Introduction à la Géométrie Algébrique. Le langage des schémas

Proposition (Adjonction (f^{-1}, f_*)). *Si $f : X \to Y$ est continue, on a une bijection*

$$\mathrm{Hom}_{P(X)}(f^{-1}\mathscr{G}, \mathscr{F}) = \mathrm{Hom}_{P(Y)}(\mathscr{G}, f_*\mathscr{F})$$

fonctorielle en les préfaisceaux $\mathscr{F} \in P(X)$ et $\mathscr{G} \in P(Y)$.

Preuve : Si $\varphi : \mathscr{F}_1 \to \mathscr{F}_2$ est un morphisme de faisceaux sur X, et $U \subset X$ est un ouvert, on note parfois φ_U et parfois $\varphi(U)$ pour désigner l'application $\mathscr{F}_1(U) \to \mathscr{F}_2(U)$.

(1) On construit un morphisme de faisceaux $\eta = \eta_{\mathscr{G}} : \mathscr{G} \to f_*f^{-1}\mathscr{G}$ fonctoriel en $\mathscr{G}$. Pour tout ouvert $V \subset Y$, on a par définition :

$$(f_*f^{-1}\mathscr{G})(V) = (f^{-1}\mathscr{G})(f^{-1}(V)) = \varinjlim_{W \supset f(f^{-1}V)} \mathscr{G}(W).$$

Comme V contient $f(f^{-1}V)$, il est l'un des ouverts W en indice dans la limite inductive. On dipose donc d'une application

$$\eta_V : \mathscr{G}(V) \longrightarrow (f_*f^{-1}\mathscr{G})(V)$$

qui à $s \in \mathscr{G}(V)$ associe sa classe d'équivalence dans la limite inductive. Il est clair que si $V \subset V'$ est une inclusion d'ouverts de Y, les applications η_V et $\eta_{V'}$ commutent aux restrictions à la source et au but, c'est-à-dire explicitement que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{G}(V) \arrow[r, "\eta_{V'}"] \arrow[d, "\mathrm{res}_{V',V}"'] & (f_*f^{-1}\mathscr{G})(V') \arrow[d, "f_*f^{-1}\,\mathrm{res}_{V',V}"] \\
\mathscr{G}(V) \arrow[r, "\eta_V"] & (f_*f^{-1}\mathscr{G})(V).
\end{tikzcd}$$

Ainsi η est un morphisme de faisceaux. Enfin montrons que $\eta = \eta_{\mathscr{G}}$ est fonctoriel en $\mathscr{G}$. Il s'agit de montrer que pour tout morphisme $\psi : \mathscr{G}_1 \to \mathscr{G}_2$ de préfaisceaux sur Y, le carré suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{G}_1 \arrow[r, "\eta_{\mathscr{G}_1}"] \arrow[d, "\psi"'] & f_*f^{-1}\mathscr{G}_1 \arrow[d, "f_*f^{-1}\psi"] \\
\mathscr{G}_2 \arrow[r, "\eta_{\mathscr{G}_2}"] & f_*f^{-1}\mathscr{G}_2.
\end{tikzcd}$$

Pour montrer cela on doit voir que pour tout ouvert $V \subset Y$, le carré suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{G}_1(V) \arrow[r, "\eta_{\mathscr{G}_1}(V)"] \arrow[d, "\psi(V)"'] & \varinjlim_{W \supset f(f^{-1}V)} \mathscr{G}_1(W) \arrow[d, "(f_*f^{-1}\psi)(V)"] \\
\mathscr{G}_2(V) \arrow[r, "\eta_{\mathscr{G}_2}(V)"] & \varinjlim_{W \supset f(f^{-1}V)} \mathscr{G}_2(W).
\end{tikzcd}$$

Or par le chemin du haut, une section $s \in \mathscr{G}_1(V)$ est envoyée sur la classe d'équivalence de $[(V,s)]$ dans la limite inductive relative à $\mathscr{G}_1$ puis sur la classe d'équivalence de $[(V,\psi(s))]$ dans la limite inductive relative à $\mathscr{G}_2$. Par le chemin du bas, la section s est envoyée sur $\psi(s) \in \mathscr{G}_2(V)$ puis sur la classe d'équivalence de $[(V,\psi(s))]$ dans la limite inductive relative à $\mathscr{G}_2$. On a donc bien commutation du diagramme.

