

Géométrie Algébrique 2

Matthieu Romagny

2011-2012

Table des matières

1	Préliminaires	3
1.1	Topologie	3
1.2	Faisceaux quasi-cohérents	4
1.3	Anneaux noethériens et dimension	6
1.4	Schémas vus comme foncteurs	13
2	Morphismes fidèlement plats de présentation finie	20
2.1	Morphismes localement de présentation finie	20
2.2	Morphismes de présentation finie	25
2.3	Morphismes plats	27
2.4	Un aperçu sur la théorie de la descente plate	38
3	Morphismes lisses, non ramifiés, étales	43
3.1	Dérivations et différentielles en algèbre commutative	43
3.2	Dérivations et différentielles sur les schémas	48
3.3	Morphismes lisses, non ramifiés, étales : définitions	52
3.4	Morphismes lisses, non ramifiés, étales : propriétés	54
3.5	La propriété de relèvement infinitésimal	60
4	Diviseurs et faisceaux inversibles	64
4.1	Diviseurs de Cartier	64
4.2	Faisceaux inversibles et groupe de Picard	67
4.3	Foncteur de points de l'espace projectif	69
4.4	Diviseurs de Weil	72
5	Introduction aux schémas en groupes	75
5.1	Schémas en groupes	75
5.2	Schémas en modules et foncteur $\mathbb{V}(\mathcal{F})$	78
5.3	Fibrés vectoriels	80
5.4	Fibrés tangents	82

Jusqu'au milieu du vingtième siècle, les méthodes de la géométrie algébrique classique ont permis d'étudier avec un certain succès les variétés algébriques sur un corps algébriquement clos. Dans le point de vue moderne, le corps de base doit être vu comme un objet géométrique à part entière, via son spectre S , et l'étude des variétés est vue comme l'étude des fibrations $X \rightarrow S$. En relâchant toutes les hypothèses restrictives sur les anneaux de fonctions des variétés X et des bases S , la théorie des schémas a permis :

- 1) de faire du calcul différentiel en acceptant des anneaux avec éléments nilpotents,
- 2) de faire de l'arithmétique en acceptant des corps non algébriquement clos ou d'autres anneaux intéressants en théorie des nombres,
- 3) de s'affranchir des contraintes posées par la topologie de Zariski, trop grossière pour de nombreuses questions, en construisant de nouvelles « topologies » comme la topologie étale.

Ainsi, l'étude des fibrés principaux, la définition d'invariants de topologie algébrique comme les nombres de Betti (dimension des groupes de cohomologie singulière), la construction du groupe fondamental, la construction de théories cohomologiques en caractéristique positive jouissant d'aussi bonnes propriétés que les théories cohomologiques disponibles en caractéristique nulle, la preuve d'un analogue du théorème d'inversion locale ou de celui des fonctions implicites, sont autant de questions inspirées de la géométrie, de la théorie des nombres, de la topologie et de l'analyse, qui restaient des défis à relever avant l'introduction des schémas.

Une des clés de ce succès est d'introduire des outils pour étudier systématiquement les propriétés *relatives* de X sur S . Dans ce cours, nous essaierons d'expliquer ce point de vue. Nous insisterons particulièrement sur les notions suivantes : foncteurs de points ; morphismes plats ; morphismes lisses et étales.

Les faisceaux quasi-cohérents et les foncteurs définis par leurs ensembles de sections nous donneront des exemples, parmi d'autres, pour illustrer ces notions. Voici un énoncé que nous démontrerons. Soit S un schéma et \mathcal{F} un \mathcal{O}_S -module de présentation finie. Pour tout S -schéma T , on note \mathcal{F}_T le \mathcal{O}_T -module préimage de \mathcal{F} sur T . Considérons les deux foncteurs $F_1, F_2 : (S\text{-Sch})^\circ \rightarrow \text{Ens}$ définis pour tout S -schéma T par

$$F_1(T) = \Gamma(T, \mathcal{F}_T) \quad \text{et} \quad F_2(T) = \Gamma(T, (\mathcal{F}_T)^\vee).$$

Nous prouverons que :

- F_1 est représentable par un schéma si et seulement si \mathcal{F} est localement libre de rang fini,
- F_2 est représentable par un schéma $\mathbb{V}(\mathcal{F})$, et les conditions suivantes sont équivalentes :

$\mathbb{V}(\mathcal{F})$ est lisse ; $\mathbb{V}(\mathcal{F})$ est plat ; \mathcal{F} est localement libre ; $\mathbb{V}(\mathcal{F})$ est un fibré vectoriel.

Les principaux ouvrages utilisés sont les livres de Bosch-Lütkebohmert-Raynaud [BLR], Matsumura [Ma], Milne [Mi], Grothendieck [EGA]. La plupart des résultats utilisés (notamment en algèbre commutative) sont démontrés ; les exceptions les plus notables sont le théorème de Cohen-Seidenberg sur les extensions entières d'anneaux, le lemme de normalisation de Noether, la théorie homologique des anneaux locaux réguliers, et la descente de la platitude dans les limites inductives d'algèbres.

Dans ce cours, tous les anneaux sont commutatifs et unitaires.

1 Préliminaires

Cette partie de préliminaires commence par deux paragraphes (1.1 et 1.2) qui rassemblent sans démonstration quelques définitions et propriétés de topologie et de théorie des faisceaux.

1.1 Topologie

Dans 1.1.1 et 1.1.2, nous considérons des espaces topologiques pour simplifier, mais le propos est aussi valable pour d'autres types d'objets géométriques : variétés différentiables, holomorphes, fibrés, schémas, etc.

1.1.1 Constructions par recollement. Lorsqu'on étudie un espace topologique X , il est fréquent d'utiliser un recouvrement ouvert $(U_i)_{i \in I}$, que l'on peut voir comme une application

$$\coprod_{i \in I} U_i \longrightarrow X.$$

Vus dans le but, les U_i s'intersectent dans X , mais vus à la source, ils sont tous *décollés* les uns des autres. Le procédé de *recollement* peut être vu comme l'opération inverse, consistant à reconstruire X en partant des U_i . Notons U_{ij} (resp. U_{ji}) l'intersection $U_i \cap U_j$ vue comme ouvert de U_i (resp. U_j). Il y a bien sûr un homéomorphisme naturel $\varphi_{ij} : U_{ij} \rightarrow U_{ji}$, qui ici est l'identité tant que l'on voit ces ouverts comme plongés dans X . Sur les intersections triples $U_i \cap U_j \cap U_k$, il y a une compatibilité entre ces homéomorphismes.

Réciproquement, soient U_i , $i \in I$, des espaces topologiques munis chacun d'ouverts U_{ij} , $j \in I$. Soient $\varphi_{ij} : U_{ij} \rightarrow U_{ji}$ des homéomorphismes tels que pour tous i, j, k on a $\varphi_{ij}(U_{ij} \cap U_{ik}) = U_{ji} \cap U_{jk}$ et $\varphi_{ik} = \varphi_{jk} \circ \varphi_{ij}$ sur $U_{ij} \cap U_{ik}$. Considérons la relation d'équivalence sur la somme disjointe $\coprod U_i$ définie par $x_i \sim x_j$ si et seulement si $x_j = \varphi_{ij}(x_i)$, pour $x_i \in U_{ij}$, $x_j \in U_{ji}$. L'espace $X = \coprod U_i / \sim$ muni de la topologie quotient est dit obtenu par *recollement* à partir des U_i à l'aide de la *donnée de recollement* (U_{ij}, φ_{ij}) .

1.1.2 Propriétés de nature locale. Soit P une propriété des espaces topologiques, comme être séparé, compact, connexe, etc. On dit que P est *de nature locale* si pour tout espace topologique X et pour tout recouvrement ouvert (U_i) de X , les conditions suivantes sont équivalentes :

- (1) X vérifie P ,
- (2) chaque U_i vérifie P .

Soit Q une propriété des applications continues d'espaces topologiques, comme être ouverte, fermée, propre, à fibres connexes, être un homéomorphisme, etc. On dit que Q est *de nature locale sur la source* si pour toute application continue d'espaces topologiques $f : X \rightarrow Y$ et pour tout recouvrement ouvert (U_i) de X , les conditions suivantes sont équivalentes :

- (1) f vérifie Q ,
- (2) chaque application composée $U_i \hookrightarrow X \rightarrow Y$ vérifie Q .

On dit que Q est *de nature locale sur le but* si pour toute application continue d'espaces topologiques $f : X \rightarrow Y$ et pour tout recouvrement ouvert (V_i) de X , les conditions suivantes sont équivalentes :

- (1) f vérifie Q ,
- (2) chaque projection $X \times_Y V_i \rightarrow V_i$ vérifie Q .

On notera que la projection $X \times_Y V_i \rightarrow V_i$ est simplement la restriction $f|_{f^{-1}(V_i)} : f^{-1}(V_i) \rightarrow V_i$. Il est facile de voir qu'une propriété Q est de nature locale à la source et au but si et seulement s'il existe un recouvrement ouvert V_i de Y , et pour chaque i un recouvrement ouvert U_{ij} de $f^{-1}(V_i)$, tels que les applications $U_{ij} \rightarrow V_i$ vérifient Q . Dans des démonstrations portant sur des morphismes de schémas, ceci permet souvent de se ramener au cas affine.

1.1.3 Générization et spécialisation. Soit X un espace topologique et $x, y \in X$. Si $x \in \overline{\{y\}}$, on dit que x est une *spécialisation* de y , ou que y est une *générization* de x , et on note $x \rightsquigarrow y$.

Supposons dans la suite que X est un schéma. Alors les fermés irréductibles sont exactement les parties de la forme $Y = \overline{\{y\}}$. Chaque tel fermé Y possède un unique point dense y appelé son *point générique*. L'application $y \mapsto \overline{\{y\}}$ établit une bijection entre l'ensemble sous-jacent à X et l'ensemble des fermés irréductibles de X , dont la réciproque est l'application qui à Y associe son point générique.

Pour tout point $x \in X$, le morphisme canonique $\text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}) \rightarrow X$ est injectif et identifie $\text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$ à l'ensemble des générizations de x . En effet, si U est un voisinage de x , toutes les générizations de x appartiennent à U . Choisissons un ouvert affine $U = \text{Spec}(A)$ et notons p_x l'idéal premier correspondant à x . Pour tout $y \in U$, on a $\overline{\{y\}} = V(p_y)$ de sorte que $x \in \overline{\{y\}}$ si et seulement si $p_y \subset p_x$. Ainsi l'ensemble des générizations de x s'identifie avec l'ensemble des premiers inclus dans p_x , lui-même en bijection canonique avec le spectre de l'anneau local $A_{p_x} = \mathcal{O}_{X,x}$.

1.2 Faisceaux quasi-cohérents

1.2.1 Faisceaux et bases d'ouverts. Soit X un schéma. Une base de la topologie de X est donnée par les ouverts affines ; si $X = \text{Spec}(A)$, une base de la topologie est donnée par les ouverts $D(f) = \text{Spec}(A[1/f])$ appelés *ouverts distingués* (ou *principaux*). Il est possible (et c'est souvent commode) de définir les faisceaux sur X par leur restriction sur une base d'ouverts \mathcal{B} , de la manière suivante. On appelle *\mathcal{B} -pré-faisceau* un foncteur contravariant \mathcal{F} de la catégorie des ouverts $U \in \mathcal{B}$ munie des inclusions, dans la catégorie des ensembles (ou des groupes, etc). On dit que \mathcal{F} est un *\mathcal{B} -faisceau* si pour tout ouvert $U \subset X$, tout recouvrement de U par des ouverts $U_i \in \mathcal{B}$, et toute collection d'éléments $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ telle que pour tous i, j et tout ouvert $V \subset U_i \cap U_j$ qui est dans \mathcal{B} , on a $s_i|_V = s_j|_V$, il existe une unique section $s \in \mathcal{F}(U)$ telle que $s|_{U_i} = s_i$ pour tout i . Alors *tout \mathcal{B} -faisceau s'étend de manière unique en un faisceau sur X* . La démonstration n'est pas difficile, une fois que l'on a l'expression de l'extension de \mathcal{F} à tout ouvert $U : \mathcal{F}(U) = \varprojlim_{V \subset U, V \in \mathcal{B}} \mathcal{F}(V)$. De même, tout morphisme entre deux \mathcal{B} -faisceaux s'étend de manière unique en un morphisme entre faisceaux.

1.2.2 Faisceaux de modules. Pour les \mathcal{O}_X -modules, nous renvoyons à [Ha], chap. II, § 1 et § 5 pour les notions de sous-faisceau, faisceau quotient, produit tensoriel, morphismes, noyaux, conoyaux, images, suites exactes, image directe $f_*\mathcal{F}$, image inverse $f^*\mathcal{G}$, faisceaux $\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G})$, faisceau dual $\mathcal{F}^\vee = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X)$. Il y a deux notions utiles de fibres en un point $x \in X$:

- (1) la fibre $\mathcal{F}_x = \varinjlim_{U \ni x} \mathcal{F}(U)$ aussi notée $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{X,x}$, qui est un $\mathcal{O}_{X,x}$ -module, et
- (2) la fibre $\mathcal{F}(x) = \mathcal{F}_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} k(x) = \mathcal{F}_x/m_x\mathcal{F}_x$, qui est un $k(x)$ -espace vectoriel.

L'anglais mathématique est plus riche et qualifie \mathcal{F}_x de *stalk at x* et $\mathcal{F}(x)$ de *fibre at x* . Pour tout ouvert U contenant x et toute section $s \in \mathcal{F}(U)$, l'image $s_x \in \mathcal{F}_x$ est appelée le *germe de s en x* et l'image $s(x) \in \mathcal{F}(x)$ est appelée la *valeur de s en x* . Signalons que la notation $\mathcal{F}(x)$ n'est pas universellement employée ; elle présente l'avantage que $s(x)$ est une notation familière pour l'évaluation en x .

1.2.3 Modules quasi-cohérents et cohérents. Un ouvert $U \subset X$ possède une unique structure de schéma telle que U est muni de la topologie induite de celle de X et $\mathcal{O}_U = \mathcal{O}_X|_U$. Un *faisceau quasi-cohérent sur X* ou *\mathcal{O}_X -module quasi-cohérent* est un faisceau de \mathcal{O}_X -modules \mathcal{F} tel que tout point $x \in X$ possède un voisinage ouvert U pour lequel il existe une suite exacte de faisceaux de modules

$$\mathcal{O}_U^{(I)} \longrightarrow \mathcal{O}_U^{(J)} \longrightarrow \mathcal{F}|_U \longrightarrow 0.$$

où I et J sont deux ensembles et $\mathcal{O}_U^{(I)}$ désigne la somme directe de faisceaux. Lorsque I peut être choisi vide (et J fini), on dit que \mathcal{F} est *localement libre (de rang fini)*. Lorsque J peut être choisi fini, on dit que \mathcal{F} est *de type fini*. Lorsque J et I peuvent être choisis finis, on dit que \mathcal{F} est *de présentation finie*. On dit que \mathcal{F} est *cohérent* si pour tout ouvert U , tout sous-module de type fini de \mathcal{F} est de présentation finie. Les propriétés d'être quasi-cohérent ou cohérent sont de nature locale sur X . Si X est noethérien, le faisceau \mathcal{O}_X est cohérent (mais il ne l'est pas en général). La catégorie Qcoh_X des faisceaux quasi-cohérents et la catégorie Coh_X des faisceaux cohérents sont stables par noyaux, conoyaux et extensions, et en particulier ce sont des catégories abéliennes.

Lorsque $X = \text{Spec}(A)$, le foncteur $\mathcal{F} \mapsto \Gamma(X, \mathcal{F})$ est une équivalence de catégories entre Qcoh_X et la catégorie des A -modules ; si de plus X est noethérien, cette équivalence échange les \mathcal{O}_X -modules cohérents et les A -modules de type fini. Le foncteur inverse associe à un A -module M le \mathcal{O}_X -module défini sur la base des ouverts distingués par $\mathcal{F}(D(f)) = M[1/f]$.

1.2.4 Liens entre foncteurs sur les modules : petit formulaire. Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de schémas. Les lettres \mathcal{F} désignent des \mathcal{O}_X -modules et les lettres \mathcal{G} des \mathcal{O}_Y -modules. Seules les formules (1) et (5) ci-dessous seront véritablement utiles dans ce cours.

- (1) (Adjonction) La paire de foncteurs (f^*, f_*) entre la catégorie des \mathcal{O}_X -modules et la catégorie des \mathcal{O}_Y -modules est une paire de foncteurs adjoints, c'est-à-dire que l'on a un isomorphisme canonique, fonctoriel en $\mathcal{F} \in \mathcal{O}_X\text{-Mod}$ et $\mathcal{G} \in \mathcal{O}_Y\text{-Mod}$:

$$\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(f^*\mathcal{G}, \mathcal{F}) = \text{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F}).$$

- (2) (Projection) Il existe un morphisme canonique $f_*\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{G} \rightarrow f_*(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} f^*\mathcal{G})$. Si \mathcal{G} est localement libre, ce morphisme est un isomorphisme et on l'appelle alors la *formule de projection*.
- (3) (Dual et $\mathcal{H}om$) Il existe un morphisme canonique $\mathcal{F}_1^\vee \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}_2 \rightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$ qui est un isomorphisme si \mathcal{F}_1 est localement libre de rang fini.
- (4) (f^* et $\mathcal{H}om$) Il existe un morphisme canonique $f^*\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2) \rightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(f^*\mathcal{G}_1, f^*\mathcal{G}_2)$ qui est un isomorphisme si \mathcal{G}_1 est localement libre de rang fini.
- (5) (f^* et dual, cas particulier de (4) où $\mathcal{G}_2 = \mathcal{O}_Y$.) Il existe un morphisme canonique $f^*(\mathcal{G}^\vee) \rightarrow (f^*\mathcal{G})^\vee$ qui est un isomorphisme si \mathcal{G} est localement libre de rang fini.

1.3 Anneaux noethériens et dimension

Voici un fameux lemme, dont l'évocation ici n'est pas la dernière :

1.3.1 Lemme de Nakayama. *Soit A un anneau et M un A -module de type fini. Si I est un idéal de A tel que $M = IM$, il existe $a \equiv 1 \pmod{I}$ tel que $aM = 0$. En particulier, si A est local de corps résiduel k et $M \otimes_A k = 0$, alors $M = 0$.*

Preuve : Soit n minimal tel que M peut être engendré par n éléments x_1, \dots, x_n . L'hypothèse $M = IM$ entraîne que tous les éléments de M s'écrivent $i_1x_1 + \dots + i_nx_n$ avec $i_k \in I$ pour $1 \leq k \leq n$. Si $n = 1$, on a donc $x_1 = i_1x_1$ de sorte que $a = 1 - i_1$ annule M . Si $n \geq 2$, notons N le sous-module de M engendré par x_1, \dots, x_{n-1} . On a $x_n = i_1x_1 + \dots + i_{n-1}x_{n-1}$ donc $(1 - i_n)x_n = i_1x_1 + \dots + i_{n-1}x_{n-1}$. La multiplication par $1 - i_n$ définit donc un morphisme de modules de M dans N , et comme $M = IM$, c'est même un morphisme $1 - i_n : M = IM \rightarrow IN$. Alors pour tout $x \in N$ on a $x = (1 - i_n)x + i_nx \in IN$ donc $N = IN$. Par récurrence, il existe $a' \equiv 1 \pmod{I}$ qui annule N , donc $a = (1 - i_n)a' \equiv 1 \pmod{I}$ annule M . Dans le cas où A est local d'idéal maximal m , on a $M \otimes_A k = 0$ si et seulement si $M = mM$ et on conclut en observant que $a \equiv 1 \pmod{m}$ est inversible. \square

Le lemme de Nakayama a une signification géométrique claire :

1.3.2 Corollaire. *Soient X un schéma et \mathcal{F} un \mathcal{O}_X -module quasi-cohérent de type fini. Pour tout $x \in X$, posons $\delta(x) = \dim_{k(x)} \mathcal{F}(x)$. Alors, la fonction δ est semi-continue supérieurement.*

Preuve : L'assertion signifie que pour tout entier $n \geq 0$, l'ensemble $U := \{x \in X, \delta(x) \leq n\}$ est ouvert. Cette propriété est locale sur X , on peut raisonner au voisinage d'un x fixé. On suppose donc X affine d'anneau A et \mathcal{F} donné par un A -module de type fini M . Si $x \in U$, il existe $m_1, \dots, m_n \in M$ dont les images dans $M \otimes k(p)$ sont des générateurs. Soit N le sous-module de M engendré par les m_i et $E = M/N$. On a $E \otimes k(p) = 0$ donc $E_p = 0$, d'après le lemme de Nakayama 1.3.1 pour l'anneau local A_p . Ainsi l'image de chaque m_i dans E est annulée par un élément $s_i \in A \setminus p$, et E est annulé par le produit $s = s_1 \dots s_n$. Il s'ensuit que sur le voisinage ouvert $D(s)$ de x , on a $\delta \leq n$. \square

1.3.3 Théorème de l'intersection (Krull). Soit (A, m) un anneau local noethérien. Alors, on a $\bigcap_{n \geq 0} m^n = 0$.

Nous reproduisons une démonstration due à A. Caruth. Si I, J sont des idéaux d'un anneau A , on notera $I : J$, ou simplement $I : a$ si $J = (a)$, l'idéal des $x \in A$ tels que $xJ \subset I$.

Preuve : Montrons que pour tout idéal I de A , il existe un entier t tel que $m^t \cap I \subset mI$. Posons $J = mI$. Soient x_1, \dots, x_r des générateurs de m . La suite croissante d'idéaux $(J : x_1^s)_{s \geq 0}$ est stationnaire donc il existe s_1 tel que $J : x_1^{s_1} = J : x_1^{s_1+1}$. Posons $y_1 = x_1^{s_1}$. Pour $j \leq r$, si s_1, \dots, s_{j-1} ont été définis et $y_i = x_i^{s_i}$, le même argument montre qu'il existe s_j tel que

$$(J + (y_1, \dots, y_{j-1})) : x_j^{s_j} = (J + (y_1, \dots, y_{j-1})) : x_j^{s_j+1}.$$

Posons $y_j = x_j^{s_j}$. Montrons par récurrence que $(y_1, \dots, y_j) \cap (J : (y_1, \dots, y_j)) \subset J$. Si $j = 1$, on a $(y_1) \cap (J : y_1) = y_1(J : y_1^2) = y_1(J : y_1)$ par le choix de s_1 , et c'est inclus dans J . Si $j > 1$,

$$\begin{aligned} (y_1, \dots, y_j) \cap (J : (y_1, \dots, y_j)) &= (y_1, \dots, y_j) \cap (J : y_j) \cap (J : (y_1, \dots, y_{j-1})) \\ &\subset (J + (y_1, \dots, y_{j-1})) \cap (J : (y_1, \dots, y_{j-1})) \text{ par choix de } s_j, \\ &= J + \{(y_1, \dots, y_{j-1}) \cap (J : (y_1, \dots, y_{j-1}))\} \\ &= J \text{ par l'hypothèse de récurrence.} \end{aligned}$$

Posons $s = \max(s_1, \dots, s_r)$ et $t = rs$, alors $m^t \subset (y_1, \dots, y_r)$. Comme $I \subset J : m$, on trouve

$$m^t \cap I \subset m^t \cap (J : m) \subset (y_1, \dots, y_r) \cap (J : (y_1, \dots, y_r)) \subset J = mI.$$

Si $z \in \bigcap_{n \geq 0} m^n$, en appliquant ce qui précède avec $I = (z)$ on obtient $I = m^t \cap I \subset mI$ donc $z = xz$ pour un certain $x \in m$. Il s'ensuit que $z = 0$. \square

1.3.4 Premiers associés et minimaux, dimension, anneaux artiniens (rappels).

Dans ce paragraphe 1.3.4, on fixe un anneau noethérien A et on énonce quelques faits sans preuve.

Un *idéal premier associé* de A est un premier de la forme $p = \text{Ann}(x) = 0 : x$, pour un $x \in A \setminus \{0\}$. L'ensemble $\text{Ass}(A)$ des premiers associés est fini, non vide, et contient tous les premiers minimaux de A . Un premier associé non minimal est dit *immergé*; un exemple typique est l'anneau $A = k[\epsilon, x]/(\epsilon^2, \epsilon x)$ avec le premier minimal $p = (\epsilon) = \text{Ann}(x)$ et le premier immergé $q = (\epsilon, x) = \text{Ann}(\epsilon)$. La réunion des premiers associés est le complémentaire de l'ensemble des non diviseurs de 0 (ou éléments réguliers) de A . Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de A , on appelle *premier minimal sur* (x_i) un idéal premier de A minimal parmi ceux contenant (x_i) . D'après ce qui précède, il n'y a qu'un nombre fini de tels idéaux, puisqu'ils correspondent aux premiers minimaux de A/I où I est l'idéal engendré par les x_i . Pour ces faits, lire par exemple le début du § 6 de [Ma], notamment les th. 6.1 et 6.5 avec $M = A$.

