = 0\}$. Montrez que $X \to \mathrm{Spm}(A)$, $x \mapsto m_x$ est un homéomorphisme. On pourra consulter [Ei], chapitre 1, exercice 1.25.

1.1.4 Schémas. Les schémas sont ensuite obtenus à partir des schémas affines par le même procédé de globalisation que celui qui permet de définir les variétés algébriques abstraites générales à partir des ensembles algébriques affines. Nous reviendrons plus loin sur les idées de *globalisation* et de *recollement*. Pour l'instant, le point de vue qui nous sera utile passe par quelques rappels de géométrie différentielle. Soit M un espace topologique. Une structure de *variété différentielle* sur M est définie par une collection de *cartes* qui sont des homéomorphismes $\phi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^n$ sur des ouverts U_α recouvrant M, tels que les *changements de cartes* $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}$ soient des difféomorphismes entre ouverts convenables de $\mathbb{R}^n$. On définit les *fonctions différentiables* sur un ouvert $U \subset M$ comme les $f : U \to \mathbb{R}$ telles que $f \circ \phi_\alpha^{-1}$ est une fonction différentiable de $\phi_\alpha(U \cap U_\alpha) \subset \mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}$, pour tout α. On note $\mathcal{O}(U)$ l'anneau composé par ces fonctions. La collection $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}(U)\}_{U \subset M}$ est un exemple de ce qu'on appelle un *faisceau*; elle détermine la structure de variété différentielle sur M, puisque les cartes $\phi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^n$ sont déterminées par leurs fonctions coordonnées $\phi_{\alpha,1}, \dots, \phi_{\alpha,n}$ qui sont éléments de $\mathcal{O}(U_\alpha)$.

On peut donc représenter une variété différentielle comme une paire $(M, \mathcal{O})$ composée d'un espace topologique et un faisceau d'anneaux, localement isomorphe à $(\mathbb{R}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{R}^n})$. Cette approche est discutée par exemple dans la page wikipedia consacrée aux variétés différentiables, voir ici. C'est ce modèle qui servira pour la définition d'un schéma. Notre programme dans cette première section est le suivant : introduire les schémas affines, les faisceaux, et les « espaces localement annelés » qui donnent le cadre pour la définition générale d'un schéma.

1.1.5 Exercice. Soit X un espace topologique. Montrez que les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) $X \neq \varnothing$ et X n'est pas réunion de deux fermés stricts,

(2) $X \neq \varnothing$ et deux ouverts non vides de X ont une intersection non vide,

(3) $X \neq \varnothing$ et tout ouvert non vide de X est dense,

(4) $X \neq \varnothing$ et tout ouvert de X est connexe.

Lorsqu'elles sont remplies, on dit que X est *irréductible*. Soit X quelconque et $Y \subset X$ une partie. Montrez que Y est irréductible si et seulement si son adhérence $\overline{Y}$ est irréductible.

1.2 L'ensemble sous-jacent à un schéma affine

1.2.1 Le spectre premier d'un anneau. Comme expliqué dans 1.1, on souhaite passer de certaines algèbres de type fini très particulières aux anneaux généraux. La définition du spectre maximal ne nécessite aucune hypothèse sur A, mais pour les anneaux quelconques, celui-ci contient trop peu d'information sur A. Un problème se pose notamment si l'on veut associer à tout morphisme d'anneaux $\varphi : A \to B$ un morphisme $\mathrm{Spm}(\varphi) : \mathrm{Spm}(B) \to \mathrm{Spm}(A)$, car en général $\varphi^{-1}(n)$ n'est pas maximal, même si $n \subset B$ est maximal. (Exemple : l'inclusion $\varphi : \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$.) Ce problème ne se pose pas avec les idéaux premiers et avec le *spectre premier* de A :

$$\mathrm{Spec}(A) = \{\text{idéaux premiers de } A\}.$$

En effet, si $q \subset B$ est premier, l'injection $A/\varphi^{-1}(q) \hookrightarrow B/q$ montre que $\varphi^{-1}(q) \subset A$ est premier. On a donc une application $\mathrm{Spec}(\varphi) : \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$, $q \mapsto \varphi^{-1}(q)$. Nous aurons d'autres occasions de voir pourquoi le spectre premier est plus naturel que le spectre maximal.

