# Examen du cours de Géométrie Algébrique 2

*Tous les documents sont autorisés.*

Tous les anneaux sont commutatifs et unitaires.

**Exercice 1.** Soit $n \geqslant 1$ un entier. Pour tout anneau ou faisceau d'anneaux $A$, on note $A[\delta_n]$ le quotient de l'anneau de polynômes $A[X]$ par l'idéal $(X^{n+1})$, où $\delta_n$ est la classe de $X$. Pour tout schéma $S$ on note $S[\delta_n] = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_S[\delta_n])$.

On fixe un morphisme de $\mathbb{Q}$-schémas $X \to S$. Le but de cet exercice est d'étudier la représentabilité et la lissité d'une généralisation du foncteur tangent, le *foncteur des jets d'ordre $n$ de $X/S$*:

$$\mathscr{J}_n = \mathrm{Hom}_S(S[\delta_n], X),$$

défini par $\mathscr{J}_n(T) = \mathrm{Hom}_T(T[\delta_n], X_T)$ pour tout $S$-schéma $T$, où $X_T = X \times_S T$.

(1) Justifiez que $\mathrm{Hom}_T(T[\delta_n], X_T) = \mathrm{Hom}_S(T[\delta_n], X)$.

(2) Soit $A[\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n]$ le quotient de l'anneau de polynômes $A[X_1, \dots, X_n]$ par l'idéal $(X_1^2, \dots, X_n^2)$, où $\varepsilon_i$ est la classe de $X_i$, et $S[\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n] = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_S[\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n])$. Montrez par récurrence sur $n \geqslant 1$ que le $S$-foncteur $\mathscr{T}_n = \mathrm{Hom}_S(S[\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n], X)$ est représentable par un $S$-schéma.

(3) Pour toute partie $J \subset \{1, \dots, n\}$, soit $\varepsilon_J = \prod_{j \in J} \varepsilon_j$, avec $\varepsilon_\varnothing = 1$. Montrez que $\delta_n \mapsto \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n$ définit un morphisme injectif de $\mathbb{Q}$-algèbres $f : \mathbb{Q}[\delta_n] \to \mathbb{Q}[\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n]$ qui induit un isomorphisme de $\mathbb{Q}[\delta_n]$ sur l'ensemble des $r = \sum r_J \varepsilon_J \in \mathbb{Q}[\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n]$ tels que $\mathrm{card}\, J = \mathrm{card}\, J' \Rightarrow r_J = r_{J'}$.

(4) Soient $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_S$-module quasi-cohérent, $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{O}_S$ un morphisme de $\mathcal{O}_S$-modules, $\mathrm{im}(\varphi)$ son image, $T \to S$ un morphisme, $\varphi_T : \mathcal{F}_T \to \mathcal{O}_T$ le morphisme déduit par changement de base. Montrez qu'il existe un morphisme naturel surjectif $\mathrm{im}(\varphi)_T \to \mathrm{im}(\varphi_T)$. Montrez que $\varphi_T = 0$ si et seulement si $T \to S$ se factorise par le sous-schéma fermé de $S$ d'idéal $\mathrm{im}(\varphi)$.

(5) Montrez que le morphisme $\mathscr{J}_n \to \mathscr{T}_n$ déduit du morphisme $S[\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n] \to S[\delta_n]$ de la question (3) induit un isomorphisme de $\mathscr{J}_n$ sur un sous-schéma fermé de $\mathscr{T}_n$.

(6) (a) Montrez que si $X \to S$ est lisse, alors $\mathscr{J}_n \to S$ est lisse.
(b) Montrez que si $X \to S$ est non ramifié, alors $\mathscr{J}_n \to X$ est un isomorphisme.

**Exercice 2.** (1) Soit $r \geqslant 0$ un entier. Un morphisme de schémas $f : X \to S$ dont toutes les fibres $X_s = f^{-1}(s)$ sont de dimension $r$ et tel que $\Omega^1_{X/S}$ est localement libre de rang $r$ est-il lisse ?

(2) Soient $S$ le spectre d'un anneau $A$, $\lambda$ un élément de $A$, et $X$ le sous-schéma fermé de $\mathbb{A}^2_S = \mathrm{Spec}(A[x, y])$ d'équation $y^2 = x(x-1)(x-\lambda)$.
(a) Le morphisme $X \to S$ est-il plat ?
(b) Quels sont les points où $X \to S$ n'est pas lisse ?

**Exercice 3.** (a) Montrez qu'un morphisme lisse de schémas $X \to S$ admet une section localement pour la topologie étale sur $S$, c'est-à-dire qu'il existe un morphisme étale $S' \to S$ tel que le morphisme $X \times_S S' \to S'$ admet une section.

(b) Donnez un exemple qui montre que ce n'est pas toujours vrai pour la topologie de Zariski.