(2) On construit maintenant un morphisme de faisceaux $\epsilon = \epsilon_{\mathscr{F}} : f^{-1}f_*\mathscr{F} \to \mathscr{F}$ fonctoriel en $\mathscr{F}$. Pour tout ouvert $U \subset X$, on a par définition :

$$(f^{-1}f_*\mathscr{F})(U) = \varinjlim_{V \supset f(U)} \mathscr{F}(f^{-1}(V)).$$

Or $V \supset f(U)$ implique $f^{-1}(V) \supset f^{-1}(f(U)) \supset U$. On peut donc considérer les morphismes de restriction $\mathscr{F}(f^{-1}(V)) \to \mathscr{F}(U)$. Ils sont compatibles entre eux pour les ouverts $V \supset f(U)$ variables, donc ils passent à la limite pour induire une application

$$\epsilon_U : (f^{-1}f_*\mathscr{F})(U) \longrightarrow \mathscr{F}(U).$$

Il est clair que si $U \subset U'$ est une inclusion d'ouverts de X, les applications ϵ_U et $\epsilon_{U'}$ commutent aux restrictions à la source et au but, donc ϵ est un morphisme de faisceaux (ici je donne moins de détails que pour η...). Enfin montrons que $\epsilon = \epsilon_{\mathscr{F}}$ est fonctoriel en $\mathscr{F}$. Il s'agit de montrer que pour tout morphisme $\varphi : \mathscr{F}_1 \to \mathscr{F}_2$ de préfaisceaux sur Y, le carré suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
f^{-1}f_*\mathscr{F}_1 \arrow[r, "\epsilon_{\mathscr{F}_1}"] \arrow[d, "f^{-1}f_*\varphi"'] & \mathscr{F}_1 \arrow[d, "\varphi"] \\
f^{-1}f_*\mathscr{F}_2 \arrow[r, "\epsilon_{\mathscr{F}_1}"] & \mathscr{F}_2.
\end{tikzcd}$$

Ceci nécessite de vérifier que pour tout ouvert $U \subset X$, on a un carré commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\varinjlim_{V \supset f(U)} \mathscr{F}_1(f^{-1}(V)) \arrow[r, "\epsilon_{\mathscr{F}_1}(U)"] \arrow[d, "(f^{-1}f_*\varphi)(U)"'] & \mathscr{F}_1(U) \arrow[d, "\varphi"] \\
\varinjlim_{V \supset f(U)} \mathscr{F}_2(f^{-1}(V)) \arrow[r, "\epsilon_{\mathscr{F}_1}(U)"] & \mathscr{F}_2(U).
\end{tikzcd}$$

On vérifie que c'est bien le cas (je donne moins de détails que pour η...).

(3) On construit maintenant des applications fonctorielles $\alpha = \alpha_{\mathscr{F},\mathscr{G}}$ et $\beta = \beta_{\mathscr{F},\mathscr{G}}$:

$$\mathrm{Hom}_{P(X)}(f^{-1}\mathscr{G}, \mathscr{F}) \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightleftarrows}} \mathrm{Hom}_{P(Y)}(\mathscr{G}, f_*\mathscr{F}).$$

Pour tout morphisme $u : f^{-1}\mathscr{G} \to \mathscr{F}$ on pose $\alpha(u) = f_*u \circ \eta_{\mathscr{G}}$:

$$\alpha(u) : \mathscr{G} \xrightarrow{\eta_{\mathscr{G}}} f_*f^{-1}\mathscr{G} \xrightarrow{f_*u} f_*\mathscr{F}.$$

Pour tout morphisme $v : \mathscr{G} \to f_*\mathscr{F}$ on pose $\beta(v) = \epsilon_{\mathscr{F}} \circ f^{-1}v$:

$$\beta(v) : f^{-1}\mathscr{G} \xrightarrow{f^{-1}v} f^{-1}f_*\mathscr{F} \xrightarrow{\epsilon_{\mathscr{F}}} \mathscr{F}.$$

Dire que $\alpha = \alpha_{\mathscr{F},\mathscr{G}}$ est fonctorielle en $\mathscr{F}$ signifie que pour tout morphisme $\varphi : \mathscr{F}_1 \to \mathscr{F}_2$ de faisceaux sur X, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{P(X)}(f^{-1}\mathscr{G}, \mathscr{F}_1) \arrow[r, "u \mapsto \varphi\circ u"] \arrow[d, "\alpha_{\mathscr{F}_1,\mathscr{G}}"'] & \mathrm{Hom}_{P(X)}(f^{-1}\mathscr{G}, \mathscr{F}_2) \arrow[d, "\alpha_{\mathscr{F}_2,\mathscr{G}}"] \\
\mathrm{Hom}_{P(Y)}(\mathscr{G}, f_*\mathscr{F}_1) \arrow[r, "v \mapsto (f_*\varphi)\circ v"] & \mathrm{Hom}_{P(Y)}(\mathscr{G}, f_*\mathscr{F}_2)
\end{tikzcd}$$