On pense à $\mathrm{Spec}(A)$ comme un *espace*, i.e. un objet géométrique. Un idéal premier $p \subset A$ définit un point de cet espace, noté $[p]$. Dans un souci de clarté, on évite le plus souvent de mélanger les notations de l'algèbre commutative et celles de la géométrie. Ainsi, si $X = \mathrm{Spec}(A)$, on notera souvent x plutôt que $[p]$ le point correspondant à un premier $p \subset A$.

Soit $X = \mathrm{Spec}(A)$ et $x = [p]$. On appelle *anneau local de* x l'anneau localisé $\mathcal{O}_{X,x} := A_p = S^{-1}A$ avec $S = A \smallsetminus p$. C'est un anneau local d'idéal maximal $m_x := pA_p$. On appelle *corps résiduel de* x le corps $\kappa(x) := \mathcal{O}_{X,x}/m_x = A_p/pA_p = \mathrm{Frac}(A/p)$.

1.2.2 Fonctions régulières. Une des idées fortes de la théorie est que les élements $f \in A$ sont pensés comme des fonctions sur $X = \mathrm{Spec}(A)$. On appelle donc A l'*anneau des fonctions régulières* sur X. Si $x \in X$, la *valeur de* f *en* x notée $f(x)$ est l'image de f dans le corps résiduel $\kappa(x)$ par l'application $A \to A/p \to \mathrm{Frac}(A/p)$. Une fonction régulière prend donc ses valeurs dans des corps variables ; ce n'est pas une fonction au sens usuel, mais ce n'est pas très grave. Prenons l'exemple de $A = \mathbb{Z}$. Alors $X = \{(0), (2), (3), (5), \ldots\}$ et les corps résiduels sont $\mathbb{Q}$, $\mathbb{F}_2$, $\mathbb{F}_3$, $\mathbb{F}_5$, etc. La fonction $f = 28$ prend les valeurs $f(0) = 28 \in \mathbb{Q}$, $f(2) = 0 \in \mathbb{F}_2$, $f(3) = 1 \in \mathbb{F}_3$, $f(5) = 3 \in \mathbb{F}_5$, etc.

Des conditions telles que $f(x) = 0$, ou $f(x) \neq 0$, ou $f(x) = 1$, ont un sens sans référence au corps $\kappa(x)$. Il est équivalent de dire que $f(x) \neq 0$ pour tout $x \in X$, ou que f est inversible dans A : en effet, si f n'est pas inversible, d'après le lemme de Zorn il est inclus dans un idéal maximal p, et on a $f(x) = 0$ pour $x = [p] \in X$; la réciproque est immédiate. Pour conclure ces quelques mots sur les fonctions régulières, revenons sur le cas où A est de type fini sur un corps algébriquement clos k. Alors, pour tout idéal maximal $m \subset A$ on a $A/m \simeq k$ de sorte que dans ce cas $f \in A$ définit une véritable fonction $f : \mathrm{Spm}(A) \subset \mathrm{Spec}(A) \to k$.

1.2.3 Exercice. Notons A_{red} l'anneau réduit de A, quotient de A par son nilradical (ensemble des éléments nilpotents). Soit $X_{\mathrm{red}} = \mathrm{Spec}(A_{\mathrm{red}})$. Montrez que la flèche induite $X_{\mathrm{red}} \to X$ est une bijection. Indication : le nilradical est l'intersection de tous les premiers de A ([Mat], chap. 1, th. 1.2).