On rappelle aussi que la *dimension* de A est le supremum $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ des longueurs des chaînes de premiers $p_0 \subset p_1 \subset \cdots \subset p_n$. Dans une telle écriture, il est sous-entendu que les inclusions sont strictes, et la longueur correspond au nombre de signes d'inclusion. On a des identifications qui respectent l'inclusion $\text{Spec}(A/p) = \{\text{premiers de } A \text{ contenant } p\}$ et $\text{Spec}(A_p) = \{\text{premiers de } A \text{ inclus dans } p\}$ qui permettent de ramener à A les questions sur la dimension de A/p et A_p . Pour ces faits, lire le début du § 5 de [Ma].

Enfin, on rappelle que A est dit *artinien* si toute suite décroissante d'idéaux est stationnaire. Si A est un anneau quelconque et M un A -module, on dit que M est *simple* s'il n'a pas d'autres sous-modules que $\{0\}$ et M , ou de manière équivalente si $M \simeq A/m$ où m est un idéal maximal de A . Une *suite de composition* pour M est une suite $0 = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_n = M$ de sous-modules telle que les quotients M_i/M_{i-1} sont simples. Si M possède des suites de composition, elles ont toutes même longueur n et on pose $\text{lg}_A(M) = n$; sinon, on pose $\text{lg}_A(M) = \infty$. Le nombre $\text{lg}_A(M)$ est appelé la *longueur* de M . Le théorème principal sur les anneaux artiniens énonce que les conditions suivantes sont équivalentes : (1) A est artinien, (2) A est un produit direct fini d'anneaux locaux artiniens, (3) $\dim(A) = 0$, (4) $\text{lg}_A(A) < \infty$. Pour ces faits, lire le début du § 2.4 de [Ei], notamment th. 2.14. \square

1.3.5 Hauptidealsatz (Krull). *Soit A un anneau noethérien et $x_1, \dots, x_r \in A$. Alors, pour tout idéal premier p minimal sur x_1, \dots, x_r , on a $\dim(A_p) \leq r$.*

Le mot *Hauptidealsatz* signifie « Théorème de l'idéal principal ». La dimension de A_p est aussi appelée *hauteur de p* et notée $\text{ht}(p)$. Ce résultat dit qu'au point générique ξ d'une composante irréductible d'une sous-variété de $X = \text{Spec}(A)$ définie par r équations, on a $\dim(\mathcal{O}_{X,\xi}) \leq r$.

Preuve : Nous ne démontrerons que le cas $r = 1$, le plus important pour nous; le cas général s'en déduit par une récurrence (voir [Ei], th. 10.1 et 10.2). On note $x_1 = x$. Il suffit de montrer que pour tout idéal premier $q \subsetneq p$, on a $\dim(A_q) = 0$. Notons $q^{(n)}$ la n -ième puissance symbolique de q , préimage de $q^n A_q$ par l'application de localisation $A \rightarrow A_q$. Maintenant, quitte à remplacer A par son localisé A_p , on peut supposer que p est maximal. Alors, comme p est minimal sur x , l'anneau $A/(x)$ est artinien. Il s'ensuit que la suite décroissante d'idéaux $(x) + q^{(n)}$ est stationnaire; soit n tel que $q^{(n)} \subset (x) + q^{(n+1)}$. Montrons que $q^{(n)} = (x)q^{(n)} + q^{(n+1)}$. Tout $f \in q^{(n)}$ peut s'écrire sous la forme $f = ax + g$ avec $g \in q^{(n+1)}$. En particulier $ax \in q^{(n)}$. Comme $x \notin q$ (puisque p est minimal sur x), on en déduit que $a \in q^{(n)}$, ce qui montre l'égalité d'idéaux désirée. Alors le A -module $M = q^{(n)}/q^{(n+1)}$ vérifie $M = xM$, donc $M = 0$ par le lemme de Nakayama. Il s'ensuit que $q^{(n)} = q^{(n+1)}$, donc $q^n A_q = q^{n+1} A_q$ et on en déduit que $q^n A_q = 0$ par une nouvelle application du lemme de Nakayama. Donc $\dim(A_q) = 0$, comme souhaité. \square

1.3.6 Corollaire. *Soit A un anneau intègre, noethérien et normal de corps de fractions K . Alors A est égal à l'intersection, dans K , de ses localisés en les premiers de hauteur 1.*

Preuve : Notons $B = \bigcap_{\text{ht}(p)=1} A_p$. Il est clair que $A \subset B$; supposons l'inclusion stricte pour aboutir à une contradiction. Pour chaque $x \in B$, soit $p_x = (A : x) = \{a \in A, ax \in A\}$ qui est un idéal de A . Comme A est noethérien, toute chaîne croissante d'idéaux de la forme p_x est stationnaire, donc on peut choisir $x \in B \setminus A$ tel que p_x soit maximal parmi les idéaux de cette forme. Montrons que p_x est premier. Si $c, d \in A$ avec $cd \in p_x$ et $d \notin p_x$, alors $cdx \in A$ mais $dx \notin A$, donc $c \in p_{dx}$; comme p_x est inclus dans p_{dx} et maximal, il lui est égal, donc $c \in p_x$, ce qui démontre la primalité. Par ailleurs, $x \notin A_p$, car $sx \in A$ implique $s \in p$ par définition de p . Comme A_p est encore intègre, noethérien, normal, on s'est ramené à rechercher une contradiction pour A_p . Donc dans la suite on suppose A local d'idéal maximal p , et $x \in B \setminus A$. Notons que $xp \subset A$ par définition de p .

Supposons que $xp = A$. Alors $x^{-1} \in A$ et $p = x^{-1}A$, donc p est minimal parmi les premiers de A contenant x^{-1} . D'après le Hauptidealsatz on a $\dim(A) = \text{ht}(p) = 1$ et $B \subset A$, contradiction.

Supposons que $xp \neq A$. Alors $xp \subset p$, donc la multiplication par x définit un endomorphisme $x : p \rightarrow p$. Soient y_1, \dots, y_r des générateurs de p et notons $xy_i = a_{i1}y_1 + \dots + a_{ir}y_r$, avec $a_{ij} \in A$. La matrice $M = (a_{ij})$ définit un endomorphisme du A -module libre A^r qui relève la multiplication par x :

$$\begin{array}{ccc} A^r & \xrightarrow{M} & A^r \\ \downarrow & & \downarrow \\ p & \xrightarrow{x} & p \end{array}$$

Soit P le polynôme de Cayley-Hamilton de M . On a $P(M) = 0$ donc $P(x) = 0$, ce qui montre que x est entier sur A . Comme A est normal on trouve $x \in A$, contradiction. \square

1.3.7 Corollaire. *Soit A un anneau intègre noethérien. Alors A est factoriel si et seulement si tout premier de hauteur 1 est principal.*

Preuve : Supposons A factoriel. Soit p premier de hauteur 1 et $x \in p$ non nul. Si l'on écrit x comme produit d'irréductibles a_i , l'un d'entre eux est dans p . Alors on a une chaîne de premiers $0 \subset (a_i) \subset p$ donc $p = (a_i)$. Réciproquement supposons que tout premier de hauteur 1 est principal. Comme A est noethérien, tout élément s'écrit comme un produit fini d'irréductibles. Il suffit donc de montrer qu'un irréductible a engendre un idéal premier. Soit p un premier minimal sur a . On a $\text{ht}(p) = 1$ par le Hauptidealsatz, donc p est engendré par un $b \in A$ par hypothèse. Alors $a = bc$, et comme a est irréductible, on a $c \in A^\times$ et $(a) = p$ est premier. \square

1.3.8 Lemme d'évitement. *Soit A un anneau et I_1, \dots, I_t des idéaux parmi lesquels au plus deux idéaux non premiers. Si un idéal J n'est inclus dans aucun des I_s , il contient un élément contenu dans aucun des I_s .*

Preuve : On fait une récurrence sur t . Si $t = 1$, il n'y a rien à démontrer. Si $t \geq 2$, l'hypothèse de récurrence entraîne que pour chaque s il existe $x_s \in J \setminus \bigcup_{r \neq s} I_r$. Montrons que l'hypothèse $J \subset \bigcup I_s$ mène à une contradiction. En effet, cette hypothèse implique $x_s \in I_s$. Si $t = 2$, l'élément $x_1 + x_2$ n'est ni dans I_1 ni dans I_2 , contradiction. Si $t \geq 3$, on

peut d'après l'énoncé supposer que I_1 est premier, et alors $x_1 + x_2 \dots x_t$ n'est dans aucun des I_s , contradiction. \square

1.3.9 Lemme (dimension des diviseurs, cas local). *Soit (A, m) un anneau local noethérien et soient p_1, \dots, p_s les premiers minimaux de A tels que $\dim(A/p_i) = \dim(A)$, correspondant aux composantes irréductibles de $\text{Spec}(A)$ de dimension maximale. Soit $f \in m$.*

(1) *Si $f \in p_1 \cup \dots \cup p_s$, on a $\dim(A/(f)) = \dim(A)$.*

(2) *Si $f \notin p_1 \cup \dots \cup p_s$, on a $\dim(A/(f)) = \dim(A) - 1$.*

En particulier, si f n'est pas diviseur de zéro on a $\dim(A/(f)) = \dim(A) - 1$.

Preuve : Soit $n = \dim(A)$ et notons p_1, \dots, p_t les premiers minimaux de A de telle sorte que ceux qui vérifient $\dim(A/p_i) = n$ sont les s premiers. La dimension de $A/(f)$ est donnée par les chaînes de premiers de A contenant f . Comme toute chaîne de premiers commence en l'un des p_i , on est ramené au cas de A/p_i . On peut donc supposer que A est intègre. Dans le cas (1) on a $f = 0$ et le résultat est clair ; supposons qu'on est dans le cas (2). En prenant la préimage dans A des chaînes de premiers de $A/(f)$ on voit que $\dim(A/(f)) \leq n - 1$, donc pour prouver (2) il suffit de trouver une chaîne de premiers

$$(0) = \mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{p}_n = m$$

avec $f \in \mathfrak{p}_1$. Notons i le plus petit entier tel que $f \in \mathfrak{p}_i$. Choisissons une chaîne avec i minimal, supposons que $i \geq 2$ et montrons qu'on aboutit à une contradiction. Quitte à remplacer A par $A_{\mathfrak{p}_i}/\mathfrak{p}_{i-2}A_{\mathfrak{p}_i}$, on peut supposer que $i = n = 2$. Soit q un premier minimal sur f . Alors $q \neq m$ car sinon on aurait $\dim(A) = \dim(A_q) \leq 1$ d'après le Hauptidealsatz. On obtient une chaîne $(0) \subsetneq q \subsetneq m$ qui contredit la minimalité de i . Ainsi $i = 1$. La dernière assertion découle du fait que si f n'est pas diviseur de zéro, il n'est dans aucun premier associé (voir 1.3.4) et en particulier dans aucun premier minimal. \square

1.3.10 Théorème (Cohen-Seidenberg). *Soit $A \subset B$ une extension entière d'anneaux et $p \subset A$ un premier.*

(1) *Il existe un premier $q \subset B$ au-dessus de p , i.e. tel que $q \cap A = p$.*

(2) *Il n'y a pas d'inclusions entre les premiers au-dessus de p .*

Si l'un de A ou B a une dimension de Krull finie, alors l'autre aussi et $\dim(A) = \dim(B)$.

Preuve : Nous admettons ce théorème, voir [Ma], theorem 9.3 où sont prouvés les points (1) et (2). Justifions la dernière assertion. Soit $p_0 \subset \dots \subset p_r$ une chaîne de premiers dans A . Par le point (1), il existe un premier q_0 au-dessus de p_0 . En itérant avec l'extension $A/p_0 \subset B/q_0$ qui est entière, on construit une chaîne $q_0 \subset \dots \subset q_r$ dans B de longueur r , donc $\dim(B) \geq \dim(A)$. Réciproquement soit $q_0 \subset \dots \subset q_s$ une chaîne de premiers dans B . Par le point (2), la chaîne $p_0 \subset \dots \subset p_s$ avec $p_i = q_i \cap A$ est de longueur s , donc $\dim(A) \geq \dim(B)$. \square

1.3.11 Théorème. Soit A un anneau intègre qui est une algèbre de type fini sur un corps k . Soit K le corps de fractions de A et $\text{degtr}_k(A)$ le degré de transcendance de l'extension K/k . Alors,

- (1) $\dim(A) = \text{degtr}_k(A)$.
- (2) Pour tout idéal maximal $m \subset A$, on a $\dim(A_m) = \dim(A)$.

Preuve : Ceci découle du lemme de normalisation de Noether que nous rappelons sans démonstration (voir [Ei], § 8, th. A1) : soit A une algèbre de type fini sur un corps k , et $p_0 \subset \dots \subset p_r$ une chaîne d'idéaux premiers saturée au sens où aucun idéal premier ne peut être inséré dans la chaîne, alors il existe un sous-anneau R engendré par des éléments $x_1, \dots, x_r \in A$ algébriquement indépendants sur k tels que l'inclusion $R \subset A$ est un morphisme fini et que $p_i \cap R = (x_1, \dots, x_i)$ pour tout $i \geq 1$. En particulier, le théorème de Cohen-Seidenberg montre que $\dim(A) = \dim(R) = r$ donc toutes les chaînes saturées ont même longueur égale à $\dim(A)$, de qui prouve (2). Si A est intègre, on obtient une extension de corps finie $k(x_1, \dots, x_r) \subset K$ donc $\text{degtr}(K/k) = \text{degtr}_k(k(x_1, \dots, x_r)) = r = \dim(A)$, d'où (1). \square

Ces propriétés très importantes des k -algèbres de type fini permettent d'étendre le calcul de la dimension des « diviseurs » comme dans le lemme 1.3.9 :

1.3.12 Corollaire (dimension des diviseurs, cas global). Soit A une algèbre intègre de type fini sur un corps k et soit $f \in A$ non nul et non inversible. Alors $\dim(A/(f)) = \dim(A) - 1$.

Preuve : Comme f n'est pas inversible, il est dans un idéal maximal m . Avec 1.3.11 et 1.3.9 on trouve $\dim(A/(f)) = \dim((A/(f))_m) = \dim(A_m/(f)) = \dim(A_m) - 1 = \dim(A) - 1$. \square

Le calcul de $\dim(A/(f))$ pour une k -algèbre de type fini quelconque se fait en regardant l'image de f modulo les premiers minimaux, comme dans la preuve du lemme 1.3.9. Le résultat est un peu moins simple que dans le cas local lorsque f est inversible modulo l'un des p_i , en particulier on peut alors avoir $\dim(A/(f)) < \dim(A) - 1$. Par exemple, soit $A = k[x_1, \dots, x_n, t]/(x_1t, \dots, x_nt)$ l'anneau de fonctions de la réunion dans \mathbb{A}_k^{n+1} de l'hyperplan $t = 0$ et de la droite $x_1 = \dots = x_n = 0$, et $f = 1 + t$. On a $\dim(A) = n$ et $\dim(A/(f)) = 0$.

1.3.13 Remarque. Insistons sur le fait que ce calcul de dimension dans le cas global est une propriété très particulière des algèbres de type fini sur un corps. Pour un anneau noethérien intègre quelconque, les énoncés 1.3.11(2) et 1.3.12 sont faux en général. Par exemple, soit R un anneau de valuation discrète, k son corps résiduel, K son corps de fractions, π une uniformisante. Soit $A = R[x]$ qui est l'anneau de la droite affine $X = \mathbb{A}_R^1$, de dimension absolue 2 et de dimension relative sur R égale à 1. Considérons les idéaux maximaux $m = (\pi, x)$ et $n = (\pi x - 1)$, avec $A/m \simeq k$ et $A/n \simeq K$. Alors $\dim(A_m) = 2$ et $\dim(A_n) = 1$. Ceci n'est pas surprenant, car $\{n\}$ est un point fermé de la fibre ouverte $X_K = \mathbb{A}_K^1$ qui est de dimension absolue 1. Par ailleurs, avec $f = \pi x - 1$ on a $\dim(A/(f)) = \dim(K) = 0$.

1.3.14 Anneaux réguliers. Soit (A, m) un anneau local noethérien, $k = A/m$, $x_1, \dots, x_r \in m$. Le lemme de Nakayama montre que si les classes des x_i engendrent m/m^2 comme k -espace vectoriel, alors les x_i engendrent m comme idéal. Ainsi le nombre minimal de générateurs de m est égal à la *dimension de plongement* de A définie par

$$\text{edim}(A) \stackrel{\text{déf}}{=} \dim_k(m/m^2).$$

Le Hauptidealsatz montre qu'on a toujours $\text{edim}(A) \geq \dim(A)$. Géométriquement, si A est l'anneau local d'un point dans une variété, cela signifie que la dimension de l'espace tangent en ce point est toujours plus grande que la dimension de la variété (voir 3.2.10). Par exemple, la cubique nodale d'équation $y^2 = x^2(x+1)$ possède deux tangentes distinctes au point $(x, y) = (0, 0)$, d'où un espace tangent de dimension 2. L'excès de dimension est causé par la singularité ; ceci suggère la bonne définition algébrique de la régularité en un point.

1.3.15 Définition. Un anneau local noethérien A est dit *régulier* lorsque $\dim(A) = \text{edim}(A)$.

Autrement dit, un anneau local noethérien de dimension n est régulier lorsque son idéal maximal peut être engendré par n éléments.

1.3.16 Proposition. *Tout anneau local régulier est intègre.*

Preuve : Soit (A, m) local régulier et $n = \dim(A)$; on montre le résultat par récurrence sur n . Si $n = 0$ l'anneau A est un corps et le résultat est clair. Par le lemme d'évitement 1.3.8, il existe un élément $f \in m$ qui n'est ni dans m^2 , ni dans l'un des premiers minimaux de A . En complétant l'image de f modulo m^2 en une base de m/m^2 puis en relevant dans A , on obtient des générateurs f, f_2, \dots, f_n pour m . Par le lemme 1.3.9, l'anneau $A/(f)$ est de dimension $n - 1$ et son idéal maximal est engendré par les classes de f_2, \dots, f_n donc il est régulier. Par l'hypothèse de récurrence $A/(f)$ est intègre donc (f) est premier. Soit p un premier minimal inclus dans (f) . Pour tout $g \in p$, il existe $a \in A$ tel que $g = af$, et comme p est premier et $f \notin p$, on trouve $a \in p$. Ceci montre que $p = (f)p$ donc $p = 0$ par Nakayama. Ainsi A est intègre. \square

1.3.17 Définition. Un anneau *régulier* est un anneau noethérien dont les localisés en les idéaux premiers sont des anneaux locaux réguliers.

Cette définition est légitimée par le point (1) du théorème suivant, qui montre que la propriété d'être régulier est locale. Nous admettrons ce résultat ainsi que quelques autres propriétés très importantes des anneaux réguliers, dont les démonstrations nécessitent de développer la théorie homologique des anneaux locaux, ce qui nous emmènerait trop loin.

1.3.18 Théorème (Auslander-Buchsbaum-Serre).

- (1) *Tout localisé d'un anneau local régulier est régulier.*
- (2) *Tout anneau local régulier est factoriel.*

(3) Si A est un anneau régulier, alors $A[X]$ et $A[[X]]$ sont réguliers.

(4) Soit $f : A \rightarrow B$ un morphisme plat d'anneaux locaux noethériens. Si B est régulier, alors A est régulier.

Preuve : Voir [Ma], th. 19.3, 19.5, 20.3 et [EGA] IV.17.3.3 pour le point (4). \square

1.4 Schémas vus comme foncteurs

1.4.1 Foncteur de points et lemme de Yoneda. Soit k un corps algébriquement clos et V un k -schéma de type fini réduit, par exemple, une variété de la géométrie algébrique classique. Il découle du Nullstellensatz de Hilbert que V est déterminé à isomorphisme près par l'ensemble $V(k)$ de ses k -points, que l'on peut voir comme l'ensemble $\text{Hom}_k(\text{Spec}(k), V)$. Si V n'est pas réduit, ceci n'est plus vrai : ainsi, il est clair qu'on ne peut pas distinguer les schémas $V_n = \text{Spec}(k[x]/(x^n))$ entre eux simplement à l'aide de leurs k -points. Mais on peut montrer que V est déterminé par les ensembles $V(A) = \text{Hom}_k(\text{Spec}(A), V)$ où A varie parmi les k -algèbres artiniennes locales (voir [EiHo]). Par exemple, on peut distinguer V_1 et V_2 en considérant l'ensemble $V(k[\epsilon]) = \text{Hom}_k(\text{Spec}(k[\epsilon]), V)$ où $k[\epsilon]$ est un raccourci pour $k[x]/(x^2)$, l'anneau des nombres duaux sur k . On verra plus tard que $V(k[\epsilon])$ est une définition naturelle en géométrie algébrique du fibré tangent de V , et c'est donc un objet de première importance. Enfin, si k n'est pas algébriquement clos, V est déterminé par les $V(A)$ où A varie parmi les anneaux artiniens locaux de corps résiduel une extension finie de k . On voit donc que pour étudier V , les morphismes $T \rightarrow V$, où T est choisi dans une classe de schémas affines (ou plus généralement de schémas quelconques) suffisamment grosse, sont extrêmement précieux. Ceci mène à introduire les concepts suivants.

1.4.2 Définition. Soit $X \rightarrow S$ un morphisme de schémas. Pour tout S -schéma T , on appelle *points de X à valeurs dans T* , ou *T -points de X* , les éléments de l'ensemble

$$h_X(T) \stackrel{\text{déf}}{=} \text{Hom}_S(T, X).$$

On utilise aussi la notation $X(T) = h_X(T)$. Si $T = \text{Spec}(A)$, on parle aussi de *points de X à valeurs dans A* ou de *A -points*, et on note simplement $h_X(A)$ ou $X(A)$.

Un morphisme de S -schémas $T \rightarrow T'$ donne lieu à une application $h_X(T') \rightarrow h_X(T)$, de sorte que h_X est un foncteur contravariant de la catégorie des S -schémas à valeurs dans la catégorie des ensembles. Un tel foncteur sera appelé un *S -foncteur*, et on notera $\text{Hom}((\text{Sch}/S)^\circ, \text{Ens})$, ou simplement $S\text{-Fonct}$, la catégorie des S -foncteurs (où $(\text{Sch}/S)^\circ$ désigne la catégorie opposée de la catégorie Sch/S). Il est facile de voir que les constructions précédentes donnent lieu à un foncteur

$$\begin{aligned} h : (\text{Sch}/S) &\longrightarrow \text{Hom}((\text{Sch}/S)^\circ, \text{Ens}) \\ X &\longmapsto h_X. \end{aligned}$$

Soit maintenant $F : (\text{Sch}/S)^\circ \rightarrow \text{Ens}$ un foncteur. On définit une application $u : F(X) \rightarrow \text{Hom}_{S\text{-Fonct}}(h_X, F)$ de la manière suivante. Soit a un élément de $F(X)$; pour tout S -schéma T , on définit une application $u_a(T) : h_X(T) \rightarrow F(T)$ en envoyant un S -morphisme

$f : T \rightarrow X$ sur l'image de a par $F(f) : F(X) \rightarrow F(T)$. Si $\tau : T' \rightarrow T$ est un morphisme, la définition de $u_a(\tau) : u_a(T) \rightarrow u_a(T')$ est celle que l'on pense. Ces applications donnent un foncteur $u_a : h_X \rightarrow F$, et ceci définit u .

1.4.3 Lemme de Yoneda. *Soit X un S -schéma et $F : (\text{Sch}/S)^\circ \rightarrow \text{Ens}$ un foncteur. Alors l'application*

$$u : F(X) \rightarrow \text{Hom}_{S\text{-Fonct}}(h_X, F)$$

définie ci-dessus est une bijection. En particulier, le foncteur h est pleinement fidèle.

Preuve : Pour la première partie de l'énoncé, nous nous contentons de laisser la lectrice vérifier que l'application $\text{Hom}_{S\text{-Fonct}}(h_X, F) \rightarrow F(X)$ qui à $\varphi : h_X \rightarrow F$ associe l'image de id_X par $\varphi(X) : \text{Hom}_S(X, X) \rightarrow F(X)$ est réciproque de u . (Dans ce cours, on suit inexorablement la règle de l'alternance des sexes des lecteurs.) Pour la seconde partie, il suffit de prendre $F = h_Y$ pour un S -schéma Y . On trouve que l'application canonique

$$\text{Hom}_{S\text{-Sch}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{S\text{-Fonct}}(h_X, h_Y)$$

est une bijection, ce qui est exactement la condition de pleine fidélité. \square

En particulier, si $h_X \simeq h_Y$ alors X est canoniquement isomorphe à Y comme S -schéma. Dit autrement, on ne perd pas d'information en remplaçant X par son foncteur de points h_X . Pour cette raison, on identifie souvent X et h_X , dans la terminologie comme dans la notation.

