2.1.3 Lemme. *Un morphisme entre schémas affines* $f : \mathrm{Spec}(A) \to \mathrm{Spec}(R)$ *est localement de présentation finie si et seulement si* A *est une* R*-algèbre de présentation finie.*

Dans la preuve, nous utiliserons librement le fait suivant : si B est une A-algèbre de présentation finie, alors pour toute A-algèbre de type fini B' et tout morphisme surjectif $u : B' \to B$, le noyau $\ker(u)$ est un idéal de type fini. Ceci est classique mais pas tout à fait évident ; on le déduit immédiatement du cas d'une A-algèbre de polynômes $B' = A[X_1, \dots, X_n]$ qui est [EGA] IV, proposition 1.4.4.

Preuve : Notons $X = \mathrm{Spec}(A)$. Seule la condition nécessaire mérite une démonstration.
(1) Supposons d'abord que tout point $x \in X$ possède un voisinage ouvert distingué $U = D(a)$ tel que $A[1/a]$ est R-algèbre de présentation finie ; ce cas recouvre celui où f est une immersion ouverte. Comme X est quasi-compact, il est recouvert par un nombre fini p de tels ouverts $U_i = D(a_i)$. Fixons une partition de l'unité $y_1a_1 + \dots + y_pa_p = 1$ pour les a_i (voir l'exercice 2.1.4 pour un rappel). Pour chaque i, comme $A[1/a_i]$ est R-algèbre de type fini, on peut trouver des éléments $t_{i,1}, \dots, t_{i,q} \in A$ qui avec $1/a_i$ engendrent $A[1/a_i]$. Quitte à augmenter le nombre de générateurs, on peut supposer que q ne dépend pas de i. Considérons l'algèbre C, quotient de l'anneau de polynômes $R[T_{1,1}, \dots, T_{p,q}; A_1, \dots, A_p; Y_1, \dots, Y_p]$ par la relation $Y_1A_1 + \dots + Y_pA_p = 1$. Notons que pour tout entier $\lambda \geqslant 1$, en élevant cette relation à la puissance $p(\lambda - 1) + 1$ on obtient une partition de l'unité $Y_{1,\lambda}(A_1)^\lambda + \dots + Y_{p,\lambda}(A_p)^\lambda = 1$ pour les $(A_i)^\lambda$ avec $Y_{i,\lambda} \in C$. Soit $\varphi : C \to A$ le morphisme de R-algèbres qui envoie chaque indéterminée (une lettre majuscule) sur l'élément de A correspondant (une lettre minuscule). Pour chaque i, l'extension naturelle $\varphi_i : C[1/A_i] \to A[1/a_i]$ est un morphisme surjectif. Comme $A[1/a_i]$ est R-algèbre de présentation finie, le noyau de φ_i peut être engendré par un nombre fini r (indépendant de i) d'éléments $P_{i,1}, \dots, P_{i,r}$. Quitte à remplacer $P_{i,j}$ par $(A_i)^n P_{i,j}$ avec n assez grand pour que $(A_i)^n P_{i,j}$ soit sans pôle en A_i et appartienne à $\ker(\varphi)$, on peut supposer que $P_{i,j} \in \ker(\varphi)$. Pour conclure, il suffit de montrer que $\ker(\varphi) = (P_{1,1}, \dots, P_{p,r})$. Or si $Q \in \ker(\varphi)$, on peut trouver un λ indépendant de i et des expressions $(A_i)^\lambda Q = Z_{i,1}P_{i,1} + \dots + Z_{i,r}P_{i,r}$ avec $Z_{i,r} \in C$. Ainsi $Q = \sum_i Y_{i,\lambda}(A_i)^\lambda Q = \sum_{i,j} Y_{i,\lambda}Z_{i,j}P_{i,j}$.
(2) Montrons maintenant que tout point $x \in X$ possède en effet un voisinage ouvert distingué $U = D(a)$ tel que $A[1/a]$ est R-algèbre de présentation finie. Par hypothèse x est dans un ouvert affine $U_1 = \mathrm{Spec}(A_1)$ et son image $f(x)$ est dans un ouvert affine $V_1 = \mathrm{Spec}(R_1)$ tels que $f(U_1) \subset V_1$ et $R_1 \to A_1$ est de présentation finie. Soit $U = D(a)$ un voisinage ouvert distingué de x inclus dans U_1. Comme le point (1) s'applique aux immersions ouvertes, les morphismes $R \to R_1$ et $A_1 \to A[1/a]$ sont de présentation finie, donc la composée $R \to R_1 \to A_1 \to A[1/a]$ est de présentation finie. □

2.1.4 Exercice. Soient $a_1, \dots, a_n$ des éléments d'un anneau A. On appelle *partition de l'unité* pour les a_i une écriture $y_1a_1 + \dots + y_na_n = 1$ avec $y_1, \dots, y_n \in A$. Soit $\lambda \geqslant 1$ un entier. Montrez que les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) les ouverts $D(a_1), \dots, D(a_n)$ recouvrent $\mathrm{Spec}(A)$,

(2) il existe une partition de l'unité pour les a_i,

(3) il existe une partition de l'unité pour les $(a_i)^\lambda$.