1.3 L'espace topologique d'un schéma affine

1.3.1 Les fermés. Soit I un idéal de A. Nous identifierons systématiquement les premiers qui contiennent I et les premiers de A/I. Un *fermé* de $X = \mathrm{Spec}(A)$ est par définition une partie de la forme

$$V(I) = \{p \,;\, p \supset I\} = \mathrm{Spec}(A/I).$$

Il est immédiat de vérifier que les $V(I)$ sont les fermés d'une topologie, appelée la *topologie de Zariski* de X. En fait, c'est la topologie définie exactement pour que les fonctions régulières $f \in A$ aient pour ensembles d'annulation des fermés (comme toute honnête fonction continue). On a $V(I) = X$ ssi I est inclus dans le nilradical, et $V(I) = \varnothing$ ssi $I = A$. Le schéma affine X_{red} est un fermé de X, et la flèche canonique $X_{\mathrm{red}} \to X$ est un homéomorphisme.

1.3.2 Les ouverts. Les ouverts de X sont les parties $D(I) = X \smallsetminus V(I)$. Comme $V(I) = \cap_{f\in I} V(f)$, on a $D(I) = \cup_{f\in I} D(f)$. Les ouverts de la forme

$$D(f) = X \smallsetminus V(f) = \{p\ ; p \not\ni f\}$$

forment donc une base de la topologie de X. Ils sont particulièrement importants car ils sont eux-mêmes spectres d'anneaux. En effet, pour une partie multiplicative $S \subset A$, les premiers de A disjoints de S s'identifient aux premiers de $S^{-1}A$. Ainsi, si l'on note $A_f = A[1/f]$ le localisé de A par rapport à la partie multiplicative $S = \{1, f, f^2, \dots\}$, on a $D(f) = \mathrm{Spec}(A_f)$. Les $D(f)$ sont appelés ouverts *distingués*, ou *principaux* de X.

1.3.3 Spectre et morphismes. Si $\varphi : A \to B$ est un morphisme d'anneaux, l'application $\mathrm{Spec}(\varphi) : \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$ est continue, puisque la préimage du fermé $V(I)$ est le fermé $V(IB)$.

1.3.4 Propriétés de compacité. La topologie de Zariski sur un spectre $X = \mathrm{Spec}(A)$ est assez différente de la topologie d'espaces plus familiers, comme les espaces métriques. L'étude la compacité nous sera utile plus tard : l'espace X est-il séparé (au sens de l'axiome de Hausdorff : deux points quelconques possèdent des voisinages ouverts disjoints) et quasi-compact (de tout recouvrement ouvert on peut extraire un sous-recouvrement fini) ? Voici les réponses.

La séparation n'a presque jamais lieu. Par exemple, lorsque A est intègre, l'espace topologique $X = \mathrm{Spec}(A)$ est irréductible puisque (voir exercice 1.1.5) chaque ouvert non vide est dense : en fait, le point correspondant à l'idéal premier $p = (0)$ appartient à tous les ouverts non vides, et il est lui-même dense.

La quasi-compacité, en revanche, est toujours vérifiée. En effet, soit $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement de X par des ouverts. Quitte à le raffiner par un recouvrement par des ouverts principaux, on peut supposer que $U_i = D(f_i)$. Si l'idéal $I \subset A$ engendré par les f_i est distinct de A, d'après le lemme de Zorn il est inclus dans un idéal maximal m, et ceci est impossible, car le point $[m] \in X$ appartient à l'un des ouverts $D(f_i)$, ce qui signifie que $f_i \notin m$. On en déduit que $I = A$. En particulier $1 \in I$, donc il existe une écriture $1 = a_1 f_1 + \cdots + a_n f_n$ pour certains $a_i \in A$. On voit alors que $X = D(f_1) \cup \cdots \cup D(f_n)$ ce qui produit un sous-recouvrement fini, d'où la quasi-compacité.

1.3.5 Exercice. Soient $f, g \in A$. Montrez que les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) $D(f) \subset D(g)$,

(2) le morphisme de localisation $A \to A_f$ se factorise à travers un morphisme $A_g \to A_f$,

(3) l'image de g dans A_f est inversible,

(4) il existe $a \in A$ et $m, n \geqslant 1$ entiers tels que $f^m(ag - f^n) = 0$.