1.4.4 Remarques. (1) On étend la définition des T -points (définition 1.4.2) aux foncteurs de la manière évidente : pour un foncteur $F : (\text{Sch}/S)^\circ \rightarrow \text{Ens}$, un *point de F à valeurs dans T* , ou *T -point de F* , est un morphisme $T \rightarrow F$, ou encore, via le lemme de Yoneda, un élément de l'ensemble $F(T)$. Soient $\varphi : F \rightarrow G$ un morphisme de S -foncteurs, T un S -schéma, x un T -point de F . Si on voit x comme un objet de $F(T)$, son image est notée $\varphi(x) \in G(T)$, et si on le voit comme un morphisme $x : T \rightarrow F$, elle est notée $\varphi \circ x$.

(2) *Lemme de Yoneda général.* Plus généralement, pour toute catégorie C , on a un foncteur $h : C \rightarrow \text{Hom}(C^\circ, \text{Ens})$ défini par $h_X(T) = \text{Hom}_C(T, X)$. Pour tout objet X de C et tout foncteur $F : C^\circ \rightarrow \text{Ens}$, on a une bijection $u : F(X) \rightarrow \text{Hom}(h_X, F)$. Les preuves sont exactement les mêmes que ci-dessus.

(3) *Lemme de Yoneda dual.* En changeant C en la catégorie opposée C° dans les constructions précédentes, on trouve un foncteur $h' : C^\circ \rightarrow \text{Hom}(C, \text{Ens})$ tel que $h'_X(T) = \text{Hom}_C(X, T)$. Pour tout objet X de C et tout foncteur $F : C \rightarrow \text{Ens}$, on a une bijection $u' : F(X) \rightarrow \text{Hom}(h'_X, F)$. À cause du changement de variance lors du passage des schémas à leurs anneaux de fonctions, ce point de vue sera aussi utile.

(4) *Lemme de Yoneda abélien.* Supposons que C est une catégorie de modules sur un anneau, ou de faisceaux de groupes abéliens sur un espace topologique (ou plus généralement une *catégorie abélienne* quelconque). Alors les bifoncteurs $\text{Hom}_C : C \times C \rightarrow \text{Ens}$ se factorisent à travers la catégorie Ab des groupes abéliens. On obtient des foncteurs de Yoneda $h : C \rightarrow \text{Hom}(C^\circ, \text{Ab})$ et $h' : C^\circ \rightarrow \text{Hom}(C, \text{Ab})$. Dans les catégories de

foncteurs qui sont buts de h et h' , il y a une notion naturelle de suite exacte (en fait, ces catégories sont elles-mêmes des catégories abéliennes). Il est facile de montrer que si $\cdots \rightarrow h_P \rightarrow h_Q \rightarrow h_R \rightarrow \dots$ est une suite exacte dans $\text{Hom}(C^\circ, \text{Ab})$, alors la suite $\cdots \rightarrow P \rightarrow Q \rightarrow R \rightarrow \dots$ dans C obtenue par pleine fidélité est exacte (idem pour h'). Noter que bien sûr, l'inverse n'est pas vrai : les foncteurs $h_X = \text{Hom}_C(-, X)$ ne sont qu'exactes à gauche, et c'est ce qui donne naissance à leurs foncteurs dérivés $\text{Ext}_C^i(-, X)$, sous certaines conditions générales sur C . \square

Pour clore ces considérations et faire le lien avec les propos introductifs de 1.4.1, montrons qu'un schéma est déterminé par des points à valeurs dans des schémas *affines*. Notons Aff/S la catégorie des schémas affines munis d'un morphisme vers S , à ne pas confondre avec la catégorie des schémas affines sur S . Pour tout S -schéma X , notons k_X la restriction de h_X à Aff/S .

1.4.5 Lemme. *Le foncteur $k : (\text{Sch}/S) \longrightarrow \text{Hom}((\text{Aff}/S)^\circ, \text{Ens})$, $X \mapsto k_X$ est pleinement fidèle.*

Preuve : Pour toute paire de S -schémas X, Y , le foncteur k donne lieu à une application $\text{Hom}_{S\text{-Sch}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{S\text{-Fonct}}(k_X, k_Y)$. La seule difficulté est de construire l'application inverse. Soit $\varphi : k_X \rightarrow k_Y$ un foncteur. Soit $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert affine de X . Pour tout i , l'immersion ouverte $\alpha_i : U_i \hookrightarrow X$ a une image $f_i = \varphi(\alpha_i) : U_i \rightarrow Y$. Pour tous i, j et tout ouvert affine $U \subset U_i \cap U_j$, on a $\alpha_i|_U = \alpha_j|_U$ donc $f_i|_U = f_j|_U$. Il s'ensuit que les morphismes f_i se recollent le long de $U_i \cap U_j$, puis en un morphisme $f : X \rightarrow Y$. \square

1.4.6 Foncteurs représentables. Soit $F : (\text{Sch}/S)^\circ \rightarrow \text{Ens}$ un foncteur. On dit que F est *représentable* s'il est isomorphe à un foncteur de la forme h_X , pour un certain schéma X qui est alors déterminé à un unique isomorphisme près (et on dit qu'un foncteur $F : (\text{Sch}/S) \rightarrow \text{Ens}$ est *représentable* s'il est isomorphe à un foncteur de la forme h'_X). L'objet de ce paragraphe est principalement de montrer que les exemples de foncteurs représentables abondent.

1.4.7 Lemme. *Soit A un anneau. Alors le foncteur défini sur la catégorie des schémas par $F(T) = \text{Hom}_{\mathbb{Z}\text{-Alg}}(A, \Gamma(T, \mathcal{O}_T))$ est représentable par le schéma affine $\text{Spec}(A)$.*

Preuve : Il suffit de démontrer que l'application

$$\alpha : \text{Hom}_{\text{Sch}}(T, \text{Spec}(A)) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}\text{-Alg}}(A, \Gamma(T, \mathcal{O}_T))$$

qui associe à un morphisme de schémas le morphisme d'anneaux de fonctions globales correspondant induit une bijection fonctorielle en T . Construisons l'application réciproque β . Soit $\varphi : A \rightarrow \Gamma(T, \mathcal{O}_T)$ un morphisme d'anneaux. Pour tout ouvert affine $U = \text{Spec}(B) \subset T$, l'application de restriction des fonctions $\Gamma(T, \mathcal{O}_T) \rightarrow \Gamma(U, \mathcal{O}_U) = B$ induit par précomposition avec φ un morphisme d'algèbres $A \rightarrow B$ d'où un morphisme de schémas $f_U : U \rightarrow \text{Spec}(A)$. Si U, V sont deux ouverts affines de T , les propriétés de la

restriction des fonctions font que sur tout ouvert affine $W \subset U \cap V$ les restrictions de f_U et f_V coïncident. Il s'ensuit que f_U et f_V se recollent sur $U \cap V$ puis que les f_U se recollent en un morphisme $f : T \rightarrow \text{Spec}(A)$. On pose $\beta(\varphi) = f$.

Soit $\varphi : A \rightarrow \Gamma(T, \mathcal{O}_T)$ un morphisme d'anneaux et $f = \beta(\varphi)$. Par la propriété de faisceau de \mathcal{O}_T , une application $\psi : A \rightarrow \Gamma(T, \mathcal{O}_T)$ telle que $\text{res}_U \circ \psi = f_U^\sharp$ pour tout ouvert affine U est unique si elle existe. Comme $\alpha(f)$ et φ vérifient ces conditions, on a $\alpha(\beta(\varphi)) = \varphi$.

Soit $f : T \rightarrow \text{Spec}(A)$ un morphisme de schémas. Par construction $\beta(\alpha(f))$ et f coïncident sur tous les ouverts affines de T donc sont égaux. \square

1.4.8 Remarque. On peut « globaliser » le lemme précédent à l'aide de la notion de morphisme affine (voir [Ha], chap. II, ex. 5.17 ou [EGA] II, §§ 1.2-1.3). Si $h : X \rightarrow S$ est un morphisme de schémas, montrez en exercice que les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) il existe un recouvrement ouvert affine $\{V_i\}$ de S tel que chaque $h^{-1}(V_i)$ est affine,
- (ii) pour tout ouvert affine V de S , $h^{-1}(V)$ est affine.

Si ces conditions sont vérifiées, on dit que h est un *morphisme affine* ou que X est *affine sur* S . Si $h : X \rightarrow S$ est affine, le faisceau $\mathcal{A}(X) = h_*\mathcal{O}_X$ est une \mathcal{O}_S -algèbre quasi-cohérente et X est isomorphe au-dessus de S à son *spectre relatif*, que l'on note $\text{Spec}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{A}(X))$, obtenu en recollant les $\text{Spec}(\mathcal{A}(U))$ pour des ouverts variables $U \subset S$. L'énoncé 1.4.7 se généralise au cas où l'on remplace le schéma affine $\text{Spec}(A)$ par un schéma X affine sur S : pour tout S -schéma T , on a une bijection fonctorielle

$$\text{Hom}_{S\text{-Sch}}(T, X) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}_S\text{-Alg}}(\mathcal{A}(X), \mathcal{A}(T)).$$

La preuve se fait en recouvrant S par des ouverts affines $\text{Spec}(A_i)$ et en appliquant le résultat du lemme 1.4.7 à leurs préimages dans X , qui sont des schémas affines par hypothèse.

1.4.9 Exercice. (1) Si S est un schéma, les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) tout morphisme $\text{Spec}(A) \rightarrow S$ depuis un schéma affine est affine,
- (ii) la diagonale $\Delta : S \rightarrow S \times S$ est un morphisme affine.

En particulier, si S est séparé, tout morphisme $\text{Spec}(A) \rightarrow S$ est affine.

(2) Si $U = \mathbb{A}_k^n = \text{Spec}(k[x_1, \dots, x_n])$ est l'espace affine sur un corps k , on note $U_0 = U \setminus V(x_1, \dots, x_n)$ le complémentaire de l'origine. Soit S l'espace affine de dimension n avec origine dédoublée, obtenu en recollant deux copies U, V de l'espace affine le long des ouverts U_0, V_0 complémentaires de l'origine. Si $n \geq 2$, montrez que U_0 n'est pas affine (indice : l'application de restriction $\Gamma(U, \mathcal{O}_U) \rightarrow \Gamma(U_0, \mathcal{O}_{U_0})$ est un isomorphisme) et que l'immersion ouverte $U \rightarrow S$ n'est pas un morphisme affine. Si $n = 1$, montrez que U_0 est affine et que l'immersion ouverte $U \rightarrow S$ est un morphisme affine.

1.4.10 Exemples. Le schéma de base S est fixé.

(1) Soit le foncteur sur Sch/S défini par $F(T) = \Gamma(T, \mathcal{O}_T)$. Si $S = \text{Spec}(R)$ est affine, on a

$$F(T) = \text{Hom}_{R\text{-Alg}}(R[X], \Gamma(T, \mathcal{O}_T)) = \text{Hom}_{R\text{-Sch}}(T, \text{Spec}(R[X])) = \mathbb{A}_S^1(T)$$

de sorte que F est représentable par $\mathbb{A}_S^1 = \mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^1 \times S$, la droite affine sur S . Le résultat est vrai aussi pour S quelconque. Ceci montre que les éléments de $\Gamma(T, \mathcal{O}_T)$, qu'on appelle *fonctions sur T* , peuvent aussi être vus comme des morphismes $T \rightarrow \mathbb{A}^1$, c'est-à-dire des fonctions en un sens plus usuel.

(2) Soit $n \geq 1$ un entier, alors le foncteur des racines n -ièmes de l'unité, défini par $F(T) = \{z \in \Gamma(T, \mathcal{O}_T), z^n = 1\}$ est représentable par le schéma $\mu_{n,S} = \text{Spec}(\mathbb{Z}[X]/(X^n - 1)) \times S$. C'est un sous-schéma fermé du précédent.

(3) Soient n, d deux entiers et F le foncteur des hypersurfaces de degré d dans \mathbb{P}_T^n . Plus précisément, $F(T)$ est l'ensemble des sous-schémas fermés $H \subset \mathbb{P}_T^n$ tels que $H \rightarrow T$ est plat et pour tout point $t \in T(k)$ à valeurs dans un corps algébriquement clos k , la fibre H_t est une hypersurface de degré d dans \mathbb{P}_t^n . (La notion de platitude sera étudiée en détail plus loin.) On peut montrer que localement sur T , un tel H est décrit dans \mathbb{P}_T^n par une équation de degré d en les coordonnées x_0, \dots, x_n . Ainsi F est représentable par l'espace projectif des polynômes de degré d en $n + 1$ variables. Il est de dimension $\binom{n+d}{d} - 1$.

Nous allons maintenant donner un exemple de foncteur représentable qui sera important lorsque nous étudierons les fibrés vectoriels. Dans ce qui suit, si $h : T \rightarrow S$ est un morphisme de schémas et \mathcal{F} est un \mathcal{O}_S -module quasi-cohérent, on note \mathcal{F}_T le \mathcal{O}_T -module préimage $h^*\mathcal{F}$ et $(\mathcal{F}_T)^\vee = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_T}(\mathcal{F}_T, \mathcal{O}_T)$ le module dual.

1.4.11 Remarque. Il existe un morphisme canonique $\chi : (\mathcal{F}^\vee)_T \rightarrow (\mathcal{F}_T)^\vee$, comme rappelé en 1.2.4(5). Pour le décrire précisément, on part du morphisme de \mathcal{O}_S -modules

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_S) \longrightarrow h_*\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_T}(h^*\mathcal{F}, \mathcal{O}_T)$$

obtenu en associant à tout morphisme de faisceaux son image inverse par h . Le morphisme χ s'en déduit par adjonction, voir 1.2.4(1). Dans certains cas, c'est un isomorphisme : par exemple si \mathcal{F} est localement libre (vérification facile), ou si \mathcal{F} est de présentation finie et $T \rightarrow S$ est plat (voir proposition 2.3.19). Mais *il faut prendre garde au fait qu'en général χ n'est ni injectif ni surjectif*, ce qui est très important dans la définition du foncteur F dans 1.4.12 ci-dessous. Prenons comme exemple une immersion fermée stricte $h : T \hookrightarrow S$. Si S est intègre, \mathcal{G} est un \mathcal{O}_T -module localement libre non nul et $\mathcal{F} = h_*\mathcal{G}$, on a $\mathcal{F}_T = \mathcal{G}$ donc $(\mathcal{F}_T)^\vee \neq 0$, mais on vérifie que $\mathcal{F}^\vee = 0$. Si $S = \text{Spec}(k[x, y]/(xy))$, $T = \text{Spec}(k[y]) = V(x)$ et $\mathcal{F} = \mathcal{I}_T = (x)$ est le faisceau d'idéaux de T , alors le morphisme d'inclusion $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{O}_S$ définit un élément non nul de $(\mathcal{F}^\vee)_T$ dont l'image dans $(\mathcal{F}_T)^\vee$ est nulle.

1.4.12 Proposition. Soient S un schéma et \mathcal{F} un \mathcal{O}_S -module quasi-cohérent. Alors le foncteur défini par $F(T) = \Gamma(T, (\mathcal{F}_T)^\vee)$ est représentable par le S -schéma

$$\mathbb{V}(\mathcal{F}) \stackrel{\text{déf}}{=} \text{Spec}_{\mathcal{O}_S}(\text{Sym}(\mathcal{F})).$$

On rappelle que l'*algèbre symétrique* $\text{Sym}(\mathcal{F})$ d'un \mathcal{O}_S -module \mathcal{F} est la \mathcal{O}_S -algèbre vérifiant la propriété universelle suivante : il existe un isomorphisme

$$\text{Hom}_{\mathcal{O}_S\text{-Mod}}(\mathcal{F}, \mathcal{A}) = \text{Hom}_{\mathcal{O}_S\text{-Alg}}(\text{Sym}(\mathcal{F}), \mathcal{A})$$

canonique et fonctoriel en la \mathcal{O}_S -algèbre \mathcal{A} , voir [EGA] II.1.7 ou [Ha], chap. II, ex. 5.16.

Preuve : On a, fonctoriellement en $h : T \rightarrow S$:

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{S\text{-Sch}}(T, \mathbb{V}(\mathcal{F})) &= \text{Hom}_{\mathcal{O}_S\text{-Alg}}(\text{Sym}(\mathcal{F}), h_*\mathcal{O}_T) \text{ par 1.4.7 et 1.4.8,} \\ &= \text{Hom}_{\mathcal{O}_S\text{-Mod}}(\mathcal{F}, h_*\mathcal{O}_T) \text{ par propriété de l'algèbre symétrique,} \\ &= \text{Hom}_{\mathcal{O}_T\text{-Mod}}(h^*\mathcal{F}, \mathcal{O}_T) \text{ par adjonction, voir 1.2.4,} \\ &= \Gamma(T, (\mathcal{F}_T)^\vee), \end{aligned}$$

d'où le résultat. □

1.4.13 Remarque. Pour tout S -schéma T , l'ensemble $\mathbb{V}(\mathcal{F})(T) = F(T) = \Gamma(T, (\mathcal{F}_T)^\vee)$ est un module sur l'anneau $\Gamma(T, \mathcal{O}_T)$, et ceci fonctoriellement en T en un sens évident. Nous verrons plus loin que le faisceau \mathcal{F} est déterminé par $\mathbb{V}(\mathcal{F})$ *muni de cette structure de module* (voir proposition 5.2.4).

Nous terminons en mentionnant les produits fibrés. Étant donnés des morphismes de foncteurs $F \rightarrow G$ et $H \rightarrow G$, le *produit fibré de F et G au-dessus de H* noté $F \times_H G$ est par définition le foncteur $T \mapsto F(T) \times_{H(T)} G(T)$. Nous avons déjà utilisé, plus ou moins implicitement, le résultat qui suit. Il est fondamental et illustre parfaitement la notion de foncteur représentable.

1.4.14 Proposition. *Soient $X \rightarrow S$ et $Y \rightarrow S$ des morphismes de schémas. Alors, le foncteur $F = h_X \times_{h_S} h_Y$, noté $X \times_S Y$ par l'abus habituel, est représentable.*

Preuve : Lorsque $S = \text{Spec}(A)$, $X = \text{Spec}(B)$ et $Y = \text{Spec}(C)$, on a

$$X(T) \times Y(T) = \text{Hom}_A(B, \Gamma(T, \mathcal{O}_T)) \times \text{Hom}_A(C, \Gamma(T, \mathcal{O}_T)) = \text{Hom}_A(B \otimes_A C, \Gamma(T, \mathcal{O}_T))$$

donc F est représentable par $\text{Spec}(B \otimes_A C)$. C'est le cas le plus important à connaître. Le cas général s'y ramène en recouvrant S, X, Y par des ouverts affines. La preuve n'est pas difficile mais un peu pénible, et on y voit plus clair si on formalise un peu le procédé. Ceci est fait dans l'exercice suivant. □

1.4.15 Exercice. On note X au lieu de h_X . Ainsi, on note $X \times_S Y$ le foncteur produit fibré de X et Y au-dessus de S , sans préjuger de sa représentabilité. On dit qu'un foncteur F est un *faisceau pour la topologie de Zariski* si pour tout schéma M et tout recouvrement ouvert $(M_i)_{i \in I}$, une collection d'éléments $x_i \in F(M_i)$ tels que x_i et x_j ont même image dans $F(M_i \cap M_j)$ provient d'un unique élément $x \in F(M)$. (On peut se limiter aux M affines et aux M_i affines distingués. Voir aussi 1.2.1 et 2.4.)

(1) Montrer que le foncteur $F = X \times_S Y$ est un faisceau pour la topologie de Zariski.

On dit qu'un morphisme $F \rightarrow G$ est une *immersion ouverte* si et seulement si pour tout S -schéma X et tout morphisme $X \rightarrow G$, le foncteur $F \times_G X$ est représentable et le morphisme $F \times_G X \rightarrow X$ est une immersion ouverte (voir 3.2.1).

(2) Soit $S' \subset S$ un ouvert et $X' \subset X, Y' \subset Y$ ses préimages. Montrer que le morphisme naturel $X' \times_{S'} Y' \rightarrow X \times_S Y$ est une immersion ouverte. En déduire que par recollement (voir 1.1.1), il suffit de prouver la représentabilité de $X \times_S Y$ lorsque S est affine.

(3) Soit X' un ouvert de X . Montrer que le morphisme naturel $X' \times_S Y \rightarrow X \times_S Y$ est une immersion ouverte. En déduire qu'il suffit de prouver la représentabilité de $X \times_S Y$ lorsque X , puis Y , est affine.

1.4.16 Remarques. (1) Si S est le spectre d'un corps k , la définition du produit fibré dit que $(X \times_k Y)(k) = X(k) \times Y(k)$.

(2) Notons $|X|$ l'espace topologique sous-jacent à X . L'application $|X \times_S Y| \rightarrow |X| \times_{|S|} |Y|$ est loin d'être injective en général ; par exemple, le lecteur pourra vérifier que $\text{Spec}(\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) = \text{Spec}(\mathbb{C}) \amalg \text{Spec}(\mathbb{C})$. Cependant, elle est toujours surjective. En effet, soient $x \in |X|$ et $y \in |Y|$ des points de même image $s \in |S|$. Soit ℓ une extension commune des corps résiduels $k(x)$ et $k(y)$, tous deux extensions de $k(s)$. Par définition du produit fibré, l'élément de $X(\ell) \times Y(\ell)$ déterminé par x et y détermine un ℓ -point de $X \times_S Y$ qui se projette sur x et y .

1.4.17 Remarque. Pour tout morphisme de schémas $f : X \rightarrow S$ et tout point $s \in S$, on définit la *fibre de f en s* , notée $f^{-1}(s)$ ou X_s , comme étant le schéma produit fibré $X \times_S \text{Spec}(k(s))$. Si $x \in X_s$, alors son image dans X s'envoie sur s par f . Pour comparer les anneaux locaux $\mathcal{O}_{X,x}$ et $\mathcal{O}_{X_s,x}$, considérons les morphismes canoniques $\text{Spec}(k(s)) \rightarrow \text{Spec}(\mathcal{O}_{S,s}) \rightarrow S$ et les produits fibrés ainsi construits :

$$\begin{array}{ccccc} X_s & \longrightarrow & \tilde{X}_s & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \text{Spec}(k(s)) & \longrightarrow & \text{Spec}(\mathcal{O}_{S,s}) & \longrightarrow & S. \end{array}$$

Le point x peut être vu comme un point des trois schémas de la ligne supérieure. Montrons que :

- (1) $\mathcal{O}_{\tilde{X}_s,x} = \mathcal{O}_{X,x}$,
- (2) $\mathcal{O}_{X_s,x} = \mathcal{O}_{X,x}/m_s \mathcal{O}_{X,x} = \mathcal{O}_{X,x} \otimes k(s)$,
- (3) les corps résiduels de x dans X, \tilde{X}_s, X_s sont les mêmes.

Par définition de \tilde{X}_s comme produit fibré, les morphismes canoniques $\text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}) \rightarrow \text{Spec}(\mathcal{O}_{S,s})$ et $\text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}) \rightarrow X$ induisent un morphisme $\text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}) \rightarrow \tilde{X}_s$. On dispose donc de morphismes $\mathcal{O}_{X,x} \rightarrow \mathcal{O}_{\tilde{X}_s,x} \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$, qui sont alors des isomorphismes, d'où (1). Comme $\text{Spec}(k(s))$ est le fermé de $\text{Spec}(\mathcal{O}_{S,s})$ défini par l'idéal m_s , on en déduit le point (2). Enfin, le corps résiduel de x dans les trois schémas est le corps résiduel commun aux anneaux locaux $\mathcal{O}_{\tilde{X}_s,x} = \mathcal{O}_{X,x}$ et $\mathcal{O}_{X_s,x}$.

1.4.18 Remarque. Soit X un S -schéma. Alors, tout morphisme de S -schémas $X \rightarrow S'$ permet de voir X comme un S' -schéma, et ce S' -schéma détermine bien sûr X comme S -schéma. Ceci reste vrai pour les foncteurs, et il n'est pas inutile d'écrire proprement pourquoi, car cela nous sera utile plus tard (proposition 5.4.2). Notons d'abord que la donnée d'un S -foncteur F est équivalente à la donnée d'un morphisme $\sigma : F \rightarrow S$ appelé *morphisme de structure* (pour tout S -schéma T et $x \in F(T)$, l'image $\sigma(x) = \sigma \circ x \in S(T)$ est le morphisme de structure $T \rightarrow S$). Donnons-nous en plus un S -schéma S' . À tout S -morphisme $\sigma' : F \rightarrow S'$, on associe le S' -foncteur $F' = \text{Hom}_{S'}(-, F)$. Précisément, pour tout S' -schéma $u : T \rightarrow S'$ on a :

$$F'(T) \stackrel{\text{déf}}{=} \text{Hom}_{S'}(T, F) = \{f : T \rightarrow F, \sigma' \circ f = u\}.$$

The diagram shows a triangle with vertices T (top-left), F (top-right), and S' (bottom). Arrows are: $T \xrightarrow{f} F$ (top), $T \xrightarrow{u} S'$ (left), $F \xrightarrow{\sigma'} S'$ (diagonal down-left), and $F \xrightarrow{\sigma} S$ (right). Note that the arrow from F to S is labeled σ , not σ' .