Or pour $u : f^{-1}\mathscr{G} \to \mathscr{F}_1$, ses images dans le diagramme carré ci-dessus sont les suivantes :

$$\begin{tikzcd}
u \arrow[rr, mapsto] \arrow[d, mapsto] & & \varphi \circ u \arrow[d, mapsto] \\
f_*u \circ \eta_{\mathscr{G}} \arrow[r, mapsto] & f_*\varphi \circ f_*u \circ \eta_{\mathscr{G}} \overset{?}{=} & f_*(\varphi \circ u) \circ \eta_{\mathscr{G}}.
\end{tikzcd}$$

On voit donc que la commutativité découle simplement du fait que $f_*(\varphi \circ u) = f_*\varphi \circ f_*u$. Ceci démontre que α est fonctoriel en $\mathscr{F}$. Il faut montrer aussi que α est fonctoriel en $\mathscr{G}$, et que β est fonctoriel en $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$. Les vérifications sont du même genre que ci-dessus, et on les laisse au lecteur.

Pour finir, il reste à montrer que α et β sont des bijections inverses l'une de l'autre, i.e. que $\beta \circ \alpha$ est l'identité de $\mathrm{Hom}_{P(X)}(f^{-1}\mathscr{G}, \mathscr{F})$, et que $\alpha \circ \beta$ est l'identité de $\mathrm{Hom}_{P(Y)}(\mathscr{G}, f_*\mathscr{F})$.

(4) Montrons que $\beta \circ \alpha$ est l'identité. Soit $u : f^{-1}\mathscr{G} \to \mathscr{F}$ un morphisme et $v = \alpha(u) = f_*u \circ \eta_{\mathscr{G}}$. Le morphisme $\beta(\alpha(u)) = \epsilon_{\mathscr{F}} \circ f^{-1}v = \epsilon_{\mathscr{F}} \circ (f^{-1}f_*u) \circ (f^{-1}\eta_{\mathscr{G}})$ est le suivant :

$$f^{-1}\mathscr{G} \xrightarrow{f^{-1}\eta_{\mathscr{G}}} f^{-1}f_*f^{-1}\mathscr{G} \xrightarrow{f^{-1}f_*u} f^{-1}f_*\mathscr{F} \xrightarrow{\epsilon} \mathscr{F}.$$

Soit $U \subset X$ un ouvert. Nous aurons besoin de comprendre l'ensemble :

$$(f^{-1}f_*f^{-1}\mathscr{G})(U) = \varinjlim_{V \supset f(U)} \varinjlim_{W \supset f(f^{-1}(V))} \mathscr{G}(W).$$

Utilisant le fait que $f(f^{-1}(V)) \subset V$, on a l'équivalence (il y a un petit calcul à faire) :

$$V \supset f(U) \iff f(f^{-1}(V)) \supset f(U).$$

Ceci montre que

$$(f^{-1}f_*f^{-1}\mathscr{G})(U) = \varinjlim_{W \supset f(U)} \mathscr{G}(W).$$

Nous utiliserons ce fait ci-dessous. Montrons maintenant que $\beta(\alpha(u)) = u$. Soit x un élément de $(f^{-1}\mathscr{G})(U)$, c'est la classe d'équivalence $x = \langle V, s\rangle$ d'une paire (V, s) avec $s \in \mathscr{G}(V)$ et V ouvert contenant $f(U)$, pour la relation d'équivalence définie par le fait que deux sections soient égales sur un sous-ouvert contenant $f(U)$. L'image de s par $\eta_{\mathscr{G}}(V)$ est la classe $[V, s]$ pour la relation d'équivalence définie par le fait que deux sections soient égales sur un sous-ouvert contenant $f(f^{-1}(V))$, et l'image de $\langle(V,s)\rangle$ par $(f^{-1}\eta_{\mathscr{G}})(U)$ est la classe $\langle\ [V,s]\ \rangle$ qui à cause des remarques faites au point (4) peut simplement s'écrire $\langle V,s\rangle$. Ensuite, par définition de $(f_*u)(V)$, son image par $(f^{-1}f_*u)(U)$ est égale à la classe $\langle V,u(\langle V,s\rangle)\rangle$ où $u(\langle V,s\rangle)\in\mathscr{F}(f^{-1}(V))$. Enfin, l'image par $\epsilon(U)$ est la section $u(\langle V,s\rangle)_{|U}$. Comme u est un morphisme de faisceaux, il commute aux restrictions donc on a $u(\langle V,s\rangle)_{|U}=u(\langle V,s\rangle_{|U})$. Enfin comme $x=\langle V,s\rangle$ est, depuis le début du calcul, une section de $f^{-1}\mathscr{G}$ sur l'ouvert U, on a $\langle V,s\rangle_{|U}=\langle V,s\rangle$. En résumé, l'application $(\beta\circ\alpha)(U)$ envoie $\langle(V,s)\rangle=x$ sur $u(\langle V,s\rangle)=u(x)$, c'est donc l'application $u(U)$.

