2.3.16 Corollaire. *Soient $f : X \to S$ un morphisme plat et de présentation finie de schémas, et $g \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ une fonction globale sur X. Si pour tout $x \in X$ d'image $s = f(x)$, le germe $\overline{g}_x \in \mathcal{O}_{X_s,x}$ est non diviseur de 0 dans $\mathcal{O}_{X_s,x}$ alors le sous-schéma fermé $V(g) \subset X$ est plat sur S.*

Noter que le germe $\overline{g}_x$ est l'image du germe $g_x \in \mathcal{O}_{X,x}$ dans $\mathcal{O}_{X_s,x} = \mathcal{O}_{X,x}/m_s\mathcal{O}_{X,x}$, voir remarque 1.4.16.

Preuve : La platitude de $V(g)$ sur S est une propriété locale ; après localisation, c'est juste l'énoncé 2.3.15. □

2.3.17 Remarque. On peut se demander s'il suffit de supposer que pour tout $x \in X$, la restriction $g|_{X_s} \in \Gamma(X_s, \mathcal{O}_{X_s})$ est non diviseur de 0 dans $\Gamma(X_s, \mathcal{O}_{X_s})$. Ceci n'est pas vrai ; la raison est que la platitude est une notion locale, et la fonction globale $g|_{X_s}$ ne peut pas voir les propriétés des germes $\overline{g}_x$ aux points $x \in X_s$. Nous allons donner un contre-exemple. La non-platitude de $V(g)$ sera causée par une fonction globale g qui est non-diviseur de 0 mais dont la restriction à certains ouverts est diviseur de 0. Voici comment on peut fabriquer une telle fonction. Soit $T = \operatorname{Spec}(B)$ un schéma affine et $T_0 \subset T$ un sous-schéma fermé. Soit $P = \mathbb{P}^1_T$ la droite projective sur T, $P_0 = P \times_T T_0$ la préimage de T_0, et $i : P_0 \to P$ l'immersion fermée. Considérons le $\mathcal{O}_P$-module $\mathcal{F} = i_*\mathcal{O}_{P_0}(-1)$ et la $\mathcal{O}_P$-algèbre $\mathcal{A} = \mathcal{O}_P \oplus \mathcal{F}$ où $\mathcal{F}$ est vu comme un idéal de carré nul ; en d'autres termes $\mathcal{A}$ est le quotient de la $\mathcal{O}_P$-algèbre symétrique de $\mathcal{F}$ par l'idéal engendré par $\operatorname{Sym}^2(\mathcal{F})$. Soit le P-schéma affine $X = \operatorname{Spec}_{\mathcal{O}_P}(\mathcal{A}) = \operatorname{Spec}_{\mathcal{O}_P}(\mathcal{O}_P \oplus \mathcal{F})$. Le morphisme $X \to P$ est un homéomorphisme qui possède une section définie par le morphisme $\mathcal{O}_P \oplus \mathcal{F} \to \mathcal{O}_P$ qui envoie $\mathcal{F}$ sur 0. Utilisant le fait que $\mathcal{O}(-1)$ n'a pas de sections globales sur $\mathbb{P}^1$, on trouve :

$$\Gamma(X, \mathcal{O}_X) = \Gamma(P, \mathcal{O}_P) \oplus \Gamma(P, \mathcal{F}) = \Gamma(P, \mathcal{O}_P) \oplus \Gamma(P_0, \mathcal{O}_{P_0}(-1)) = \Gamma(P, \mathcal{O}_P) = B.$$

Si on choisit B intègre, tout élément $g \in B$, $g \neq 0$ est donc une fonction globale non diviseur de 0 sur X.

Pour notre contre-exemple, nous voulons un X plat sur une base tel que $V(g)$ n'est pas plat sur la base. Ici P_0 n'est pas plat sur T car il provient de l'immersion fermée $T_0 \to T$, et les immersions fermées ne sont en général pas plates (sauf cas dégénérés ; voir le théorème 2.3.22). Ceci fait que $\mathcal{F}$ n'est pas T-plat et donc X non plus. Pour résoudre ce problème, on peut choisir un $T \to S = \operatorname{Spec}(A)$ tel que T_0 est plat sur S ; par exemple on peut prendre pour T_0 une section de $T \to S$. Alors le composé $X \to T \to S$ sera plat et donnera le contre-exemple espéré.

Spécialisons les constructions précédentes pour obtenir un exemple explicite. On prend k un corps, $S = \operatorname{Spec}(k[u])$ la droite affine, $T = \operatorname{Spec}(k[u, v])$ le plan affine, et $T_0 \subset T$ le sous-schéma d'équation $v = 0$. Alors $T_0 \to S$ est un isomorphisme et en particulier est plat, P_0 est isomorphe à $\mathbb{P}^1_S$ et $\mathcal{F}$ à son $\mathcal{O}(-1)$, qui est S-plat. L'algèbre $\mathcal{A} = \mathcal{O}_P \oplus \mathcal{F}$ est S-plate donc $X \to S$ est plat. On a $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) = B = k[u, v]$. Considérons la fonction globale $g = u + v \in B = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$.

Vérifions que pour tout $x \in X$, la restriction $g|_{X_s}$ est non diviseur de 0 dans $\Gamma(X_s, \mathcal{O}_{X_s})$. Pour tout s, le calcul que l'on a fait pour un B général est valable pour $B \otimes_A k(s) = k(s)[v]$

et on obtient $\Gamma(X_s, \mathcal{O}_{X_s}) = k(s)[v]$. L'image $g|_{X_s}$ dans cet anneau est le polynôme $u_s + v$ où u_s est l'image de u dans $k(s)$. C'est un polynôme de degré 1, non nul dans un anneau intègre, donc $g|_{X_s}$ est non diviseur de 0.

Vérifions enfin que $V(g) \subset X$ n'est pas plat sur S ; il suffit de trouver un ouvert affine dont l'anneau de fonctions n'est pas A-plat. Notons que P et X ont mêmes ouverts puisque l'immersion fermée $P \to X$ est d'idéal nilpotent. Soit $U \subset X$ un ouvert affine qui vu dans P est le complémentaire d'une section « à l'infini », par exemple $U = \mathrm{Spec}(k[u,v,\alpha]) \simeq \mathbb{A}^1_T$ de coordonnée α. Sur l'ouvert $U_0 = U \cap P_0$, le faisceau $\mathcal{O}_{P_0}(-1)$ est trivial : on le voit soit directement, soit en observant que $U_0 = \mathrm{Spec}(k[u,\alpha])$ est un plan affine dont le groupe de Picard est trivial. On voit finalement que

$$U \simeq \mathrm{Spec}\left(\frac{k[u,v,\alpha,\epsilon]}{\epsilon^2, \epsilon v}\right) \quad \text{et} \quad V(g) \cap U \simeq \mathrm{Spec}\left(\frac{k[u,v,\alpha,\epsilon]}{\epsilon^2, \epsilon v, u+v}\right).$$

Notons C l'anneau de fonctions de $V(g) \cap U$. La fonction $\epsilon \in C$ est non nulle, mais $u\epsilon = -v\epsilon = 0$. Ainsi ϵ est un élément de u-torsion, ce qui implique que C n'est pas plat sur $k[u]$: s'il était plat, le morphisme injectif de multiplication $u : k[u] \to k[u]$ donnerait un morphisme injectif $u : C \to C$, or $0 \neq \epsilon \in \ker(u)$. Donc $V(g)$ n'est pas plat sur S.