Réciproquement, on retrouve F à partir de F' en notant que, pour tout S -schéma T , on a :

$$F(T) = \{(u, f), u : T \rightarrow S', f \in F'(T)\}.$$

En pratique, comme dans le cas des schémas, on note simplement F pour désigner le S' -foncteur F' , mais il faut savoir ce que cet abus signifie.

2 Morphismes fidèlement plats de présentation finie

2.1 Morphismes localement de présentation finie

De nombreuses propriétés des schémas de type fini sur un schéma de base S ne peuvent être établies que lorsque S est localement noethérien, grâce aux bonnes propriétés algébriques et géométriques des anneaux locaux noethériens (résumées dans 1.3). Il en va ainsi des propriétés topologiques (composantes connexes, irréductibles) mais aussi des propriétés « différentielles » que nous étudierons plus loin dans le cours.

Dans le cadre relatif, on ne fait pas d'hypothèse sur S et il est souhaitable d'isoler une classe de morphismes qui se comporte comme les morphismes de type fini sur S localement noethérien. La notion de morphisme de présentation finie répond à cette question. En fait, si $f : X \rightarrow S$ est de type fini et S localement noethérien, alors pour toute paire d'ouverts affines $U \subset X$ et $V \subset S$ telle que $f(U) \subset V$, l'extension d'anneaux correspondant au morphisme $U \rightarrow V$ est non seulement de type fini mais également de présentation finie (ceci est une propriété locale sur X et sur S , comme le lemme 2.1.3 ci-dessous démontre). Par ailleurs, f est quasi-compact et il n'est pas difficile de voir que la diagonale $\Delta : X \rightarrow X \times_S X$ l'est aussi (ce sont cette fois des propriétés globales). Ces deux observations sont un guide pour les définitions qui suivent et celles de 2.2.

2.1.1 Définition. Soit $f : X \rightarrow S$ un morphisme de schémas et $x \in X$ un point. On dit que f est *localement de présentation finie en x* s'il existe un voisinage ouvert affine $U = \text{Spec}(A)$ de x dans X et un voisinage ouvert affine $V = \text{Spec}(R)$ de $f(x)$ dans S tels que $f(U) \subset V$ et A est une R -algèbre de présentation finie. On dit que f est *localement de présentation finie* s'il l'est en tout point.

2.1.2 Proposition. *Une immersion ouverte est localement de présentation finie. Le composé de deux morphismes localement de présentation finie l'est encore. Un morphisme obtenu par changement de base d'un morphisme localement de présentation finie l'est encore. Le produit de deux morphismes localement de présentation finie l'est aussi. Si le composé $g \circ f$ de deux morphismes est localement de présentation finie et si g est localement de type fini, alors f est localement de présentation finie.*

L'avant-dernière assertion signifie que si $f : X \rightarrow X'$ et $g : Y \rightarrow Y'$ sont deux morphismes localement de présentation finie de S -schémas, alors $f \times_S g : X \times_S Y \rightarrow X' \times_S Y'$ est localement de présentation finie.

Preuve : Ce sont des vérifications sans grande difficulté. Pour la composition, on notera que si B est une A -algèbre de présentation finie et C est une B -algèbre de présentation finie, alors C est une A -algèbre de présentation finie. \square

2.1.3 Lemme. *Un morphisme entre schémas affines $f : \text{Spec}(A) \rightarrow \text{Spec}(R)$ est localement de présentation finie si et seulement si A est une R -algèbre de présentation finie.*

Dans la preuve, nous utiliserons librement le fait suivant : si B est une A -algèbre de présentation finie, alors pour toute A -algèbre de type fini B' et tout morphisme surjectif $u : B' \rightarrow B$, le noyau $\ker(u)$ est un idéal de type fini. Ceci est classique mais pas tout à fait évident ; on le déduit immédiatement du cas d'une A -algèbre de polynômes $B' = A[X_1, \dots, X_n]$ qui est [EGA] IV, proposition 1.4.4.

Preuve : Notons $X = \text{Spec}(A)$. Seule la condition nécessaire mérite une démonstration.

(1) Supposons d'abord que tout point $x \in X$ possède un voisinage ouvert distingué $U = D(a)$ tel que $A[1/a]$ est R -algèbre de présentation finie ; ce cas recouvre celui où f est une immersion ouverte. Comme X est quasi-compact, il est recouvert par un nombre fini p de tels ouverts $U_i = D(a_i)$. Fixons une partition de l'unité $y_1 a_1 + \dots + y_p a_p = 1$ pour les a_i (voir l'exercice 2.1.4 pour un rappel). Pour chaque i , comme $A[1/a_i]$ est R -algèbre de type fini, on peut trouver des éléments $t_{i,1}, \dots, t_{i,q} \in A$ qui avec $1/a_i$ l'engendrent. Quitte à augmenter le nombre q de générateurs, on peut supposer qu'il ne dépend pas de i . Considérons l'algèbre C , quotient de l'anneau de polynômes $R[T_{1,1}, \dots, T_{p,q}; A_1, \dots, A_p; Y_1, \dots, Y_p]$ par la relation $Y_1 A_1 + \dots + Y_p A_p = 1$. Observons que pour tout entier $\lambda \geq 1$, en élevant cette relation à la puissance $p(\lambda - 1) + 1$ on obtient une partition de l'unité $Y_{1,\lambda} (A_1)^\lambda + \dots + Y_{p,\lambda} (A_p)^\lambda = 1$ pour les $(A_i)^\lambda$ avec $Y_{i,\lambda} \in C$. Soit $\varphi : C \rightarrow A$ le morphisme de R -algèbres qui envoie chaque indéterminée (une lettre majuscule) sur l'élément de A correspondant (une lettre minuscule). Pour chaque i , l'extension naturelle $\varphi_i : C[1/A_i] \rightarrow A[1/a_i]$ est un morphisme surjectif. Comme $A[1/a_i]$ est R -algèbre de présentation finie, le noyau de φ_i peut être engendré par un nombre fini r (indépendant de i) d'éléments $P_{i,1}, \dots, P_{i,r}$. Quitte à remplacer $P_{i,j}$ par $(A_i)^n P_{i,j}$ avec n assez grand pour que $(A_i)^n P_{i,j}$ soit sans pôle en A_i et appartienne à $\ker(\varphi)$, on peut supposer que $P_{i,j} \in \ker(\varphi)$. Pour conclure, il suffit de montrer que $\ker(\varphi) = (P_{1,1}, \dots, P_{p,r})$. Or si $Q \in \ker(\varphi)$, on peut trouver un λ indépendant de i et des expressions $(A_i)^\lambda Q = Z_{i,1} P_{i,1} + \dots + Z_{i,r} P_{i,r}$ avec $Z_{i,r} \in C$. Ainsi $Q = \sum_i Y_{i,\lambda} (A_i)^\lambda Q = \sum_{i,j} Y_{i,\lambda} Z_{i,j} P_{i,j}$.

(2) Montrons maintenant que tout point $x \in X$ possède en effet un voisinage ouvert distingué $U = D(a)$ tel que $A[1/a]$ est R -algèbre de présentation finie. Par hypothèse x est dans un ouvert affine $U_1 = \text{Spec}(A_1)$ et son image $f(x)$ est dans un ouvert affine $V_1 = \text{Spec}(R_1)$ tels que $f(U_1) \subset V_1$ et $R_1 \rightarrow A_1$ est de présentation finie. Soit $U = D(a)$ un voisinage ouvert distingué de x inclus dans U_1 . Comme le point (1) s'applique aux immersions ouvertes, les morphismes $R \rightarrow R_1$ et $A_1 \rightarrow A[1/a]$ sont de présentation finie, donc la composée $R \rightarrow R_1 \rightarrow A_1 \rightarrow A[1/a]$ est de présentation finie. \square

2.1.4 Exercice. Soient a_1, \dots, a_n des éléments d'un anneau A . On appelle *partition de l'unité* pour les a_i une écriture $y_1 a_1 + \dots + y_n a_n = 1$ avec $y_1, \dots, y_n \in A$. Soit $\lambda \geq 1$ un entier. Montrez que les conditions suivantes sont équivalentes :

- (1) les ouverts $D(a_1), \dots, D(a_n)$ recouvrent $\text{Spec}(A)$,
- (2) il existe une partition de l'unité pour les a_i ,
- (3) il existe une partition de l'unité pour les $(a_i)^\lambda$.

2.1.5 Caractérisation en termes de foncteurs de points. Nous verrons dans la preuve du théorème 2.2.4 que la possibilité d'écrire tout anneau comme limite inductive filtrante de ses sous- \mathbb{Z} -algèbres de type fini est cruciale pour les schémas de présentation finie. Nous allons montrer que les schémas localement de présentation finie possèdent une propriété remarquable vis-à-vis des limites inductives filtrantes en général, qui les caractérise et s'exprime en termes de leur foncteur de points.

2.1.6 Rappels sur les limites inductives filtrantes. Nous aurons besoin de quelques rappels. Considérons un *préordre*, c'est-à-dire une relation réflexive et transitive, sur un ensemble I . Un *système inductif d'algèbres* (sur un anneau fixé) indicé par I est la donnée d'une famille d'algèbres $(A_i)_{i \in I}$ et de morphismes d'algèbres $(\nu_{ij} : A_i \rightarrow A_j)_{i \leq j}$ tels que $\nu_{ii} = \text{id}$ pour tout i , et $\nu_{jk} \circ \nu_{ij} = \nu_{ik}$ pour $i \leq j \leq k$. Un préordre sur I est dit *filtrant* lorsque toute paire d'éléments x, y de I admet un majorant. Un système inductif indicé par I est alors dit lui-même *filtrant*.

Tout système inductif filtrant d'algèbres possède une *limite* $A = \varinjlim A_i$. L'ensemble sous-jacent à A est le quotient de la réunion disjointe $\coprod A_i$ par la relation d'équivalence définie ainsi : si $a_i \in A_i$ et $a_j \in A_j$, on dit que $a_i \sim a_j$ s'il existe $k \geq i, j$ tel que $\nu_{ik}(a_i) = \nu_{jk}(a_j)$. Pour chaque i , il y a un morphisme $\nu_i : A_i \rightarrow A$ qui envoie a_i sur sa classe d'équivalence. Chaque $a \in A$ est la classe d'un a_i pour un certain i ; on dira souvent par abus que a est dans A_i . Chaque égalité $a = a'$ dans A est image d'une égalité $a_i = a'_i$ dans un certain A_i ; on dira souvent par abus que l'égalité $a = a'$ a lieu dans A_i . Même si les morphismes ν_{ij} et ν_i ne sont pas des injections, ces abus seront inoffensifs. Pour additionner ou multiplier deux éléments de A , classe de $a_i \in A_i$ et de $a_j \in A_j$, on additionne ou multiplie leurs images dans un A_k avec $k \geq i, j$.

Dans l'énoncé suivant, on dit que A est une *S-algèbre* pour dire que $\text{Spec}(A)$ est un S -schéma.

2.1.7 Théorème. Soit $X \rightarrow S$ un morphisme de schémas. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

- (1) X est localement de présentation finie sur S ,
- (2) pour tout système inductif filtrant de S -algèbres $(A_i)_{i \in I}$, l'application canonique

$$\varinjlim X(A_i) \longrightarrow X(\varinjlim A_i)$$

est bijective.

Pour désigner la condition (2), on dit aussi que X commute aux limites inductives filtrantes. Le reste de cette sous-section est consacré à la démonstration du théorème. La voici dans le cas où S et X sont affines.

2.1.8 Lemme. Soit B un anneau et C une B -algèbre. Alors C est de présentation finie si et seulement si pour tout système inductif filtrant de B -algèbres $(A_i)_{i \in I}$, l'application canonique

$$\varinjlim \text{Hom}_B(C, A_i) \longrightarrow \text{Hom}_B(C, \varinjlim A_i)$$

est bijective.

Preuve : Pour montrer que la condition est nécessaire, fixons une présentation

$$C = B[T_1, \dots, T_n]/(P_1, \dots, P_m)$$

et notons $t_u \in C$ l'image de T_u pour $1 \leq u \leq n$. Soit $(A_i)_{i \in I}$ un système inductif filtrant et A sa limite.

Montrons l'injectivité. Soient deux éléments de $\varinjlim \text{Hom}_B(C, A_i)$, représentés comme les classes de deux morphismes $\theta_i : C \rightarrow A_i$ et $\theta'_j : C \rightarrow A_j$, dont les composées $\theta = \nu_i \circ \theta_i$ et $\theta' = \nu_j \circ \theta_j$ sont égales. On peut remplacer i et j par $\max(i, j)$ et donc supposer que $i = j$. Alors pour chaque u l'égalité $\theta(t_u) = \theta'(t_u)$ a lieu dans un certain $A_{k(u)}$, et comme I est filtrant, on peut supposer que $k = k(u)$ est indépendant de u . Pour cet indice k , on a $\theta_k(t_u) = \theta'_k(t_u)$ pour tout u . Donc $\theta_k = \theta'_k$ et ils définissent alors les mêmes classes dans $\varinjlim \text{Hom}_B(C, A_i)$.

Montrons la surjectivité. Soit $\theta : C \rightarrow A$ un morphisme et notons $a_u = \theta(t_u)$. Alors il existe un indice i , que l'on peut supposer indépendant de u , tel que les a_u sont tous dans A_i . Les égalités $P_v(t_1, \dots, t_n) = 0$ donnent des égalités $P_v(a_1, \dots, a_n) = 0$ dans A , qui sont donc des égalités dans un certain A_j avec $j \geq i$. Il s'ensuit qu'il existe un morphisme de B -algèbres $\theta_j : C \rightarrow A_j$ uniquement déterminé par $\theta_j(t_u) = a_u$ pour tout u . Il est clair que θ est l'image de θ_j .

Pour montrer que la condition est suffisante, écrivons d'abord C comme limite inductive filtrante de ses sous- B -algèbres de type fini A_i . (Le fait que C puisse s'écrire ainsi est clair, car les applications du système inductif en question sont toutes des inclusions.) Appliquons l'hypothèse avec cette écriture $C = \varinjlim A_i$. On trouve que l'identité de C se factorise en $C \rightarrow A_i \rightarrow C$ pour un certain i , ce qui signifie que $C = A_i$ et donc C

est de type fini. Posons $C = B[T_1, \dots, T_n]/M$ et écrivons M comme limite inductive filtrante de ses sous-idéaux de type fini M_i . (Le fait que ceci soit possible est aussi clair que précédemment.) Notons $A_i = B[T_1, \dots, T_n]/M_i$ et

$$B[T_1, \dots, T_n] \begin{array}{c} \xrightarrow{q_i} \\ \xrightarrow{p_i} \end{array} A_i \xrightarrow{p_i} C$$

r

les projections canoniques. Il est facile de voir que les algèbres A_i et les projections canoniques $A_i \rightarrow A_j$ forment un système inductif filtrant dont C est la limite. Appliquons l'hypothèse à ce système, on trouve que l'identité de C se factorise en $p_i \circ \varphi$ via un certain morphisme $\varphi : C \rightarrow A_i$. On voit alors que pour tout u tel que $1 \leq u \leq n$, les images de $(\varphi \circ r)(T_u)$ et $q_i(T_u)$ par p_i sont égales. Il s'ensuit que $(\varphi \circ r)(T_u) - q_i(T_u)$ appartient à M/M_i , donc à un sous-quotient M_j/M_i pour un certain $j \geq i$. Pour simplifier notons encore φ le composé $C \rightarrow A_i \rightarrow A_j$, on a donc $(\varphi \circ r)(T_u) = q_j(T_u)$ dans A_j , pour tout u . Ceci prouve que $\varphi \circ r = q_j$. Alors $M = \ker(r) \subset \ker(q_j) = M_j$ et $C = A_j$. \square

Dans le cas où X et S sont quelconques, la preuve des deux implications du théorème utilise des techniques assez similaires. Nous montrerons uniquement que (2) implique (1), ce qui est le sens le plus intéressant pour nous. L'assertion à démontrer est locale sur S donc on peut supposer $S = \text{Spec}(B)$ affine. Il suffit de montrer que tout ouvert affine $V \subset X$ est de présentation finie sur S . D'après le lemme 2.1.8, il suffit de montrer que pour tout système inductif filtrant de S -algèbres $(A_i)_{i \in I}$, l'application canonique

$$\varinjlim V(A_i) \longrightarrow V(\varinjlim A_i)$$

est bijective. Notons $A = \varinjlim A_i$, $Z_i = \text{Spec}(A_i)$, $Z = \text{Spec}(A)$, $u_i : Z \rightarrow Z_i$. Nous utiliserons le lemme facile suivant.

2.1.9 Lemme. *Les Z_i forment un système projectif de S -schémas et Z en est une limite projective dans la catégorie des S -schémas. De plus, toute famille de sous-schémas fermés $F_i \subset Z_i$ telle que $(F_i)_{i \in I} \rightarrow (Z_i)_{i \in I}$ forme un morphisme de systèmes projectifs filtrants possède une limite projective qui est le sous-schéma fermé $F \subset Z$ d'idéal égal à la limite inductive des idéaux des F_i .*

Preuve : D'après le lemme 1.4.7, pour tout S -schéma T , on a :

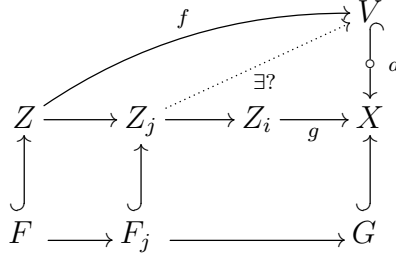
$$\text{Hom}_S(T, Z) = \text{Hom}_B(A, \Gamma(T, \mathcal{O}_T)) = \varprojlim \text{Hom}_B(A_i, \Gamma(T, \mathcal{O}_T)) = \varprojlim \text{Hom}_S(T, Z_i)$$

ce qui prouve la première assertion. Pour démontrer la seconde, notons $M_i \subset A_i$ l'idéal de F_i dans Z_i . D'après la première partie, le système des F_i admet pour limite projective le spectre de l'algèbre limite inductive des A_i/M_i . Or il est facile de voir que le morphisme $A = \varinjlim A_i \rightarrow \varinjlim A_i/M_i$ est surjectif de noyau $M = \varinjlim M_i$, donc la limite projective des F_i est bien le sous-schéma fermé de Z annoncé. \square

Montrons l'injectivité. Soient deux éléments de $\varinjlim V(A_i)$ représentés par les classes de deux morphismes $f_i, f'_i : Z_i \rightarrow V$ (on peut les choisir définis sur le même Z_i), dont

les composées $f, f' : Z \rightarrow V$ sont égales. Alors on a $a \circ f = a \circ f'$ où $a : V \rightarrow X$ est le morphisme d'immersion. On en déduit par hypothèse que $a \circ f_i = a \circ f'_i$ pour un certain i , puis $f_i = f'_i$ puisque toute immersion est un monomorphisme.

Montrons la surjectivité. Soit $f : Z \rightarrow V$ un morphisme. Comme par hypothèse X commute aux limites inductives, il existe un indice i et un morphisme $g : Z_i \rightarrow X$ tel que $a \circ f = g \circ u_i$. Nous allons montrer qu'il existe $j \geq i$ tel que $Z_j \rightarrow Z_i \rightarrow X$ se factorise par V . Notons $G \subset X$ un sous-schéma fermé de complémentaire V . Pour chaque $j \geq i$, soit F_j la préimage de G dans Z_j et F la limite projective des F_j , qui est un sous-schéma fermé de Z d'après le lemme 2.1.9. La situation est la suivante :



où \hookrightarrow désigne une immersion fermée et \hookrightarrow désigne une immersion ouverte. La commutativité du diagramme montre que le morphisme $F \rightarrow X$ se factorise à la fois par V (partie supérieure du diagramme) et par G (partie inférieure). Comme $V \cap G = \emptyset$, il s'ensuit que F est vide. Notant $M_j \subset A_j$ l'idéal de F_j , ceci signifie que la limite inductive des M_j contient 1, donc l'un des M_j contient 1. Alors F_j est vide, donc $Z_j \rightarrow Z_i \rightarrow X$ se factorise par V . Le morphisme $Z_j \rightarrow V$ ainsi obtenu définit f , ce qui termine la preuve de l'implication (2) \Rightarrow (1) de 2.1.7. \square

2.2 Morphismes de présentation finie

2.2.1 Définition. On dit qu'un morphisme $f : X \rightarrow S$ est *quasi-séparé* si la diagonale $\Delta : X \rightarrow X \times_S X$ est quasi-compacte.

Si f est quasi-séparé et U, U' sont deux ouverts de X quasi-compacts sur S , l'ouvert $U \cap U'$ est quasi-compact sur S . Ceci vient du fait que $U \cap U'$ est la préimage par la diagonale de $U \times_S U'$, qui est quasi-compact sur S . Tout morphisme séparé est quasi-séparé; en particulier toute immersion est quasi-séparée.

2.2.2 Définition. On dit que f est *de présentation finie* s'il est localement de présentation finie, quasi-compact et quasi-séparé.

On dispose pour les morphismes de présentation finie de propriétés de base similaires à celles de 2.1.2 :

2.2.3 Proposition. *Une immersion ouverte quasi-compacte est de présentation finie. Le composé de deux morphismes de présentation finie l'est encore. Un morphisme obtenu par changement de base d'un morphisme de présentation finie l'est encore. Le produit de deux morphismes de présentation finie l'est aussi. Si le composé $g \circ f$ de deux morphismes est*

de présentation finie et si g est quasi-séparé et localement de présentation finie, alors f est de présentation finie. \square

Le théorème suivant est la proposition 8.9.1 de [EGA] IV. Il indique que pour étendre aux morphismes de présentation finie les résultats connus sur les morphismes de type fini de but localement noethérien, la situation est idéale.

2.2.4 Théorème. *Soit R un anneau et $f : X \rightarrow \text{Spec}(R)$ un morphisme. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (1) f est de présentation finie,
- (2) il existe une sous- \mathbb{Z} -algèbre de type fini $R_0 \subset R$ et un R_0 -schéma de type fini X_0 (ou de présentation finie, c'est la même chose) tels que $X \simeq X_0 \otimes_{R_0} R$.

Preuve : Supposons d'abord que $X = \text{Spec}(A)$ est affine. Alors, d'après 2.1.3 il existe une présentation $A \simeq R[X_1, \dots, X_n]/(P_1, \dots, P_m)$. Les coefficients des polynômes P_i sont en nombre fini, donc engendrent une sous- \mathbb{Z} -algèbre de type fini R_0 de R . Posons $X_0 = \text{Spec}(A_0)$ où $A_0 = R_0[X_1, \dots, X_n]/(P_1, \dots, P_m)$. Il est clair que R_0 et X_0 répondent à la question.

Dans le cas général, nous donnons une ébauche de démonstration. Notons $(R_\lambda)_{\lambda \in L}$ la famille des sous- \mathbb{Z} -algèbres de type fini de R . Cette famille est ordonnée et filtrante : deux sous- \mathbb{Z} -algèbres R_λ, R_μ sont toujours incluses dans une autre sous- \mathbb{Z} -algèbre R_ν . Comme X est localement de présentation finie, chaque point $x \in X$ possède un voisinage ouvert affine U dont l'image par f tombe dans un ouvert affine de $S = \text{Spec}(R)$, induisant une extension d'anneaux de présentation finie. Comme X est quasi-compact, une sous-famille finie $(U_i = \text{Spec}(A_i))_{1 \leq i \leq n}$ recouvre X . D'après le lemme 2.1.3, les extensions $R \rightarrow A_i$ sont de présentation finie. D'après le cas affine traité plus haut, il existe un indice $\lambda = \lambda(i)$, un R_λ -schéma affine de présentation finie Z_i , et un isomorphisme $g_i : U_i \simeq Z_i \otimes_{R_\lambda} R$. En fait, comme il n'y a qu'un nombre fini de i , on peut choisir λ indépendant de i . Comme X est quasi-séparé, pour chaque (i, j) l'ouvert $U_i \cap U_j$ est quasi-compact sur S , il est aussi quasi-séparé donc de présentation finie sur S . En recouvrant $U_i \cap U_j$ par un nombre fini d'ouverts distingués qui (une fois encore d'après le cas affine et quitte à remplacer R_λ par une sous- \mathbb{Z} -algèbre de type fini plus grande) proviennent par changement de base de certains R_λ -schémas affines, on montre alors qu'il existe des ouverts quasi-compacts $W_{ij} \subset Z_i$ et des R_λ -isomorphismes $\varphi_{ij} : W_{ij} \simeq W_{ji}$ tels que $U_i \cap U_j \simeq W_{ij} \otimes_{R_\lambda} R$ et φ_{ij} induit l'identité sur $U_i \cap U_j$ après changement de base à R . Les morphismes φ_{ij} vérifient la condition de cocycle sur les intersections triples après extension de la base à R ; on montre que quitte à augmenter λ les φ_{ij} vérifient eux-mêmes la condition de cocycle. On pose $R_0 = R_\lambda$. Ainsi les W_{ij} se recollent en un R_0 -schéma X_0 qui est le schéma recherché. \square

2.2.5 Remarque. Le résultat ci-dessus possède de nombreuses déclinaisons : de nombreux autres objets définis sur R proviennent d'objets sur R_0 sous des hypothèses de présentation finie convenables, et pour de nombreuses propriétés vérifiées par le R -objet

initial X , on peut choisir R_0 et un R_0 -objet X_0 redonnant X après changement de base et vérifiant la propriété en question. Voici des exemples ; nous renvoyons à [EGA] IV, § 8 pour une liste complète (on pourra lire la proposition 8.9.1 et le théorème 8.10.5 pour des exemples d'énoncés typiques).