(5) Montrons que $\alpha\circ\beta$ est l'identité. Soit $v:\mathscr{G}\to f_*\mathscr{F}$ un morphisme et $u=\beta(v)=\epsilon_{\mathscr{F}}\circ f^{-1}v$. Le morphisme $\alpha(\beta(v))=(f_*\epsilon_{\mathscr{F}})\circ(f^*f^{-1}v)\circ\eta_{\mathscr{G}}$ est le suivant :

$$\mathscr{G}\xrightarrow{\eta_{\mathscr{G}}}f_*f^{-1}\mathscr{G}\xrightarrow{f_*f^{-1}v}f_*f^{-1}f_*\mathscr{F}\xrightarrow{f_*\epsilon_{\mathscr{F}}}f_*\mathscr{F}.$$

Soit $V\subset Y$ un ouvert. Nous aurons besoin de comprendre l'ensemble :

$$(f_*f^{-1}f_*\mathscr{F})(V)=\varinjlim_{W\supset f(f^{-1}(V))}\mathscr{F}(f^{-1}W).$$

C'est un petit exercice de montrer que $W\supset f(f^{-1}(V))$ si et seulement si $f^{-1}(W)\supset f^{-1}(V)$. Comme de plus $f^{-1}(V)$ est ouvert, on trouve finalement :

$$(f_*f^{-1}f_*\mathscr{F})(V)=\varinjlim_{f^{-1}(W)\supset f^{-1}(V)}\mathscr{F}(f^{-1}W)=\mathscr{F}(f^{-1}(V)).$$

En d'autres termes, on a trouvé un isomorphisme $f_*f^{-1}f_*\mathscr{F}\simeq f_*\mathscr{F}$ et en ces termes, le morphisme $f_*\epsilon_{\mathscr{F}}:f_*f^{-1}f_*\mathscr{F}\to f_*\mathscr{F}$ est l'identité. Maintenant montrons que $\alpha(\beta(v))=v$ sur l'ouvert V. Soit $s\in\mathscr{G}(V)$. Son image par $\eta_{\mathscr{G}}(V)$ est la classe $\langle V,s\rangle$ pour la relation d'équivalence définie par le fait que deux sections soient égales sur un sous-ouvert contenant $f(f^{-1}(V))$. Ensuite l'image par $(f_*f^{-1}v)(V)$ est un élément dans $(f_*f^{-1}f_*\mathscr{F})(V)$ qui via l'identification $(f_*f^{-1}f_*\mathscr{F})(V)=\mathscr{F}(f^{-1}(V))$ ci-dessus est simplement la section $v(s)\in\mathscr{F}(f^{-1}(V))$. Comme $f_*\epsilon_{\mathscr{F}}$ est l'identité, on trouve bien que $(\alpha\circ\beta)(V)=v(V)$.

(6) Un petit mot de conclusion. On a vu que :
- la construction de η et ϵ n'est pas trop difficile mais nécessite tout de même quelques vérifications,
- ensuite, la construction de α et β et du fait qu'elles sont (bi-)fonctorielles est facile,
- enfin, la vérification des égalités $\beta\circ\alpha=\mathrm{id}$ et $\alpha\circ\beta=\mathrm{id}$ est plus délicate, notamment à cause du simple fait qu'il faut écrire ce que sont les faisceaux $f^{-1}f_*f^{-1}\mathscr{G}$ et $f_*f^{-1}f_*\mathscr{F}$ (autrement dit, c'est à ce moment que les constructions empilées doivent être déroulées).

$\square$