(1) Si on se donne deux R -schémas de présentation finie X, Y et un morphisme $g : X \rightarrow Y$, il existe une sous- \mathbb{Z} -algèbre de type fini $R_0 \subset R$ et des R_0 -schémas de type fini X_0, Y_0 et un R_0 -morphisme $g_0 : X_0 \rightarrow Y_0$ tels que $X \simeq X_0 \otimes_{R_0} R$, $Y \simeq Y_0 \otimes_{R_0} R$ et $g = g_0 \times \text{id}$.

(2) Si on se donne un R -schéma X muni d'un \mathcal{O}_X -module quasi-cohérent de présentation finie \mathcal{F} , alors il existe $R_0 \subset R$, un R_0 -schémas de type fini X_0 et un \mathcal{O}_{X_0} -module quasi-cohérent de présentation finie \mathcal{F}_0 tels que $X \simeq X_0 \otimes_{R_0} R$ et $\mathcal{F} \simeq \mathcal{F}_0 \otimes_{R_0} R$.

(3) Si dans (1) le morphisme g vérifie certaines propriétés comme être un isomorphisme, être séparé, surjectif, affine, fini ou propre, alors on peut choisir R_0 et g_0 tels que g_0 possède les mêmes propriétés. Enfin, si g est plat, on peut choisir g_0 plat, et ce fait sera important pour nous, voir 2.3.12.

2.3 Morphismes plats

La platitude est une propriété issue de l'algèbre, dont il est difficile de se faire une intuition géométrique immédiate. Néanmoins, les propriétés topologiques et géométriques des morphismes plats sont si importantes et utiles, et les exemples si nombreux et variés, que cette notion est incontournable en géométrie algébrique. Compte tenu du fait que la platitude d'un faisceau sur un schéma est une propriété locale, on peut toujours se ramener à la situation d'un module sur un anneau. En accord avec ce constat, dans la présentation de la platitude, nous alternons entre les notations d'algèbre commutative pure et les notations de géométrie algébrique.

2.3.1 Modules plats, algèbres plates. Soit A un anneau et M un A -module. Pour tout morphisme de A -modules $f : P \rightarrow Q$, on note $f_M : P \otimes_A M \rightarrow Q \otimes_A M$ le morphisme obtenu par application du foncteur produit tensoriel $- \otimes_A M$. On rappelle que ce foncteur est exact à droite, c'est-à-dire que pour toute suite exacte $\mathcal{S} : P \rightarrow Q \rightarrow R \rightarrow 0$, la suite $\mathcal{S} \otimes_A M$ est exacte. Il est équivalent de dire que la formation des conoyaux commute au produit tensoriel par M i.e. que pour tout morphisme f , l'application naturelle $\text{coker}(f_M) \rightarrow \text{coker}(f) \otimes_A M$ est un isomorphisme.

2.3.2 Définitions. Soit A un anneau. On dit qu'un A -module M est *plat* sur A lorsque pour toute suite exacte de A -modules \mathcal{S} , la suite $\mathcal{S} \otimes_A M$ est exacte. On dit que M est *fidèlement plat* sur A lorsque \mathcal{S} est exacte si et seulement si $\mathcal{S} \otimes_A M$ l'est. On dit qu'une A -algèbre B est *plate* (resp. *fidèlement plate*) si elle est plate (resp. fidèlement plate) comme A -module. On dit parfois *A-plat* au lieu de *plat sur A*, ou simplement *plat* si l'anneau A est clair d'après le contexte.

On notera les formulations équivalentes de la platitude :

(1) pour toute suite exacte \mathcal{S} , la suite $\mathcal{S} \otimes_A M$ est exacte.

- (2) pour toute suite exacte $0 \rightarrow P \rightarrow Q$, la suite tensorisée est exacte.
- (3) pour toute suite exacte $0 \rightarrow I \rightarrow A$ où I est un idéal de type fini de A , la suite tensorisée est exacte (voir [Ma], theorem 7.7).
- (4) la formation des noyaux commute avec $-\otimes_A M$: pour tout morphisme f , l'application naturelle $\ker(f) \otimes M \rightarrow \ker(f_M)$ est un isomorphisme.
- (5) la formation des images commute avec $-\otimes_A M$: pour tout morphisme f , l'application naturelle $\operatorname{im}(f) \otimes M \rightarrow \operatorname{im}(f_M)$ est un isomorphisme.

2.3.3 Définitions. Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de schémas, \mathcal{F} un \mathcal{O}_X -module quasi-cohérent, $x \in X$ un point, $y = f(x)$ son image. On dit que :

- (1) \mathcal{F} est *plat sur Y en x* si \mathcal{F}_x est $\mathcal{O}_{Y,y}$ -plat, et *plat* s'il est plat en tout point.
- (2) \mathcal{F} est *fidèlement plat sur Y* s'il est plat et si $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_Y} k(y) \neq 0$ comme \mathcal{O}_{X_y} -module, pour tout y .
- (3) f est *plat en x* , resp. *plat*, resp. *fidèlement plat*, si \mathcal{O}_X possède ces propriétés. En particulier, f est fidèlement plat si et seulement s'il est plat et surjectif.

La compatibilité entre les définitions de 2.3.2 et de 2.3.3 est établie ci-dessous (2.3.6, 2.3.8).

2.3.4 Exemples. Un module libre, ou plus généralement projectif, est plat. En conséquence, si A est un corps, tous les A -modules sont plats. Un localisé $S^{-1}M$ d'un module plat par rapport à une partie multiplicative $S \subset A$ est plat. Ainsi, la A -algèbre de polynômes $A[X_1, \dots, X_n]$ et le localisé $S^{-1}A$ sont plats.

2.3.5 Lemme. *Soit B une A -algèbre et M un B -module. Alors*

- (1) *Si M est plat sur B et B plat sur A , alors M est plat sur A .*
- (2) *Si M est fidèlement plat sur B et B fidèlement plat sur A , M est fidèlement plat sur A .*
- (3) *Si M est fidèlement plat sur B et plat sur A , alors B est plat sur A .*
- (4) *Si M est fidèlement plat sur B et sur A , alors B est fidèlement plat sur A .*

Preuve : Tout résulte de la transitivité du produit tensoriel. □

2.3.6 Lemme. *Soit B une A -algèbre et M un B -module. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (1) *M est A -plat,*
- (2) *M_q est A_p -plat pour tout premier $q \subset B$ de préimage p dans A ,*
- (3) *M_q est A_p -plat pour tout idéal maximal $q \subset B$ de préimage p dans A .*

Noter que $M_q = M \otimes_B B_q$ est le localisé du $B_p = B \otimes_A A_p$ -module $M_p = M \otimes_A A_p$ par rapport à la partie multiplicative $S = B \setminus q$.

Preuve : (1) \Rightarrow (2). Soit \mathcal{S} une suite exacte de A_p -modules. Alors M_p est A_p -plat donc $\mathcal{S} \otimes_{A_p} M_p$ est exacte. En localisant par rapport à $S = B \setminus q$, on trouve que $\mathcal{S} \otimes_{A_p} M_q$ est exacte.

(2) \Rightarrow (3) est clair et il reste (3) \Rightarrow (1). On doit montrer que pour tout morphisme injectif $f : P \rightarrow Q$ de A -modules, le morphisme $f_M : P \otimes_A M \rightarrow Q \otimes_A M$ est injectif. Notons que la structure de B -module sur M fait naturellement de f_M un morphisme de B -modules et donc de $N = \ker(f_M)$ un B -module. Pour tout idéal maximal $q \subset B$ de préimage $p \subset A$, on applique à f le foncteur $- \otimes_A M_q$ que l'on décompose de deux façons :

$$(- \otimes_A M) \otimes_B B_q = (- \otimes_A A_p) \otimes_{A_p} M_q.$$

Comme $B \rightarrow B_q$ est plat, en tensorisant on trouve que $\ker((f_M)_{B_q}) = N \otimes_B B_q = N_q$. Par ailleurs, comme A_p est A -plat et M_q est A_p -plat par hypothèse, en tensorisant comme indiqué dans le membre de droite, on trouve $\ker((f_M)_{B_q}) = 0$. Ainsi $N_q = 0$ pour tout q . Ceci implique $N = 0$, car s'il existe $x \in N \setminus \{0\}$, l'idéal $\text{Ann}(x) = 0 : x = \{b \in B, bx = 0\}$ est distinct de B donc inclus dans un idéal maximal q , et l'image de x dans N_q est non nulle. \square

On notera que le dernier argument de la preuve montre que le morphisme évident $A \rightarrow \prod_q A_q$ de A dans le produit de ses localisés en les idéaux maximaux est injectif. Voir aussi 2.3.9.

2.3.7 Proposition. *Soit A un anneau et $\mathcal{S} : 0 \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow P \rightarrow 0$ une suite exacte de A -modules. Si P est plat, alors pour tout A -module Q la suite tensoriée $\mathcal{S} \otimes Q$ est exacte.*

Preuve : Il suffit de montrer que $a : M \otimes Q \rightarrow N \otimes Q$ est injectif. Écrivons Q comme quotient d'un A -module libre L . On a donc une suite exacte $0 \rightarrow K \rightarrow L \rightarrow Q \rightarrow 0$. Utilisant la platitude de L , on a un diagramme commutatif à lignes et colonnes exactes :

$$\begin{array}{ccccccc} M \otimes K & \longrightarrow & N \otimes K & \longrightarrow & P \otimes K & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow h & & \\ 0 \longrightarrow & M \otimes L & \longrightarrow & N \otimes L & \longrightarrow & P \otimes L & \longrightarrow 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ M \otimes Q & \xrightarrow{a} & N \otimes Q & \longrightarrow & P \otimes Q & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Comme P est plat, h est injectif. Le lemme du serpent ([Wei], lemma 1.3.2) appliqué à f, g, h donne une suite exacte $\ker(h) = 0 \rightarrow M \otimes Q \rightarrow N \otimes Q$ ce qui donne le résultat. \square

2.3.8 Lemme. *Soit M un A -module. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (1) M est fidèlement plat sur A ,

- (2) M est plat sur A et pour tout A -module $N \neq 0$ on a $M \otimes_A N \neq 0$,
(3) M est plat sur A et pour idéal maximal $m \subset A$, on a $M \otimes_A A/m \neq 0$.

Preuve : (1) \iff (2). Si M est fidèlement plat et $N \neq 0$, c'est-à-dire si la suite $0 \rightarrow N \rightarrow 0$ n'est pas exacte, alors la suite $0 \rightarrow N \otimes M \rightarrow 0$ n'est pas exacte, c'est-à-dire $N \otimes_A M \neq 0$. Réciproquement, soit $P \xrightarrow{f} Q \xrightarrow{g} R$ une suite de A -modules telle que la suite tensorisée

$$P \otimes_A M \xrightarrow{f_M} Q \otimes_A M \xrightarrow{g_M} R \otimes_A M$$

est exacte. Par platitude, on a $\text{im}(g \circ f) \otimes M = \text{im}(g_M \circ f_M) = 0$. Par hypothèse, ceci implique $\text{im}(g \circ f) = 0$, donc $g \circ f = 0$. Notons $H = \ker(g)/\text{im}(f)$. Par platitude, on a $H \otimes M = \ker(g) \otimes M / \text{im}(f) \otimes M = \ker(g_M) / \text{im}(f_M) = 0$. Par hypothèse, ceci implique $H = 0$. Donc la suite originale est exacte.

(2) \iff (3). Seule l'implication (3) \Rightarrow (2) est à démontrer. Soient $N \neq 0$, $0 \neq x \in N$ et $P = Ax \subset N$. L'annulateur $\text{Ann}(x)$ étant non nul est inclus dans un idéal maximal m , et on a une surjection $P \simeq A/\text{Ann}(x) \rightarrow A/m$. On en déduit une surjection $M \otimes_A P \rightarrow M \otimes_A A/m \neq 0$, donc $M \otimes_A P \neq 0$. Or $M \otimes_A P \rightarrow M \otimes_A N$ est injectif car M est plat, donc $M \otimes_A N \neq 0$. \square

2.3.9 Exemple. Le morphisme $A \rightarrow \prod_{p \in \text{Spec}(A)} A_p$ est fidèlement plat.

On rappelle qu'un morphisme $\varphi : (A, m) \rightarrow (B, n)$ entre deux anneaux locaux est dit *local* si $\varphi(m) \subset n$. En principe, la lectrice le sait bien, puisqu'elle sait qu'un morphisme entre schémas est par définition un morphisme d'espaces *annelés en anneaux locaux*.

2.3.10 Corollaire. Soit $\varphi : (A, m) \rightarrow (B, n)$ un morphisme local d'anneaux locaux. Alors si φ est plat, il est fidèlement plat.

Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de schémas plat en un point $x \in X$. Alors, toute générisation de $f(x)$ est l'image d'une générisation de x .

Preuve : Comme φ est local, on a une surjection $B/mB \rightarrow B/nB \neq 0$. Il s'ensuit que $B \otimes_A A/m = B/mB \neq 0$, donc B est fidèlement plat par 2.3.8.

Soit $y = f(x)$. Le morphisme $\text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}) \rightarrow \text{Spec}(\mathcal{O}_{Y,y})$ est plat donc fidèlement plat par ce qui précède. Il est donc surjectif, ainsi toute générisation de y est l'image d'une générisation de x (on rappelle, voir 1.1.3, que $\text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$ est l'ensemble des générisations de x). \square

2.3.11 Proposition. Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme fidèlement plat de schémas. Alors le morphisme $\mathcal{O}_Y \rightarrow f_*\mathcal{O}_X$ est injectif et f est un épimorphisme dans la catégorie des schémas.

Preuve : Montrons d'abord qu'un morphisme d'anneaux fidèlement plat $\varphi : A \rightarrow B$ est injectif. Il s'agit de montrer que la suite de A -modules $\mathcal{S} : 0 \rightarrow A \rightarrow B$ est exacte. Par fidèle platitude, il suffit de montrer que $\mathcal{S} \otimes_A B : 0 \rightarrow B \rightarrow B \otimes_A B$ est exacte. Or

la deuxième flèche de cette suite est $b \mapsto 1 \otimes b$, qui est injectif. Revenons au morphisme $f : X \rightarrow Y$. Soit $y \in Y$ et $x \in f^{-1}(y)$. Pour $V \subset Y$ voisinage variable de y , les applications germe $\mathcal{O}_X(f^{-1}V) \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$ donnent un morphisme $(f_*\mathcal{O}_X)_y \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$. D'après le cas affine traité plus haut, la composée $\mathcal{O}_{Y,y} \rightarrow (f_*\mathcal{O}_X)_y \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$ est injective donc $\mathcal{O}_{Y,y} \rightarrow (f_*\mathcal{O}_X)_y$ aussi. Comme ceci est vrai pour tout y , il s'ensuit que $\mathcal{O}_Y \rightarrow f_*\mathcal{O}_X$ est injectif. Montrons maintenant que f est un épimorphisme. Soient deux morphismes $u, v : Y \rightarrow Z$ tels que $u \circ f = v \circ f =: g$. Comme f est surjectif, les applications ensemblistes sous-jacentes à u et v sont égales. En particulier, les faisceaux $u_*\mathcal{O}_Y$ et $v_*\mathcal{O}_Y$ sont égaux et les morphismes obtenus en appliquant u_* et v_* à $\mathcal{O}_Y \rightarrow f_*\mathcal{O}_X$ sont égaux. Par ailleurs, comme l'image directe des faisceaux est un foncteur exact à gauche, ce dernier morphisme est injectif. Puisque les composées

$$\mathcal{O}_Z \begin{array}{c} \xrightarrow{u^\#} \\ \xrightarrow{v^\#} \end{array} u_*\mathcal{O}_Y = v_*\mathcal{O}_Y \longrightarrow g_*\mathcal{O}_X$$

sont égales par hypothèse, on en déduit que $u^\# = v^\#$. Finalement u et v sont égaux comme morphismes de schémas. \square

2.3.12 Proposition. *Soit R un anneau et A une R -algèbre de présentation finie et plate. Alors, il existe une sous- \mathbb{Z} -algèbre de type fini $R_0 \subset R$ et une R_0 -algèbre de présentation finie et plate A_0 telle que $A \simeq A_0 \otimes_{R_0} R$.*

Preuve : L'existence d'une R_0 -algèbre de présentation finie A_0 telle que $A \simeq A_0 \otimes_{R_0} R$ se montre comme dans la preuve de 2.2.4. La difficulté est de montrer qu'on peut choisir $R_0 \rightarrow A_0$ plate. Ceci utilise la caractérisation de la platitude par l'annulation des modules $\mathrm{Tor}_1^R(A, R/I)$ pour tous les idéaux $I \subset A$. La preuve est assez technique et nous l'admettrons, voir [EGA] IV, corollaire 11.2.6.1. \square

2.3.13 Lemme. *Soit M un A -module. Si M est plat, pour tous $r, s \geq 1$, $U \in \mathcal{M}_{rs}(A)$ et $X \in M^s$ avec $UX = 0$, il existe $t \geq 1$, $V \in \mathcal{M}_{st}(A)$ et $Y \in M^t$ tels que $UV = 0$ et $X = VY$.*

Cet énoncé signifie que si M est plat, toute solution dans M d'un système linéaire à coefficients dans A peut être exprimée comme combinaison linéaire de solutions dans A . Notons que la réciproque est vraie, voir [Ma], theorem 7.6.

Preuve : Considérons le morphisme $\varphi : A^s \rightarrow A^r$ défini par la matrice U et notons $K = \ker(\varphi)$. Si M est plat, on a $\ker(\varphi_M : M^s \rightarrow M^r) = K \otimes_A M$. Alors $UX = 0$ implique $X \in K \otimes_A M$, donc il existe une écriture $X = v_1 \otimes y_1 + \cdots + v_t \otimes y_t$ avec $v_i \in K$ et $y_i \in M$. En arrangeant les $v_i \in K \subset A^s$ dans une matrice $V \in \mathcal{M}_{st}(A)$, on a le résultat annoncé. \square

2.3.14 Lemme. *Soit A un anneau local et M un A -module fini. Si M est plat, il est libre.*

Preuve : Il suffit de montrer que le relevement dans M d'une famille libre de $M \otimes k$ est une famille linéairement indépendante sur A , car par Nakayama 1.3.1, le relèvement d'une base sera alors une base. On fait une récurrence sur le nombre d'éléments de la famille. Soient $x_1, \dots, x_s \in M$ des éléments dont les images dans $M \otimes k$ sont libres et supposons que $a_1x_1 + \dots + a_sx_s = 0$. Par 2.3.13 avec $U = (a_1 \dots a_s)$ et $X = {}^t(x_1 \dots x_s)$, il existe des écritures $x_i = v_{i1}y_1 + \dots + v_{it}y_t$ avec $v_{ij} \in A$, $y_j \in M$ et $a_1v_{1j} + \dots + a_s v_{sj} = 0$ pour tout j . Comme $x_s \not\equiv 0 \pmod{m}$, l'un des v_{sj} , disons v_{s1} , n'est pas dans m donc est inversible. Si $s = 1$, on a v_{11} inversible donc $a_1 = 0$ ce qui initialise la récurrence. Si $s > 1$, on trouve une combinaison linéaire $a_s = c_1a_1 + \dots + c_{s-1}a_{s-1}$. En injectant dans $a_1x_1 + \dots + a_sx_s = 0$ on trouve une relation de dépendance entre les $x_i + c_ix_s$ pour $1 \leq i \leq s-1$, d'où $a_1 = \dots = a_{s-1} = 0$ par l'hypothèse de récurrence puis $a_s = 0$. \square

2.3.15 Théorème. *Soit $A \rightarrow B$ un morphisme plat d'anneaux noethériens, ou un morphisme plat et de présentation finie. Soit $b \in B$ tel que pour tout idéal maximal $n \subset B$ de préimage $m = n \cap A$, l'image de b dans B/mB n'est pas un diviseur de zéro. Alors $B/(b)$ est A -plat.*

Preuve : Dans le cas où $A \rightarrow B$ est de présentation finie, on utilise 2.3.12 pour se ramener au cas noethérien. Noter qu'une fois choisie une A_0 -algèbre de présentation finie et plate B_0 , et une présentation de B_0 comme quotient d'un anneau de polynômes sur A_0 , l'écriture de b nécessite un nombre fini de coefficients dans A_0 de sorte que quitte à agrandir un peu $A_0 \subset A$ on peut supposer qu'il existe un élément $b_0 \in B_0$ tel que $b_0 \otimes 1 = b$. Passons au cas noethérien. La platitude étant locale (lemme 2.3.6), on se ramène aussitôt au cas où $(A, m) \rightarrow (B, n)$ est un morphisme local d'anneaux locaux. Soit $c \in B$ tel que $bc = 0$. Montrons que $c \in m^r B$ pour tout r . Le cas $r = 1$ est l'hypothèse de l'énoncé. Supposons que $c \in m^r B$ et fixons un système de générateurs minimal (a_i) pour m^r , i.e. un relèvement d'une base du k -espace vectoriel de dimension finie $m^r \otimes k$, où $k = A/m$. On a donc une écriture $c = \sum a_i b_i$, d'où $0 = bc = \sum a_i b_i b$. Par le lemme 2.3.13, comme $A \rightarrow B$ est plat il existe des éléments $\alpha_{ij} \in A$ et $\beta_k \in B$ tels que $\sum_i a_i \alpha_{ij} = 0$ pour tout j et $b_i b = \sum_j \alpha_{ij} \beta_j$ pour tout i . Par choix des a_i , tous les α_{ij} sont dans m . Ainsi $b_i b \in mB$, et comme b n'est pas diviseur de zéro modulo m , finalement $b_i \in mB$ pour tout i puis $c \in m^{r+1}B$. On obtient $c \in \bigcap_{r \geq 0} m^r B \subset \bigcap_{r \geq 0} n^r B = 0$ d'après 1.3.3. Ainsi b n'est pas diviseur de zéro. Soit $I \subset A$ un idéal. Le même raisonnement que ci-dessus avec A/I à la place de A et B/IB à la place de B montre que b n'est pas diviseur de zéro dans B/IB . On contemple alors le diagramme commutatif à lignes et colonnes exactes :

$$\begin{array}{ccccccc}
I \otimes B & \xrightarrow{b} & I \otimes B & \longrightarrow & I \otimes B/(b) & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow h & & \\
0 \longrightarrow & B & \xrightarrow{b} & B & \longrightarrow & B/(b) & \longrightarrow 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 \longrightarrow & B/IB & \xrightarrow{b} & B/IB & \longrightarrow & B/(I + (b)) & \longrightarrow 0
\end{array}$$

Comme B est plat, g est injective. Le lemme du serpent ([Wei], lemma 1.3.2) pour f, g, h

donne une suite exacte $\ker(g) = 0 \rightarrow \ker(h) \rightarrow \operatorname{coker}(f) = B/IB \xrightarrow{b} \operatorname{coker}(g) = B/IB$. On déduit que h est injective, et $B/(b)$ est A -plat (voir 2.3.2, point (3)). \square

Voici une traduction géométrique de ce théorème, qui est une application à la « platitude des hypersurfaces ».

2.3.16 Corollaire. *Soient $f : X \rightarrow S$ un morphisme plat et de présentation finie de schémas, et $g \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ une fonction globale sur X . Si pour tout $x \in X$ d'image $s = f(x)$, le germe $\bar{g}_x \in \mathcal{O}_{X_s, x}$ est non diviseur de 0 dans $\mathcal{O}_{X_s, x}$ alors le sous-schéma fermé $V(g) \subset X$ est plat sur S .*

Noter que le germe \bar{g}_x est l'image du germe $g_x \in \mathcal{O}_{X, x}$ dans $\mathcal{O}_{X_s, x} = \mathcal{O}_{X, x}/m_s \mathcal{O}_{X, x}$, voir remarque 1.4.17.

Preuve : La platitude de $V(g)$ sur S est une propriété locale ; après localisation, c'est juste l'énoncé 2.3.15. \square

2.3.17 Remarque. On peut se demander s'il suffit de supposer que pour tout $x \in X$, la restriction $g|_{X_s} \in \Gamma(X_s, \mathcal{O}_{X_s})$ est non diviseur de 0 dans $\Gamma(X_s, \mathcal{O}_{X_s})$. Ceci n'est pas vrai ; la raison est que la platitude est une notion locale, et la fonction globale $g|_{X_s}$ ne peut pas voir les propriétés des germes \bar{g}_x aux points $x \in X_s$. Nous allons donner un contre-exemple. La non-platitude de $V(g)$ sera causée par une fonction globale g qui est non-diviseur de 0 mais dont la restriction à certains ouverts est diviseur de 0. Voici comment on peut fabriquer une telle fonction. Soit $T = \operatorname{Spec}(B)$ un schéma affine et $T_0 \subset T$ un sous-schéma fermé. Soit $P = \mathbb{P}_T^1$ la droite projective sur T , $P_0 = P \times_T T_0$ la préimage de T_0 , et $i : P_0 \rightarrow P$ l'immersion fermée. Considérons le \mathcal{O}_P -module $\mathcal{F} = i_* \mathcal{O}_{P_0}(-1)$ et la \mathcal{O}_P -algèbre $\mathcal{A} = \mathcal{O}_P \oplus \mathcal{F}$ où \mathcal{F} est vu comme un idéal de carré nul ; en d'autres termes \mathcal{A} est le quotient de la \mathcal{O}_P -algèbre symétrique de \mathcal{F} par l'idéal engendré par $\operatorname{Sym}^2(\mathcal{F})$. Soit le P -schéma affine $X = \operatorname{Spec}_{\mathcal{O}_P}(\mathcal{A}) = \operatorname{Spec}_{\mathcal{O}_P}(\mathcal{O}_P \oplus \mathcal{F})$. Le morphisme $X \rightarrow P$ est un homéomorphisme qui possède une section définie par le morphisme $\mathcal{O}_P \oplus \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{O}_P$ qui envoie \mathcal{F} sur 0. Utilisant le fait que $\mathcal{O}(-1)$ n'a pas de sections globales sur \mathbb{P}^1 , on trouve :

$$\Gamma(X, \mathcal{O}_X) = \Gamma(P, \mathcal{O}_P) \oplus \Gamma(P, \mathcal{F}) = \Gamma(P, \mathcal{O}_P) \oplus \Gamma(P_0, \mathcal{O}_{P_0}(-1)) = \Gamma(P, \mathcal{O}_P) = B.$$

Si on choisit B intègre, tout élément $g \in B$, $g \neq 0$ est donc une fonction globale non diviseur de 0 sur X .

Pour notre contre-exemple, nous voulons un X plat sur une base tel que $V(g)$ n'est pas plat sur la base. Ici P_0 n'est pas plat sur T car il provient de l'immersion fermée $T_0 \rightarrow T$, et les immersions fermées ne sont en général pas plates (sauf cas dégénérés ; voir le théorème 2.3.22). Ceci fait que \mathcal{F} n'est pas T -plat et donc X non plus. Pour résoudre ce problème, on peut choisir un $T \rightarrow S = \operatorname{Spec}(A)$ tel que T_0 est plat sur S ; par exemple on peut prendre pour T_0 une section de $T \rightarrow S$. Alors le composé $X \rightarrow T \rightarrow S$ sera plat et donnera le contre-exemple espéré.

Spécialisons les constructions précédentes pour obtenir un exemple explicite. On prend k un corps, $S = \operatorname{Spec}(k[u])$ la droite affine, $T = \operatorname{Spec}(k[u, v])$ le plan affine, et $T_0 \subset T$ le

sous-schéma d'équation $v = 0$. Alors $T_0 \rightarrow S$ est un isomorphisme et en particulier est plat, P_0 est isomorphe à \mathbb{P}_S^1 et \mathcal{F} à son $\mathcal{O}(-1)$, qui est S -plat. L'algèbre $\mathcal{A} = \mathcal{O}_P \oplus \mathcal{F}$ est S -plate donc $X \rightarrow S$ est plat. On a $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) = B = k[u, v]$. Considérons la fonction globale $g = u + v \in B = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$.

Vérifions que pour tout $x \in X$, la restriction $g|_{X_s}$ est non diviseur de 0 dans $\Gamma(X_s, \mathcal{O}_{X_s})$. Pour tout s , le calcul que l'on a fait pour un B général est valable pour $B \otimes_A k(s) = k(s)[v]$ et on obtient $\Gamma(X_s, \mathcal{O}_{X_s}) = k(s)[v]$. L'image $g|_{X_s}$ dans cet anneau est le polynôme $u_s + v$ où u_s est l'image de u dans $k(s)$. C'est un polynôme de degré 1, non nul dans un anneau intègre, donc $g|_{X_s}$ est non diviseur de 0.

Vérifions enfin que $V(g) \subset X$ n'est pas plat sur S ; il suffit de trouver un ouvert affine dont l'anneau de fonctions n'est pas A -plat. Notons que P et X ont mêmes ouverts puisque l'immersion fermée $P \rightarrow X$ est d'idéal nilpotent. Soit $U \subset X$ un ouvert affine qui vu dans P est le complémentaire d'une section « à l'infini », par exemple $U = \text{Spec}(k[u, v, \alpha]) \simeq \mathbb{A}_T^1$ de coordonnée α . Sur l'ouvert $U_0 = U \cap P_0$, le faisceau $\mathcal{O}_{P_0}(-1)$ est trivial : on le voit soit directement, soit en observant que $U_0 = \text{Spec}(k[u, \alpha])$ est un plan affine dont le groupe de Picard est trivial. On voit finalement que

$$U \simeq \text{Spec} \left(\frac{k[u, v, \alpha, \epsilon]}{\epsilon^2, \epsilon v} \right) \quad \text{et} \quad V(g) \cap U \simeq \text{Spec} \left(\frac{k[u, v, \alpha, \epsilon]}{\epsilon^2, \epsilon v, u + v} \right).$$

Notons C l'anneau de fonctions de $V(g) \cap U$. La fonction $\epsilon \in C$ est non nulle, mais $u\epsilon = -v\epsilon = 0$. Ainsi ϵ est un élément de u -torsion, ce qui implique que C n'est pas plat sur $k[u]$: s'il était plat, le morphisme injectif de multiplication $u : k[u] \rightarrow k[u]$ donnerait un morphisme injectif $u : C \rightarrow C$, or $0 \neq \epsilon \in \ker(u)$. Donc $V(g)$ n'est pas plat sur S .

2.3.18 Proposition. *Soit A un anneau de Dedekind et M un A -module. Alors M est plat sur A si et seulement s'il est sans torsion.*

Preuve : Si M est plat, pour tout $a \in A$ l'image du morphisme injectif $a : A \rightarrow A$ est le morphisme injectif $a : M \rightarrow M$ donc M est sans torsion. Réciproquement, il suffit de montrer que M_p est A_p -plat pour tout premier $p \subset A$ (cf 2.3.6). Or A_p est un anneau de valuation discrète et tous ses idéaux sont de la forme $I = (\pi^n)$ où π est une uniformisante. Si M est sans torsion, alors M_p est sans A_p -torsion et la vérification de la platitude par le critère (3) de 2.3.2 est immédiate. \square

Voici maintenant quelques applications de la platitude aux faisceaux quasi-cohérents. On l'utilise d'abord pour donner un cas supplémentaire dans lequel les applications de notre formulaire 1.2.4 sont des isomorphismes. Puis, on illustre les relations entre faisceaux localement libres et faisceaux plats.

2.3.19 Proposition. *Soient $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de schémas et \mathcal{G}, \mathcal{H} des \mathcal{O}_Y -modules quasi-cohérents. Supposons f plat et \mathcal{G} de présentation finie. Alors, l'application canonique*

$$f^* \mathcal{H} \text{om}_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{G}, \mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{H} \text{om}_{\mathcal{O}_X}(f^* \mathcal{G}, f^* \mathcal{H})$$

est un isomorphisme. En particulier, l'application canonique $f^(\mathcal{G}^\vee) \rightarrow (f^* \mathcal{G})^\vee$ est un isomorphisme.*

Preuve : Le résultat est connu si \mathcal{G} est localement libre de rang fini. Il suffit de le démontrer sur un voisinage de chaque point $x \in X$. En choisissant un ouvert affine $V \subset Y$ contenant $f(x)$ puis un ouvert affine $U \subset f^{-1}(V)$ contenant x , on se ramène à la situation algébrique suivante : un morphisme d'anneaux plat $A \rightarrow B$, deux A -modules M, N avec M de présentation finie, et une application canonique $F(M) \rightarrow G(M)$ où l'on note F, G les foncteurs définis par $F(M) = \text{Hom}_A(M, N) \otimes B$ et $G(M) = \text{Hom}_B(M \otimes B, N \otimes B)$. Par platitude, ces deux foncteurs sont exacts à gauche. Après choix d'une présentation $A^r \rightarrow A^s \rightarrow M \rightarrow 0$, on obtient un diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & F(M) & \longrightarrow & F(A^s) & \longrightarrow & F(A^r) \\ & & \downarrow a & & \downarrow b & & \downarrow c \\ 0 & \longrightarrow & G(M) & \longrightarrow & G(A^s) & \longrightarrow & G(A^r). \end{array}$$

Puisque le résultat est connu pour les modules libres, les morphismes b, c sont des isomorphismes. La paire (b, c) identifie les applications $F(A^s) \rightarrow F(A^r)$ et $G(A^s) \rightarrow G(A^r)$, et donc via a , leurs noyaux $F(M)$ et $G(M)$. \square

2.3.20 Proposition. *Soient X un schéma et \mathcal{F} un \mathcal{O}_X -module quasi-cohérent de type fini.*

- (1) \mathcal{F} est localement libre si et seulement s'il est plat et de présentation finie.
- (2) Si X est réduit, \mathcal{F} est localement libre si et seulement si la fonction $x \mapsto \dim_{k(x)} \mathcal{F}(x)$ est localement constante.

D'après 1.3.2, il est équivalent de dire que $x \mapsto \dim_{k(x)} \mathcal{F}(x)$ est localement constante ou qu'elle est semi-continue inférieurement.

Preuve : Si \mathcal{F} est localement libre, il est plat, de présentation finie, et la fonction $\dim \mathcal{F}(x)$ est localement constante. Réciproquement, on peut supposer $X = \text{Spec}(A)$ affine et $\mathcal{F} = \widetilde{M}$ et on raisonne au voisinage d'un point x correspondant à un premier $p \subset A$. Soit $n = \dim_{k(x)} \mathcal{F}(x)$, alors d'après 1.3.2, quitte à remplacer X par un voisinage de x , on peut supposer qu'il existe un morphisme surjectif $\varphi : A^n \rightarrow M$. Notons K son noyau. Dans le cas (1), le A_p -module M_p est plat donc libre d'après 2.3.14, donc $K_p = 0$. Comme M est de présentation finie, K est fini donc il existe $t \in A \setminus p$ tel que $tK = 0$. Quitte à se restreindre à l'ouvert $D(t)$ on peut donc supposer que $K = 0$. Dans le cas (2), par hypothèse pour tout $q \in \text{Spec}(A)$ le morphisme $\varphi \otimes k(q)$ est surjectif entre deux $k(q)$ -espaces vectoriels de même dimension, donc injectif. Alors $K \subset qA^n$ pour tout q , et comme A est réduit il s'ensuit que $K = 0$. Donc M est libre. \square

2.3.21 Remarque. Voici quelques contre-exemples avec $X = \text{Spec}(A)$ et $\mathcal{F} = \widetilde{M}$.

- (1) Si \mathcal{F} n'est pas de type fini. Soit A un anneau de valuation discrète de corps des fractions K , de corps résiduel k , et $M = K/A$. Alors $M \otimes k = M \otimes K = 0$ de sorte que la fonction dimension des fibres de M est nulle.

(2) Si \mathcal{F} n'est pas de présentation finie et X n'est pas localement noethérien. Dans l'exemple 2.3.24 ci-dessous, le faisceau structural $M = A/m$ du point fermé considéré est de type fini (et même monogène), plat sur A , mais pas localement libre.

Nous terminons ce paragraphe par un résultat d'une extrême importance.

2.3.22 Théorème. *Soit $f : X \rightarrow S$ un morphisme plat et localement de présentation finie. Alors f est ouvert.*

Notons que pour tout changement de base $S' \rightarrow S$, le morphisme $f_{S'} : X \times_S S' \rightarrow S'$ est encore plat et localement de présentation finie, donc ouvert d'après le théorème. On exprime ceci en disant que f est *universellement ouvert*.

Nous donnons une démonstration de 2.3.22 due à Milne [Mi], chap. I, th. 2.12. Elle utilise une propriété topologique des morphismes dominants de type fini que nous établissons maintenant.

2.3.23 Lemme. *Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de type fini et dominant de schémas irréductibles. Alors l'image de tout ouvert dense contient un ouvert dense.*

Preuve : Les hypothèses et la conclusion sont purement topologiques, de sorte qu'on peut remplacer f par $f_{\text{réd}} : X_{\text{réd}} \rightarrow Y_{\text{réd}}$ et supposer les schémas réduits, donc intègres. La propriété à démontrer est locale sur X et sur Y ; on peut donc les supposer tous les deux affines. Comme f est de type fini, X est sous-schéma fermé d'un espace affine $\mathbb{A}^n \times Y$. Décomposons la projection $\mathbb{A}^n \times Y \rightarrow Y$ en une suite de projections linéaires

$$\mathbb{A}^n \times Y \longrightarrow \mathbb{A}^{n-1} \times Y \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathbb{A}^0 \times Y = Y$$

et notons X_i l'adhérence de l'image de X dans $\mathbb{A}^i \times Y$, pour $0 \leq i \leq n$. On a donc une suite de morphismes de type fini dominants $X = X_n \rightarrow X_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow X_1 \rightarrow X_0 = Y$ tels qu'à chaque étape X_{i+1} est un sous-schéma fermé de $\mathbb{A}^1 \times X_i$. Comme la classe des morphismes qui vérifient la conclusion du lemme est stable par composition, on se ramène ainsi au cas $n = 1$. Finalement $Y = \text{Spec}(A)$ et $X = \text{Spec}(B)$, avec $B = A[T]/I$ pour un idéal premier I . Il suffit de montrer que l'image de tout ouvert distingué non vide $U = \text{Spec}(B_g)$ contient un ouvert non vide.

Si $I = 0$, le polynôme $g \in A[T]$ est non nul. Soit a l'un de ses coefficients non nuls et montrons que $\text{Spec}(A_a) \subset f(U)$. Soit $p \subset A$ un premier ne contenant pas a et $\nu : A[T] \rightarrow (A/p)[T]$ le morphisme canonique. Comme $\nu(g) \neq 0$, on peut choisir un polynôme $h \in A[T]$ dont l'image par ν est un polynôme non constant qui engendre un idéal premier ne contenant pas $\nu(g)$. (Si A/p est infini, on peut choisir h de la forme $T - x$ pour un $x \in A$; sinon A/p est un corps et l'existence de h est facile.) Soit q l'idéal de $A[T]$ engendré par p et h . Par construction q est premier, $q \cap A = p$ et $g \notin q$, ce qui conclut.

Si $I \neq 0$, puisque $A \rightarrow B$ est injectif il y a dans I un polynôme non constant F ; ce polynôme annule l'image t de T dans B . Quitte à se restreindre à l'ouvert $\text{Spec}(A_c)$ où c est le coefficient dominant de F , on peut supposer que F est unitaire. Alors $f : X \rightarrow Y$ est un morphisme entier, donc surjectif (théorème de Cohen-Seidenberg, voir 1.3.10). Ainsi tout premier $p \subset A$ est de la forme $q \cap A$ pour un premier $q \subset B$. Mais si l'on choisit une

équation d'intégralité $g^m + a_{m-1}g^{m-1} + \dots + a_1g + a = 0$, avec $a \neq 0$, on voit que q ne peut contenir g si p ne contient pas a . Ceci montre que $\text{Spec}(A_a) \subset f(U)$. \square

Preuve de 2.3.22 : On commence par se ramener au cas affine. Soit U un ouvert de X . Il faut montrer que $f(U)$ est ouvert ; c'est une propriété locale sur S , donc on peut supposer S affine. Soit (U_i) un recouvrement ouvert affine de U , alors $f(U)$ est la réunion des $f(U_i)$ donc il suffit de montrer que chacun des $f(U_i)$ est ouvert. En remplaçant f par la composée $U_i \rightarrow X \rightarrow S$, il suffit donc de supposer $X = \text{Spec}(B)$ et $S = \text{Spec}(A)$ affines et de montrer que $f(X)$ est ouvert.

On se ramène ensuite au cas où S est noethérien. D'après la proposition 2.3.12, il existe une sous- \mathbb{Z} -algèbre $A_0 \subset A$ et une A_0 -algèbre de présentation finie plate B_0 telle que $B \simeq B_0 \otimes_{A_0} A$. Considérons le diagramme de produit fibré

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & S \\ \downarrow & & \downarrow u \\ X_0 & \xrightarrow{f_0} & S_0 \end{array}$$

où $S_0 = \text{Spec}(A_0)$ et $X_0 = \text{Spec}(B_0)$, et vérifions que $f(X) = u^{-1}(f_0(X_0))$. L'inclusion directe est claire, et réciproquement si $s \in S$ vérifie $u(s) = f_0(x_0)$ pour un $x_0 \in X_0$, en utilisant le fait que l'application ensembliste $|X| \rightarrow |X_0| \times_{|S_0|} |S|$ est surjective (remarque (2) dans 1.4.16) on voit qu'il existe un point $x \in X$ tel que $f(x) = s$. Ainsi, il suffit de montrer que $f_0(X_0)$ est ouvert dans S_0 . On se ramène de cette façon à démontrer le théorème avec S affine noethérien.

On conclut enfin la démonstration. Soit $W = S \setminus f(X)$. Par la propriété noethérienne, son adhérence \overline{W} possède un nombre fini de composantes irréductibles Z_1, \dots, Z_n . Soit Z l'une d'entre elles, et z son point générique. Supposons que $z \in f(X)$, disons $z = f(x)$, et notons X_0 l'adhérence de x et $f_0 : X_0 \rightarrow Z$ le morphisme dominant induit par f . D'après le lemme 2.3.23, il existe un ouvert $V = U \cap Z$ de Z (avec U ouvert de S) tel que $z \in V \subset f(X_0)$. On voit facilement que la partie $V' = U \setminus \cup_{Z_i \neq Z} Z_i$ est un ouvert de S contenant z et inclus dans $f(X)$. Ainsi z est dans un ouvert disjoint de W , ce qui est contradictoire avec le fait que $z \in \overline{W}$. Par contraposée, $z \in W$. Alors $Z \subset W$, puisque si un point $y \in Z$ était dans l'image de f , alors par platitude (lemme 2.3.10) le point z , qui en est une généralisation, y serait aussi. On en déduit que $\overline{W} \subset W$ donc $f(X)$ est ouvert. \square

2.3.24 Exemples. (1) Si X est localement noethérien et connexe, une immersion fermée $i : Z \hookrightarrow X$ avec Z distinct de \emptyset et X n'est pas plate. En effet, toute immersion fermée est de type fini, donc de présentation finie puisque X est localement noethérien. Si i est plat, d'après le théorème 2.3.22 il est ouvert donc Z est ouvert et fermé. Si $Z \neq \emptyset$, par connexité il est égal à X ensemblistement. Alors i est surjectif, donc fidèlement plat. Dans ce cas le morphisme surjectif $i^\# : \mathcal{O}_X \rightarrow i_* \mathcal{O}_Z$ est injectif d'après 2.3.11, donc un isomorphisme, donc i est un isomorphisme.

(2) Le résultat du théorème n'est pas vrai en général si f est seulement plat et localement de type fini. On peut même donner un exemple d'immersion fermée plate, de type fini,

non ouverte, comme suit. Soit k un corps et A la k -algèbre engendrée par une infinité dénombrable d'idempotents orthogonaux x_1, x_2, \dots , autrement dit A est le quotient de l'anneau de polynômes $k[X_1, X_2, \dots]$ par l'idéal engendré par les $(X_s)^2 - X_s$ et $X_s X_t$ pour $s \neq t$. Alors, l'immersion fermée $i : \text{Spec}(k) = \text{Spec}(A/m) \hookrightarrow \text{Spec}(A)$ correspondant à l'idéal maximal $m = (x_1, x_2, \dots)$ est plate et non ouverte. La platitude découle simplement du fait que l'anneau local de A en m est égal à k , car chaque générateur x_s de m est annulé par un élément qui n'est pas dans m , à savoir $1 - x_s$. On peut aussi la démontrer par un calcul direct. D'après la caractérisation (3) qui suit la définition 2.3.2, il s'agit de montrer que pour toute suite exacte $\mathcal{S} : 0 \rightarrow I \rightarrow A$, la suite $\mathcal{S} \otimes A/m : 0 \rightarrow I/mI \rightarrow A/m$ est exacte. Notons que tout élément de A s'écrit comme une somme finie $f = \sum a_s x_s$ à coefficients $a_s \in k$, où l'on convient que $x_0 = 1$. Du fait que les produits dans m s'expriment par $(\sum a_s x_s)(\sum b_s x_s) = \sum a_s b_s x_s$, on déduit que pour $f \in m$ on a l'égalité d'idéaux $(f) = (f^2)$. Ainsi, pour tout idéal I et tout $f \in I \cap m$, on a $(f) = (f)(f) \subset Im$ de sorte que $I \cap m = Im$. Ceci montre l'injectivité souhaitée, donc i est plate. Pour voir que i n'est pas ouverte, on considère pour $s \geq 1$ les idéaux maximaux $m_s = (1 - x_s, x_t; 1 \leq t \neq s)$ et les projections $\pi_s : A \rightarrow A/m_s \simeq k$. Si $f = \sum a_s x_s$, on a $\pi_s(f) = a_0 + a_s$. Si $\{m\}$ était ouvert dans $\text{Spec}(A)$, il contiendrait un ouvert principal non vide $D(f)$. Or ceci n'est pas possible, car si $D(f)$ contient m , c'est-à-dire si $a_0 \neq 0$, alors il contient tous les idéaux m_s tels que $a_s = 0$, en nombre infini.

2.4 Un aperçu sur la théorie de la descente plate

Soit S un schéma et F un préfaisceau sur S . Par définition, F est un faisceau si et seulement si pour tout ouvert $U \subset S$ et tout recouvrement ouvert $(U_i)_{i \in I}$ de U , la suite d'applications d'ensembles

$$F(U) \longrightarrow \prod_i F(U_i) \rightrightarrows \prod_{i,j} F(U_i \cap U_j)$$

est exacte. Rappelons que ceci signifie que pour toute collection de sections $s_i \in F(U_i)$ telles que $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$ pour tous i, j , il existe une unique section $s \in F(U)$ dont la restriction à U_i est s_i , pour tout i . On peut observer que bien sûr $U_i \cap U_j = U_i \times_U U_j$, et une fois réécrite sous cette forme :

$$F(U) \longrightarrow \prod_i F(U_i) \rightrightarrows \prod_{i,j} F(U_i \times_U U_j),$$

la suite a un sens pour tout S -foncteur F , tout S -schéma U , et toute collection de S -morphisms $\{U_i \rightarrow U\}_{i \in I}$. C'est une des grandes découvertes de Grothendieck que pour de nombreux foncteurs définis à l'aide des objets de la géométrie algébrique (schémas, modules, morphismes...), la propriété de faisceau, sous la forme que nous venons de lui donner, est vérifiée pour des « recouvrements » $\{U_i \rightarrow U\}_{i \in I}$ beaucoup plus généraux que des sommes disjointes surjectives d'immersions ouvertes (faisceau Zariski). La théorie de la descente fidèlement plate est l'expression de ces idées pour certaines familles $\{U_i \rightarrow U\}$ dont le morphisme associé $\coprod U_i \rightarrow U$ est fidèlement plat. À titre d'aperçu, nous allons montrer ici que tout S -schéma définit (par son foncteur de points) un faisceau pour la topologie fppf, au sens de la définition 2.4.2 ci-dessous.

2.4.1 Remarque. On peut pousser plus loin la théorie pour donner naissance à la notion de *topologie de Grothendieck* (voir e.g. Vistoli [Vi], 2.3.1). Dans cette théorie, la place prépondérante est donnée aux *recouvrements* plutôt qu'aux ouverts individuels ; ce sont des familles de morphismes $\{U_i \rightarrow U\}$ qui doivent satisfaire certains axiomes naturels. Les quatre topologies de Grothendieck les plus importantes sur un schéma sont les topologies de *Zariski*, *étale*, *fppf* et *fpqc* (*fppf* pour *fidèlement plat de présentation finie* et *fpqc* pour *fidèlement plat quasi-compact*). Leurs recouvrements sont donnés par les familles de *S*-morphisms $\{U_i \rightarrow U\}$ dont le morphisme associé $\coprod U_i \rightarrow U$ est :

- (i) surjectif et chaque $U_i \rightarrow U$ est une immersion ouverte,
- (ii) surjectif et étale (définition 3.3.3),
- (iii) fidèlement plat et localement de présentation finie,
- (iv) fpqc (au sens de Vistoli [Vi], définition 2.34).

Elles sont ici rangées par ordre de finesse croissante. (Nous verrons plus loin que les morphismes étales sont plats et localement de présentation finie.) Ces topologies permettent de construire des théories cohomologiques extrêmement utiles ; par exemple, l'utilisation de la cohomologie étale a permis la démonstration des célèbres conjectures de Weil sur le nombre de points rationnels des variétés sur les corps finis.

2.4.2 Définition. Un *recouvrement fppf* est une famille $\{U_i \rightarrow U\}_{i \in I}$ de *S*-morphisms telle que le morphisme associé $\coprod U_i \rightarrow U$ est fidèlement plat et localement de présentation finie. Un *préfaisceau sur S* est un *S*-foncteur $F : (\text{Sch}/S)^\circ \rightarrow \text{Ens}$. Un *faisceau pour la topologie fppf sur S* (ou simplement un *faisceau fppf sur S*) est un préfaisceau F sur S tel que pour tout recouvrement fppf $\{U_i \rightarrow U\}$, on a un diagramme exact :

$$F(U) \longrightarrow \prod_i F(U_i) \rightrightarrows \prod_{i,j} F(U_i \times_U U_j) .$$

2.4.3 Remarque. Dans la définition usuelle d'un faisceau, le produit de droite porte sur les couples d'indices i, j distincts : en fait $U_i \cap U_j = U_i$ donc la donnée de recollement sur cette intersection n'apporte aucune information. Dans la définition 2.4.2, au contraire, *il est primordial d'inclure les couples d'indices égaux*. En effet, typiquement, il existe des recouvrements fppf composés d'un seul morphisme $U' \rightarrow U$ et l'« auto-intersection » $U' \times_U U'$ n'a aucune raison de ressembler à U' . On peut prendre bêtement un corps k , le schéma $U = \text{Spec}(k)$ et le recouvrement fppf $U' = \mathbb{A}_k^1$. On a alors $U' \times_U U' = \mathbb{A}_k^2$.

2.4.4 Lemme. Soit F un *S*-préfaisceau. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (1) F est un faisceau fppf sur S ,
- (2) F transforme les sommes disjointes arbitraires en produits directs et pour tout *S*-morphisme $U' \rightarrow U$ fidèlement plat localement de présentation finie, notant $U'' = U' \times_U U'$ muni de ses deux projections vers U' , le diagramme $F(U) \rightarrow F(U') \rightrightarrows F(U'')$ est exact.

Preuve : Supposons que F est un faisceau fppf sur S . Si U est une somme disjointe de schémas U_i , en appliquant la propriété de faisceau au recouvrement de U par les U_i

on trouve que $F(\amalg U_i) = F(U) \rightarrow \amalg F(U_i)$ est bijectif, ce qui est la première partie de (2). (On notera que la propriété de faisceau appliquée au recouvrement du schéma vide par la famille vide montre que $F(\emptyset)$ est un singleton.) La deuxième partie de (2) est la propriété de faisceau pour un recouvrement composée d'un seul morphisme. Réciproquement, supposons que F vérifie (2) et soit $\{U_i \rightarrow U\}$ un recouvrement fppf. Posons $U' = \amalg_{i \in I} U_i$, de sorte que $U'' = U' \times_U U' = \amalg_{i,j \in I} U_i \times_U U_j$. L'hypothèse (2) implique que $F(U') = F(\amalg U_i) \simeq \amalg F(U_i)$ et $F(U'') = F(\amalg U_i \times_U U_j) \simeq \amalg F(U_i \times_U U_j)$ et que le diagramme $F(U) \rightarrow F(U') \rightrightarrows F(U'')$ est exact. On en déduit que la suite de la définition 2.4.2 est exacte, donc F est un faisceau. \square

2.4.5 Exercice. (1) Soit S un schéma, E un ensemble, \mathcal{F} le préfaisceau des applications constantes à valeurs dans E , étendu à la catégorie des S -schémas par la formule $\mathcal{F}(T) = \Gamma(T, f^*\mathcal{F})$ où $f : T \rightarrow S$ est le morphisme de structure et f^* est l'image inverse de préfaisceaux. En choisissant S, E, \mathcal{F} convenablement, montrez que \mathcal{F} ne transforme pas nécessairement les sommes disjointes arbitraires en produits directs.

(2) Soient F, G deux S -foncteurs. On définit le foncteur $H = \text{Hom}_S(F, G)$ appelé *foncteur Hom* par $H(T) = \text{Hom}_T(F_T, G_T)$ où $F_T = F \times_S T$. Montrez que si F est représentable par un S -schéma et G est un faisceau, alors H est un faisceau. (Observez que $H(T) = \text{Hom}_S(F_T, G) = G(F_T)$.)

2.4.6 Lemme. Soient $f : S' \rightarrow S$ un morphisme fidèlement plat et localement de présentation finie, $S'' = S' \times_S S'$, $\text{pr}_1, \text{pr}_2 : S'' \rightarrow S'$ les projections et $g = f \circ \text{pr}_1 = f \circ \text{pr}_2$. Alors,

(1) le morphisme $f : S' \rightarrow S$ est un quotient topologique. De manière équivalente, f est surjectif et une partie $U \subset S$ est ouverte si et seulement si $f^{-1}(U)$ est ouverte ; ou encore, f identifie S au quotient de S' par la relation d'équivalence dont les classes sont les fibres de f , muni de la topologie quotient ;

(2) le diagramme d'ensembles

$$\mathcal{O}_S \longrightarrow f_*\mathcal{O}_{S'} \rightrightarrows g_*\mathcal{O}_{S''}$$

est exact, ou de manière équivalente, la suite de morphismes de \mathcal{O}_S -modules

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_S \xrightarrow{f^\#} f_*\mathcal{O}_{S'} \xrightarrow{\text{pr}_1^\# - \text{pr}_2^\#} g_*\mathcal{O}_{S''}$$

est exacte.

Preuve : (1) Le morphisme f est surjectif par définition. Il s'ensuit que si $f^{-1}(U)$ est ouvert, alors $U = f(f^{-1}(U))$ aussi d'après le théorème 2.3.22.

(2) L'injectivité à gauche découle de la proposition 2.3.11. La seule chose délicate à prouver est que $\ker(\text{pr}_1^\# - \text{pr}_2^\#) \subset \text{im}(f^\#)$, l'inclusion réciproque étant claire.

Un premier cas particulier est celui où f est un recouvrement Zariski (somme surjective d'immersions ouvertes). Alors, l'exactitude de la suite est simplement le recollement usuel des fonctions pour la topologie de Zariski, i.e. la propriété de faisceau de \mathcal{O}_S .

Un deuxième cas particulier est celui où f est un morphisme affine. La question étant locale, on peut supposer $S = \text{Spec}(A)$ affine. Alors $S' = \text{Spec}(B)$ est aussi affine. On doit montrer que dans la suite $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow B \otimes_A B$ où les flèches sont $i := f^\#$ et $d := \text{pr}_1^\# - \text{pr}_2^\#$, on a $\ker(d) \subset \text{im}(i)$. Supposons d'abord que i possède une rétraction, i.e. un morphisme de A -algèbres $r : B \rightarrow A$. Alors si $d(b) = b \otimes 1 - 1 \otimes b = 0$, en appliquant $ir \otimes \text{id} : B \otimes B \rightarrow B$ on trouve $ir(b) = b \in \text{im}(i)$ et c'est gagné. Dans le cas général, la suite $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow B \otimes_A B$ est exacte si et seulement si elle l'est après une extension fidèlement plate $A \rightarrow C$. Choisissons l'extension donnée par $i : A \rightarrow B = C$, le morphisme $i : A \rightarrow B$ devient $i \otimes \text{id} : B \rightarrow B \otimes_A B$ et il admet alors une rétraction, précisément $b_1 \otimes b_2 \mapsto b_1 b_2$. On s'est ainsi ramené au cas déjà traité où i admet une rétraction.

Passons au cas général. Soient S'_i des ouverts affines qui recouvrent S' . Comme f est ouvert surjectif, les $S_i = f(S'_i)$ sont des ouverts qui recouvrent S . Considérons les schémas $T = \amalg S_i$, $T' = \amalg S'_i$ et le morphisme $\alpha : T' \rightarrow T$ induit par f . Notons aussi $T'' = T' \times_T T'$, $U = T \times_S T$, $U' = T' \times_{S'} T'$ les carrés fibrés. On a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & U' & \xrightarrow{\beta} & U \\
 & & \Downarrow & & \Downarrow \\
 T'' & \rightrightarrows & T' & \xrightarrow{\alpha} & T \\
 \downarrow w & & \downarrow v & & \downarrow u \\
 S'' & \rightrightarrows & S' & \xrightarrow{f} & S
 \end{array}$$

Il est facile de voir que α, β, u, v sont fidèlement plats ; on prendra garde qu'en revanche $T'' \rightarrow S''$ n'a pas de raison d'être surjectif. Comme S'_i est affine et S_i séparé (c'est un ouvert d'un schéma affine), d'après 1.4.9 le morphisme α est affine. En utilisant les cas particuliers déjà traités, on trouve pour α, u, v des suites exactes analogues à celle qui nous intéresse. Comme le foncteur d'image directe des faisceaux est exact à gauche, on peut pousser en avant sur S ces suites sans perdre l'exactitude. Par ailleurs, étant donné que dans le diagramme précédent toutes les compositions de morphismes à valeurs dans S coïncident, on peut sans crainte de confusion alléger la notation des images directes sur S en notant simplement $\mathcal{O}_{S'}$, \mathcal{O}_T , etc. au lieu de $f_*\mathcal{O}_{S'}$, $u_*\mathcal{O}_T$, etc. On obtient le diagramme commutatif de faisceaux sur S :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_S & \xrightarrow{f^\#} & \mathcal{O}_{S'} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{S''} \\
 & & \downarrow u^\# & & \downarrow v^\# & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_T & \xrightarrow{\alpha^\#} & \mathcal{O}_{T'} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{T''} \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_U & \xrightarrow{\beta^\#} & \mathcal{O}_{U'} & &
 \end{array}$$

Sachant que les colonnes et les deux dernières lignes sont exactes, une chasse au diagramme facile montre que la première ligne est exacte en $\mathcal{O}_{S'}$, comme souhaité. \square

On sait qu'à tout S -schéma est associé un préfaisceau : son foncteur de points. Notre résultat principal est le suivant.

2.4.7 Théorème. *Tout S -schéma est un faisceau fppf sur S .*

Preuve : Explicitons l'énoncé : d'après le lemme 2.4.4, il s'agit de démontrer que le foncteur de points d'un S -schéma transforme les sommes disjointes en produits et que pour tout morphisme fidèlement plat localement de présentation finie de S -schémas $U' \rightarrow U$, le diagramme d'ensembles $X(U) \rightarrow X(U') \rightrightarrows X(U'')$ est exact, où $U'' = U' \times_U U'$. La première condition provient directement de la définition catégorique des sommes disjointes. Il ne reste qu'à vérifier la seconde condition. Comme $\text{Hom}_S(U, X) = \text{Hom}_U(U, X \times_S U)$ par définition du produit fibré, en remplaçant S par U et X par $X \times_S U$ on se ramène au cas $S = U$. On note alors $f : S' \rightarrow S$ le morphisme fidèlement plat localement de présentation finie considéré et on démontre que $X(S) \rightarrow X(S') \rightrightarrows X(S'')$ est exact. L'exactitude à gauche provient du fait que f est un épimorphisme, cf proposition 2.3.11. Montrons l'exactitude à droite. Soit $\alpha' : S' \rightarrow X$ un morphisme tel que $\alpha' \circ \text{pr}_1 = \alpha' \circ \text{pr}_2 =: g$. Alors α' est constant sur les fibres de f , donc d'après le point (1) du lemme 2.4.6 il se factorise en une application continue $\alpha : S \rightarrow X$. Pour définir un morphisme de schémas, il reste à construire un morphisme de faisceaux $\alpha^\# : \mathcal{O}_X \rightarrow \alpha_* \mathcal{O}_{S'}$. Soit V un ouvert de X , $U = \alpha^{-1}(V)$, $U' = (\alpha')^{-1}(V)$, $U'' = g^{-1}(V)$. L'hypothèse $\alpha' \circ \text{pr}_1 = \alpha' \circ \text{pr}_2$ implique que le morphisme $(\alpha')^\# : \mathcal{O}_X(V) \rightarrow \mathcal{O}_{S'}(U')$ a son image dans le noyau de $\text{pr}_1^\# - \text{pr}_2^\# : \mathcal{O}_{S'}(U') \rightarrow \mathcal{O}_{S''}(U'')$. D'après 2.4.6(2), il s'ensuit qu'il se factorise par $\mathcal{O}_S(U)$. Pour V variable, les flèches $\mathcal{O}_X(V) \rightarrow \mathcal{O}_S(U)$ définissent un morphisme de faisceaux $\mathcal{O}_X \rightarrow \alpha_* \mathcal{O}_{S'}$ qui est le morphisme recherché. \square

2.4.8 Remarques. (1) Cet énoncé a pour conséquence que pour définir un morphisme $\alpha : S \rightarrow X$, il suffit de définir un morphisme $\alpha' : S' \rightarrow X$ sur une certaine extension fidèlement plate localement de présentation finie $S' \rightarrow S$ et de vérifier une condition de recollement sur $S'' = S' \times_S S'$. Ce résultat est extrêmement puissant en pratique.

(2) Le théorème 2.4.7 montre que le plongement de Yoneda de la catégorie des S -schémas dans la catégorie des S -foncteurs se factorise par la catégorie des faisceaux fppf sur S . Cette dernière catégorie est extrêmement utile dans de nombreuses questions, par exemple pour la construction de quotients de schémas par des actions de groupes algébriques.

Nous terminons ce paragraphe en citant sans démonstration un énoncé sur un exemple fondamental : le foncteur de Picard. Les définitions et propriétés de base des faisceaux inversibles et du groupe de Picard d'un schéma sont donnés dans 4.2. Fixons un S -schéma X . Pour classifier les fibrés inversibles sur X , il est naturel de définir un S -foncteur $P_{X/S}$ par la formule

$$P_{X/S}(T) = \text{Pic}(X \times_S T).$$

Dans l'idéal, si ce foncteur est représentable, le S -schéma qui le représente, unique à unique isomorphisme près, est l'objet recherché qui *classifie* les faisceaux inversibles en le sens très précis (fonctoriel) qu'on vient de lui donner. Malheureusement, en général ce foncteur n'est pas représentable car ce n'est même pas un faisceau. En fait, la plupart du

temps ce n'est même pas un faisceau pour la topologie de Zariski sur S : si k est un corps fixé et $X = S$ est l'espace projectif \mathbb{P}_k^n , alors le recouvrement de Zariski affine standard $U_i = D_+(x_i)$ est formé d'ouverts isomorphes à l'espace affine, dont le groupe de Picard est trivial, alors que $\text{Pic}(X) \simeq \mathbb{Z}$. Ainsi, l'injectivité à gauche dans le diagramme de faisceau pour $\{U_i \rightarrow U = X\}$ n'est pas satisfaite. Un meilleur candidat de foncteur représentable est le suivant :

2.4.9 Définition. Le *foncteur de Picard* de $X \rightarrow S$ est le faisceau fppf associé au pré-faisceau $P_{X/S}$. Il est noté $\text{Pic}_{X/S}$.

La définition et la construction du faisceau fppf associé, que nous ne donnons pas ici, ressemblent à ce qu'il se passe pour la topologie de Zariski. Grothendieck a démontré le résultat suivant (voir [BLR], th. 8.2/1 ou [Kl2], th. 9.4.8) :

2.4.10 Théorème. *Supposons $X \rightarrow S$ projectif, plat, de présentation finie, à fibrés géométriques intègres. Alors le foncteur de Picard $\text{Pic}_{X/S}$ est représentable par un S -schéma séparé et localement de présentation finie.*

Si X est une variété abélienne sur un corps k , ce théorème affirme que $\text{Pic}_{X/k}$ est représentable. On définit la *variété abélienne duale* de X/k comme un certain sous-schéma de $\text{Pic}_{X/k}$ classifiant les faisceaux invariants par translation. Nous renvoyons à la littérature sur les variétés abéliennes pour plus de détails.

3 Morphismes lisses, non ramifiés, étales

3.1 Dérivations et différentielles en algèbre commutative

En préambule, soulignons un point de notation. Soit $f : A \rightarrow B$ un morphisme de R -algèbres. Alors tout B -module N est l'ensemble sous-jacent à un A -module, dont la multiplication scalaire se fait par f , et que nous noterons N_A . Le foncteur $B\text{-Mod} \rightarrow A\text{-Mod}$, $N \mapsto N_A$ est adjoint à droite du foncteur $A\text{-Mod} \rightarrow B\text{-Mod}$, $M \mapsto M \otimes_A B$, ce qui signifie qu'on a des bijections

$$\text{Hom}_B(M \otimes_A B, N) = \text{Hom}_A(M, N_A)$$

fonctorielles en M et N . Très souvent, lorsqu'il est clair que c'est la structure de A -module de N qui est en jeu, on note simplement N au lieu de N_A . Cependant, dans ce qui suit, nous insisterons sur la notation N_A lorsqu'elle améliorera la clarté d'un énoncé.

3.1.1 Dérivations. Soit $R \rightarrow A$ un morphisme d'anneaux et M un A -module. On appelle *R -dérivation de A dans M* une application R -linéaire $\partial : A \rightarrow M$ qui satisfait la règle de Leibniz $\partial(xy) = x\partial(y) + y\partial(x)$ pour tous $x, y \in A$. On a alors $\partial(r.1) = 0$ pour tout $r \in R$. L'ensemble des dérivations $\text{Der}_R(A, M)$ est un A -module, et c'est un sous- R -module de $\text{Hom}_R(A, M)$.

3.1.2 Proposition. Soit $f : A \rightarrow B$ un morphisme de R -algèbres et N un B -module. Alors, la suite de R -modules

$$0 \longrightarrow \text{Der}_A(B, N) \longrightarrow \text{Der}_R(B, N) \longrightarrow \text{Der}_R(A, N_A),$$

où la première flèche est l'inclusion et la seconde la restriction, est exacte.

Preuve : Toute A -dérivation est une R -dérivation ; une R -dérivation $\partial : B \rightarrow N$ est une A -dérivation si et seulement si sa restriction à A est nulle. \square

Supposons maintenant que $B = A/I$ est un quotient de A . Dans ce cas, il découle de la règle de Leibniz que pour tout B -module N et toute R -dérivation $\partial : A \rightarrow N_A$, la restriction $\partial|_I$ est A -linéaire et nulle sur I^2 . Elle définit donc un morphisme de B -modules de I/I^2 dans N . Ceci donne lieu à une flèche $\text{Der}_R(A, N_A) \rightarrow \text{Hom}_B(I/I^2, N)$.

3.1.3 Proposition. Soit $f : A \rightarrow B = A/I$ un morphisme surjectif de R -algèbres et N un B -module. Alors, la suite de R -modules

$$0 \longrightarrow \text{Der}_R(B, N) \longrightarrow \text{Der}_R(A, N_A) \longrightarrow \text{Hom}_B(I/I^2, N),$$

où la flèche de droite est induite par la restriction, est exacte.

Preuve : On part de la suite exacte de 3.1.2, complétée avec $\text{Hom}_B(I/I^2, N)$. Toute A -dérivation $\partial : B \rightarrow N$ est nulle, car nulle sur A , donc $\text{Der}_A(B, N) = 0$. De plus, il est clair que les R -dérivations $\partial : A \rightarrow N_A$ qui proviennent d'une dérivation $B \rightarrow N$ sont celles qui vérifient $\partial|_{I/I^2} = 0$. \square

3.1.4 Extensions d'algèbres. Considérons maintenant un morphisme de R -algèbres $f : B \rightarrow A$ surjectif, à noyau N de carré nul. Alors la structure naturelle de B -module de N se factorise via f en une structure de A -module.

3.1.5 Définition. Soit M un A -module. On appelle *extension de A par M* un morphisme de R -algèbres $f : B \rightarrow A$ surjectif, à noyau M de carré nul, dont la structure de A -module induite par f est la structure originale.

Une extension sera notée comme une suite exacte $0 \rightarrow M \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow 0$. On dit que l'extension est *scindée*, ou *triviale*, s'il existe un morphisme de R -algèbres $s : A \rightarrow B$ tel que $f \circ s = \text{id}_A$. Dans ce cas, on a $B = A \oplus M$ comme R -module, et réciproquement, partant de A et M , on peut munir la somme directe $A \oplus M$ d'une structure d'extension triviale notée $A + M$ en définissant la multiplication par

$$(a \oplus m)(a' \oplus m') = aa' \oplus (am' + a'm).$$

Soit $f : B \rightarrow A$ une extension de A par M , comme ci-dessus. Étant donné un morphisme de R -algèbres $g : C \rightarrow A$, on appelle *relèvement de g à B* un morphisme $h : C \rightarrow B$ tel que $f \circ h = g$. Noter qu'alors M est un C -module via g .

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & B & \xrightarrow{f} & A \longrightarrow 0. \\ & & & & \uparrow & \nearrow g & \\ & & & & C & & \end{array}$$

$\exists ?$

3.1.6 Lemme. *L'ensemble des relèvements de g à B est vide ou en bijection avec $\text{Der}_R(C, M)$.*

Preuve : Si h, h' sont deux relèvements, alors $\partial := h' - h$ est à valeurs dans M , qui est muni d'une structure de C -module via g . En exprimant que $h' = h + \partial$ est un morphisme d'algèbres, on trouve que ∂ est une dérivation. Réciproquement, pour tout relèvement $h : C \rightarrow B$ et toute dérivation $\partial \in \text{Der}_R(C, M)$, l'application $h + \partial$ est un autre relèvement de g . \square

3.1.7 Différentielles. Il est clair que $\text{Der}_R(A, M)$ est un foncteur covariant en M , et il se trouve que ce foncteur est représentable, c'est-à-dire qu'il existe une dérivation universelle

$$d = d_{A/R} : A \rightarrow \Omega_{A/R}^1$$

telle que pour toute dérivation $\partial : A \rightarrow M$, il existe un unique morphisme de A -modules $t : \Omega_{A/R}^1 \rightarrow M$ tel que $\partial = t \circ d$. On a donc un isomorphisme canonique et fonctoriel en M :

$$\text{Der}_R(A, M) = \text{Hom}_A(\Omega_{A/R}^1, M).$$

Le module $\Omega_{A/R}^1$ est appelé *R -module des 1-formes différentielles*. En voici une construction.

3.1.8 Construction. Notons $m : A \otimes_R A \rightarrow A, f \otimes g \mapsto fg$ la multiplication de l'algèbre A . Posons $I = \ker(m)$ et $P = (A \otimes_R A)/I^2$, de sorte que m induit une extension de A par I/I^2 :

$$0 \longrightarrow I/I^2 \longrightarrow P \longrightarrow A \longrightarrow 0.$$

Cette extension est triviale : elle possède deux sections naturelles $p_1(x) = x \otimes 1$ et $p_2(x) = 1 \otimes x$. Ceci fournit deux relèvements de id_A qui diffèrent donc par une dérivation :

$$d : A \rightarrow I/I^2 \quad , \quad x \mapsto 1 \otimes x - x \otimes 1 \quad \text{mod } I^2.$$

On note que la structure de A -module de I/I^2 peut être donnée par l'une ou l'autre des sections p_1, p_2 . Par ailleurs I/I^2 est engendré comme A -module par les éléments de la forme dx , car pour tout $i = \sum x_k \otimes y_k \in I$ avec $\sum x_k y_k = 0$, on a modulo I^2 :

$$i = \sum x_k \otimes y_k - \left(\sum x_k y_k \right) 1 = \sum p_1(x_k)(1 \otimes y_k) - \sum p_1(x_k)(y_k \otimes 1) = \sum x_k d(y_k).$$

3.1.9 Vérification de la propriété universelle. Étant donné un A -module M et une dérivation $\partial : A \rightarrow M$, on doit montrer qu'il existe un unique morphisme de A -modules $f : I/I^2 \rightarrow M$ tel que $f \circ d = \partial$. L'unicité est claire puisque I/I^2 est engendré par les dx . Maintenant, il est facile de voir qu'en posant

$$u(x \otimes y) = xy + x\partial(y),$$

on définit un morphisme de R -algèbres $u : A \otimes_R A \rightarrow A + M$ qui envoie I dans M . Puisque M est de carré nul dans $A + M$, on obtient un morphisme induit $\bar{u} : P \rightarrow A + M$ et en restriction à I/I^2 une application R -linéaire

$$f : I/I^2 \longrightarrow M \quad , \quad \sum x_k \otimes y_k \mapsto \sum x_k \partial(y_k).$$

Pour tout $x \in A$, on a

$$(f \circ d)(x) = f(1 \otimes x - x \otimes 1) = 1\partial(x) - x\partial(1) = \partial(x).$$

Ceci termine la vérification de la propriété universelle. \square

3.1.10 Proposition (Suite exacte cotangente). *Pour tout morphisme de R -algèbres $f : A \rightarrow B$, il y a une suite exacte*

$$\Omega_{A/R}^1 \otimes_A B \longrightarrow \Omega_{B/R}^1 \longrightarrow \Omega_{B/A}^1 \longrightarrow 0$$

induite canoniquement par celle de 3.1.2.

La suite exacte cotangente est aussi appelée *première suite exacte fondamentale*.

Preuve : On part de la suite exacte des dérivations 3.1.2 en remplaçant les modules $\text{Der}(-, -)$ par $\text{Hom}(\Omega^1, -)$. En tenant compte du fait que

$$\text{Der}_R(A, N_A) = \text{Hom}_A(\Omega_{A/R}^1, N_A) = \text{Hom}_B(\Omega_{A/R}^1 \otimes B, N),$$

on trouve une suite exacte fonctorielle en N :

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_B(\Omega_{B/A}^1, N) \longrightarrow \text{Hom}_B(\Omega_{B/R}^1, N) \longrightarrow \text{Hom}_B(\Omega_{A/R}^1 \otimes B, N).$$

D'après le lemme de Yoneda (voir notamment la remarque (3) dans 1.4.4), ceci donne canoniquement la suite exacte annoncée. Pour compléter 1.4.4 qui n'était qu'une allusion, montrons directement qu'une suite exacte

$$\text{Hom}_B(R, N) \xrightarrow{g^*} \text{Hom}_B(Q, N) \xrightarrow{f^*} \text{Hom}_B(P, N)$$

fonctorielle en N induit une suite exacte $P \xrightarrow{f} Q \xrightarrow{g} R$. D'abord, par la pleine fidélité du foncteur $P \mapsto \text{Hom}_B(P, -)$ (voir 1.4.4, remarque (3)), les morphismes entre modules Hom ci-dessus proviennent d'unique morphismes $f : P \rightarrow Q$, $g : Q \rightarrow R$. En prenant $N = R$ et $u = \text{id}_R \in \text{Hom}_B(R, N)$, le fait que $f^* \circ g^* = 0$ donne $g \circ f = 0$ donc $\text{im}(f) \subset \ker(g)$. En prenant $N = Q/\text{im}(f)$ et $u : Q \rightarrow Q/\text{im}(f)$ égal à la projection canonique, le fait que $f^*(u) = u \circ f = 0$ implique qu'il existe un morphisme $v : R \rightarrow N$ tel que $u = v \circ g$. Ceci implique $\ker(g) \subset \text{im}(f)$. \square

3.1.11 Proposition (Suite exacte conormale). *Pour tout morphisme surjectif de R -algèbres $f : A \rightarrow B = A/I$, il y a une suite exacte :*

$$I/I^2 \xrightarrow{\delta} \Omega_{A/R}^1 \otimes_A B \longrightarrow \Omega_{B/R}^1 \longrightarrow 0$$

avec $\delta(i) = d_{A/R}(i) \otimes 1$, induite canoniquement par celle de 3.1.3. \square

La suite exacte conormale est aussi appelée *deuxième suite exacte fondamentale*.

Preuve : Partant de la suite exacte des dérivations 3.1.3, on trouve une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_B(\Omega_{B/R}^1, N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(\Omega_{A/R}^1 \otimes_A B, N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_B(I/I^2, N).$$

D'après le lemme de Yoneda, ceci donne canoniquement la suite exacte annoncée. L'expression de δ se vérifie en observant que c'est l'unique flèche qui induit la restriction à I/I^2 sur les modules de dérivations, fonctoriellement en N . \square

3.1.12 Corollaire. *Si B est une R -algèbre de type fini, resp. de présentation finie, alors $\Omega_{B/R}^1$ est un B -module de type fini, resp. de présentation finie. Plus précisément, si B est engendrée par une partie E alors $\Omega_{B/R}^1$ est engendré par la partie dE , et si $B \simeq R[X_1, \dots, X_n]/(P_1, \dots, P_m)$ alors $\Omega_{B/R}^1 \simeq (BdX_1 \oplus \dots \oplus BdX_n)/(dP_1, \dots, dP_m)$.*

Preuve : Ceci résulte immédiatement de 3.1.11. \square

3.1.13 Exemple. Soit ℓ/k une extension finie de corps. Alors $\Omega_{\ell/k}^1 = 0$ si et seulement si ℓ/k est séparable. En effet, si l'extension est séparable, elle est engendrée par un élément t racine d'un polynôme P tel que $P'(t) \neq 0$ dans ℓ . Alors $\Omega_{\ell/k}^1 \simeq \ell dt/P'(t)dt = 0$. Sinon, il existe une sous-extension $m \subset \ell$ qui est monogène purement inséparable. On a $\Omega_{\ell/m}^1 \simeq \ell \neq 0$ et la surjection $\Omega_{\ell/k}^1 \rightarrow \Omega_{\ell/m}^1$ de la suite exacte cotangente montre que $\Omega_{\ell/k}^1 \neq 0$.

3.1.14 Proposition. *Soit $R \rightarrow S$ un morphisme d'anneaux. Alors on a un isomorphisme canonique $\Omega_{A \otimes_R S/S}^1 = \Omega_{A/R}^1 \otimes_R S$.*

Preuve : Pour tout $A \otimes_R S$ -module N , il est facile de voir que via l'isomorphisme canonique $\mathrm{Hom}_S(A \otimes_R S, N) = \mathrm{Hom}_R(A, N_R)$, les sous-ensembles $\mathrm{Der}_S(A \otimes_R S, N)$ et $\mathrm{Der}_R(A, N)$ se correspondent. Il s'ensuit que

$$\mathrm{Hom}_{A \otimes_R S}(\Omega_{A \otimes_R S/S}^1, N) = \mathrm{Hom}_A(\Omega_{A/R}^1, N_A) = \mathrm{Hom}_{A \otimes_R S}(\Omega_{A/R}^1 \otimes_R S, N).$$

On en déduit l'existence de l'isomorphisme indiqué. \square

3.1.15 Proposition. *Soit $S \subset A$ une partie multiplicative, alors on a un isomorphisme canonique $\Omega_{S^{-1}A/R}^1 = \Omega_{A/R}^1 \otimes_A S^{-1}A$.*

Preuve : Soit N un $S^{-1}A$ -module. En vertu de la règle de Leibniz, toute R -dérivation $\partial : A \rightarrow N_A$ s'étend de manière unique à $S^{-1}A$ par la formule

$$\partial(a/s) = (1/s^2)(a\partial s - s\partial a).$$

Ainsi $\mathrm{Der}_R(S^{-1}A, N) = \mathrm{Der}_R(A, N_A)$, c'est-à-dire

$$\mathrm{Hom}_{S^{-1}A}(\Omega_{S^{-1}A/R}^1, N) = \mathrm{Hom}_{S^{-1}A}(\Omega_{A/R}^1 \otimes_A S^{-1}A, N)$$

fonctoriellement en N , et on conclut. \square

3.1.16 Proposition. Soit $C = A \otimes_R B$ une algèbre produit tensoriel. Alors, on a un isomorphisme canonique $\Omega_{C/R}^1 = (\Omega_{A/R}^1 \otimes_A C) \oplus (\Omega_{B/R}^1 \otimes_B C)$.

Preuve : Soit N un C -module et $\partial : C \rightarrow N$ une R -dérivation. Alors

$$\partial(a \otimes b) = (1 \otimes b)\partial'(a) + (a \otimes 1)\partial''(a)$$

où $\partial' : A \rightarrow N_A$, $a \mapsto \partial(a \otimes 1)$ et $\partial'' : B \rightarrow N_B$, $b \mapsto \partial(1 \otimes b)$ sont des R -dérivations. Ceci montre que $\text{Der}_R(C, N) = \text{Der}_R(A, N_A) \times \text{Der}_R(B, N_B)$ donc

$$\begin{aligned} \text{Hom}_C(\Omega_{C/R}^1, N) &= \text{Hom}_A(\Omega_{A/R}^1, N_A) \times \text{Hom}_B(\Omega_{B/R}^1, N_B) \\ &= \text{Hom}_A((\Omega_{A/R}^1 \otimes_A C) \oplus (\Omega_{B/R}^1 \otimes_B C), N) \end{aligned}$$

fonctoriellement en N , et on conclut. □

3.2 Dérivations et différentielles sur les schémas

3.2.1 Définitions. Soit X un schéma. Un *sous-schéma ouvert* de X est un schéma de la forme $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ où U est un ouvert de l'espace topologique de X . Un *sous-schéma fermé* de X est un schéma de la forme $(Z, i^*(\mathcal{O}_X/\mathcal{J}))$ où \mathcal{J} est un faisceau quasi-cohérent d'idéaux, Z est le support de $\mathcal{O}_X/\mathcal{J}$, et $i : Z \hookrightarrow X$ l'inclusion. Un *sous-schéma* de X est un sous-schéma fermé d'un sous-schéma ouvert de X ; il est accompagné d'une injection canonique $j : Z \rightarrow X$. Une *immersion (ouverte, fermée)* est un morphisme de schémas $f : Y \rightarrow X$ qui se factorise en

$$Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{j} X$$

où g est un isomorphisme, Z est un sous-schéma (ouvert, fermé) de X et j est l'injection canonique.

Notons que si $f : Y \rightarrow X$ est une immersion, alors $Z := f(Y)$ est localement fermé dans X et il existe un plus grand ouvert de X dans lequel Z est fermé, qui est $U = X \setminus \partial Z$ où $\partial Z = \overline{Z} \setminus Z$.

Par ailleurs, d'après ces définitions, une immersion est nécessairement injective. L'usage du terme est donc plus restrictif qu'en géométrie différentielle, où ce n'est pas forcément le cas, et où la notion la plus proche de celle d'immersion (ouverte, fermée) au sens de la définition 3.2.1 est celle de *plongement* (ouvert, fermé).

Toute immersion *fermée* est un monomorphisme affine (en particulier quasi-compact) de type fini, pas nécessairement de présentation finie. Toute immersion *ouverte* est un monomorphisme plat localement de présentation finie, pas nécessairement quasi-compact (en particulier pas nécessairement affine). En particulier, comme un monomorphisme de schémas est séparé, toute immersion est séparée et localement de type fini. Pour des contre-exemples sur un corps k , considérer $X = \text{Spec}(k[x_1, x_2, \dots])$ qui est un espace affine de dimension infinie, O l'origine i.e. le point de coordonnées nulles, et $U = X \setminus \{O\}$. Alors l'immersion fermée $\{O\} \rightarrow X$ n'est pas de présentation finie et l'immersion ouverte $U \rightarrow X$ n'est pas quasi-compacte.

3.2.2 Exemple. Pour tout morphisme de schémas $f : X \rightarrow S$, la diagonale $\Delta : X \rightarrow X \times_Y X$ est une immersion. En effet, notons d'abord que Δ est un homéomorphisme sur son image, d'inverse $\text{pr}_1 : X \times_Y X \rightarrow X$. De plus, si $x \in X$ et $s = f(x)$, notons $V = \text{Spec}(R)$ un voisinage ouvert affine de s dans S et $U = \text{Spec}(A)$ un voisinage ouvert affine de x dans $f^{-1}(V)$. Alors $U \times_V U$ est un voisinage ouvert affine de $\Delta(x)$ dans $X \times_Y X$ et $\Delta|_U : U \rightarrow U \times_V U$ est l'immersion fermée correspondant à la surjection $A \otimes_R A \rightarrow A$, $a_1 \otimes a_2 \mapsto a_1 a_2$.

3.2.3 Exemple. Pour tout morphisme de S -schémas $f : X \rightarrow Y$, le morphisme graphe $\Gamma_f : X \rightarrow X \times_S Y$, $x \mapsto (x, f(x))$ est une immersion : c'est un pullback de la diagonale de Y/S .

3.2.4 Définition. Soit $f : X \rightarrow S$ un morphisme de schémas et $\Delta : X \rightarrow X \times_S X$ sa diagonale. Soit U un ouvert de $X \times_S X$ dont $\Delta(X)$ est un sous-schéma fermé, défini par un idéal quasi-cohérent $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_U$. On appelle *faisceau des différentielles de degré 1 de X/S* le faisceau $\Delta^*(\mathcal{J}/\mathcal{J}^2)$. On le note $\Omega_{X/S}^1$, c'est un \mathcal{O}_X -module quasi-cohérent.

Il est facile de vérifier que $\Omega_{X/S}^1$ est indépendant du choix de l'ouvert U qui intervient dans la définition. Il découle de 3.1.12 que si $X \rightarrow S$ est localement de type fini, resp. localement de présentation finie, alors $\Omega_{X/S}^1$ est de type fini, resp. de présentation finie.

Notons que du fait de la compatibilité de la formation des modules de différentielles avec la localisation (voir 3.1.15), on peut aussi définir $\Omega_{X/S}^1$ par recollement à partir d'ouverts affines.

Pour finir, signalons que comme dans le cas affine, le module $\Omega_{X/S}^1$ représente le foncteur $\text{Der}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{O}_X, \mathcal{M})$ des dérivations à valeurs dans des \mathcal{O}_X -modules quasi-cohérents variables \mathcal{M} .

3.2.5 Proposition (Suite exacte cotangente). Soient $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de S -schémas. Alors la suite canonique de \mathcal{O}_X -modules

$$f^* \Omega_{Y/S}^1 \longrightarrow \Omega_{X/S}^1 \longrightarrow \Omega_{X/Y}^1 \longrightarrow 0.$$

est exacte.

C'est la version globale de 3.1.10.

3.2.6 Proposition (Suite exacte conormale). Soit $f : X \rightarrow Y$ une immersion de S -schémas. Soit \mathcal{J} le faisceau d'idéaux qui définit X dans un ouvert de Y . Alors, la suite canonique de \mathcal{O}_X -modules

$$\mathcal{J}/\mathcal{J}^2 \longrightarrow f^* \Omega_{Y/S}^1 \longrightarrow \Omega_{X/S}^1 \longrightarrow 0$$

est exacte.

C'est la version globale de 3.1.11.

3.2.7 Proposition. La formation du module des formes différentielles $\Omega_{X/S}^1$ commute :

- (1) à tout changement de base $S' \rightarrow S$: si $X' = X \times_S S'$ alors $\Omega_{X'/S'}^1 = \text{pr}_1^* \Omega_{X/S}^1$,
- (2) à la localisation sur X : si $U \subset X$ est un ouvert on a $\Omega_{U/S}^1 = \Omega_{X/S}^1|_U$ et si $x \in X$ est un point, on a $\Omega_{\text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})/S}^1 = t^* \Omega_{X/S}^1$ où $t : \text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}) \rightarrow X$ est le morphisme canonique,
- (3) au produit fibré de S -schémas : si $Z = X \times_S Y$ alors $\Omega_{Z/S}^1 = \text{pr}_1^* \Omega_{X/S}^1 \oplus \text{pr}_2^* \Omega_{Y/S}^1$.

C'est la version globale de 3.1.14, 3.1.15, 3.1.16. On notera qu'il est facile de voir que

$$\Omega_{\text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})/S}^1 = \Omega_{\text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})/\text{Spec}(\mathcal{O}_{S,s})}^1,$$

qui d'ailleurs n'est rien d'autre que le faisceau associé au $\mathcal{O}_{X,x}$ -module $\Omega_{\mathcal{O}_{X,x}/\mathcal{O}_{S,s}}^1$.

3.2.8 Dérivations ; vecteurs tangents. Avant de définir la notion de vecteur tangent à une variété algébrique, regardons du côté de la géométrie différentielle. Si M est une variété différentiable et $m \in M$ un point, qu'est-ce qu'un vecteur tangent à M en m ? Si M est un ouvert de \mathbb{R}^n (affine), c'est clair : c'est un élément v de \mathbb{R}^n (vectoriel). Si M est arbitraire, on peut considérer une carte locale en m pour définir les vecteurs tangents en se ramenant au cas d'un ouvert de \mathbb{R}^n . Mais cette méthode ne fonctionne pas dans le cadre algébrique car une variété algébrique, même lisse, n'est pas en général localement isomorphe à un ouvert de \mathbb{A}^n , et il nous faut trouver une autre formulation. La clé nous est donnée par la notion de *dérivée directionnelle* : si M est un ouvert de \mathbb{R}^n et $v = (v_1, \dots, v_n)$, toute fonction f définie sur un voisinage de m possède une *dérivée dans la direction v* définie par

$$D_v f \stackrel{\text{déf}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(m + tv) - f(m)}{t} = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(m).$$

Ainsi un vecteur tangent v définit une dérivation $D_v = \sum v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_m$ et réciproquement. Développons ce point de vue dans le cadre algébrique.

3.2.9 Définition. Soient k un corps, X un k -schéma et $x \in X$ un point. Si x est k -rationnel, i.e. $k(x) = k$, l'*espace tangent de X en x* est défini comme le k -espace vectoriel $T_x X \stackrel{\text{déf}}{=} \text{Der}_k(\mathcal{O}_{X,x}, k)$. Dans le cas général, x définit un unique point $k(x)$ -rationnel de $X \otimes_k k(x)$, encore noté x , et l'espace tangent est défini par $T_x X = T_x(X \otimes_k k(x))$.

Montrons les différents visages de l'espace tangent.

3.2.10 Proposition. Soit X un k -schéma et x un point k -rationnel. Alors, on a des bijections naturelles :

$$T_x X = \text{Der}_k(\mathcal{O}_{X,x}, k) \simeq (\Omega_{\mathcal{O}_{X,x}/k}^1 \otimes k)^\vee \simeq (m_x/m_x^2)^\vee \simeq \text{Hom}_k^*(\mathcal{O}_{X,x}, k[\epsilon])$$

où $(-)^\vee$ désigne le dual k -linéaire et $\text{Hom}_k^*(\mathcal{O}_{X,x}, k[\epsilon])$ désigne l'ensemble des morphismes de k -algèbres égaux modulo ϵ à la surjection $\lambda : \mathcal{O}_{X,x} \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}/m_x = k$.

Preuve : Le premier isomorphisme vient de la propriété universelle du module de différentielles. Le morphisme $\text{Der}_k(\mathcal{O}_{X,x}, k) \rightarrow (m_x/m_x^2)^\vee$ est celui de la suite exacte 3.1.3. Il associe à une dérivation $\partial : \mathcal{O}_{X,x} \rightarrow k$ une forme linéaire sur m qui s'annule sur m^2 à cause de la règle de Leibniz, induisant une forme $\varphi : m/m^2 \rightarrow k$, et réciproquement à $\varphi : m/m^2 \rightarrow k$ on associe la dérivation $\partial(f) = \varphi(f - \lambda(f))$. Enfin l'isomorphisme $\text{Der}_k(\mathcal{O}_{X,x}, k) \rightarrow \text{Hom}_k^*(\mathcal{O}_{X,x}, k[\epsilon])$ associe à ∂ le morphisme de k -algèbres $\mu : \mathcal{O}_{X,x} \rightarrow k[\epsilon]$ défini par $\mu(f) = \lambda(f) + \epsilon\partial(f)$, et réciproquement on constate que tout morphisme $\mathcal{O}_{X,x} \rightarrow k[\epsilon]$ égal à λ modulo ϵ est de la forme $\mu(f) = \lambda(f) + \epsilon\partial(f)$ ce qui définit ∂ . \square

3.2.11 Remarque. Pour un anneau local noethérien (A, m, k) , on doit à Zariski la définition des k -espaces vectoriels *cotangent* $t_A^* = m/m^2$ et *tangent* $t_A = (m/m^2)^\vee$. Ces définitions diffèrent des définitions ci-dessus en ce que ce sont des définitions *absolues* : elles ne font pas référence à une éventuelle structure d'algèbre sur un corps pour A . Utiles dans certains contextes, elles ne sont en revanche pas satisfaisantes pour le calcul différentiel sur les variétés et les schémas, notamment en caractéristique $p > 0$. Par exemple, soit k un corps non parfait de caractéristique $p > 0$, $a \in k$ un élément non puissance p -ième, et $\ell = k(t)$ avec $t^p = a$. Avec la définition absolue, l'espace tangent de l'unique point x du schéma $X = \text{Spec}(\ell)$ est $t_\ell = 0$. Or ℓ étant purement inséparable monogène sur k , la pratique montre que le tangent de X doit véritablement être vu comme un objet de dimension 1 sur k . La définition 3.2.9 demande de faire d'abord le changement de base $k \rightarrow \ell$. On a $\ell \otimes_k \ell \simeq \ell[z]/(z^p)$ avec $z = t \otimes 1 - 1 \otimes t$, l'idéal maximal de x dans $X \otimes_k \ell$ est engendré par z et on trouve $T_x X \simeq \ell$.

3.2.12 Champs de vecteurs. En géométrie différentielle, un champ de vecteurs sur un ouvert $U \subset M$ d'une variété différentiable est une fonction qui associe de manière différentiable à chaque point $m \in U$ un vecteur tangent $\partial_m \in T_m M$. Ainsi, un vecteur tangent peut être vu comme une dérivation *ponctuelle* $\partial_m : \mathcal{O}_M(U) \rightarrow \mathbb{R}$ alors qu'un champ de vecteurs définit une dérivation *globale* $\partial : \mathcal{O}_M(U) \rightarrow \mathcal{O}_M(U)$ par la règle $\partial(f) : U \rightarrow \mathbb{R}$, $m \mapsto \partial_m(f)$. Dans ce qui précède, on a noté $\mathcal{O}_M(U)$ l'anneau des fonctions différentiables sur U . Transcrivons ceci dans le cadre algébrique.

3.2.13 Définition. Soient k un corps et X un k -schéma. Un *champ de vecteurs* sur un ouvert $U \subset X$ est une dérivation $\partial \in \text{Der}_k(\mathcal{O}_X(U), \mathcal{O}_X(U))$. Le faisceau des champs de vecteurs est le faisceau $\mathcal{D}er_k(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X) : U \mapsto \text{Der}_k(\mathcal{O}_X(U), \mathcal{O}_X(U))$.

Si ∂, ∂' sont deux champs de vecteurs sur U , on définit leur *crochet* par $[\partial, \partial'] \stackrel{\text{déf}}{=} \partial\partial' - \partial'\partial$. Il est facile de vérifier que c'est encore une dérivation. On peut montrer que le crochet vérifie l'*identité de Jacobi*

$$[\partial, [\partial', \partial'']] + [\partial'', [\partial, \partial']] + [\partial', [\partial'', \partial]] = 0$$

si bien que $\mathcal{D}er_k(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$ est un faisceau d'algèbres de Lie.

On doit vraiment penser aux champs de vecteurs comme à des champs de vecteurs *continus*. Étant donné un champ de vecteurs ∂ sur U , toute fonction $f \in \mathcal{O}_X(U)$ peut

être dérivée puis évaluée en un point $x \in U$, avec un résultat $\partial(f)(x) \in k(x)$. Mais il est important de noter qu'un vecteur tangent $\partial_x \in T_x X$ ne se relève pas toujours ainsi sur un voisinage de U . Par exemple, soit $X = \text{Spec}(k[u, v]/(uv))$ la réunion des axes de coordonnées dans le plan. Alors, par continuité, tout champ de vecteurs sur un voisinage de $x = (0, 0)$ s'annule en x , alors qu'il existe des vecteurs tangents en x non nuls. Si $A = k[u, v]/(uv)$, on vérifiera que $\text{Der}_k(A, A) = uA \times vA$, $T_x X = \text{Der}_k(A, k) = k^2$ et que l'application $\text{ev}_x \circ \partial : \text{Der}_k(A, A) \rightarrow \text{Der}_k(A, k)$ est nulle.

3.3 Morphismes lisses, non ramifiés, étales : définitions

En géométrie différentielle, un point de vue fondamental pour l'étude locale des applications différentiables de variétés $f : X \rightarrow S$ au voisinage d'un point $x \in X$ est de regarder le *rang* de f en x , qui est par définition le rang de la différentielle df_x . Les cas d'intérêt principal sont ceux où le rang est *maximal*; il y a trois sous-cas qui mènent aux notions fondamentales suivantes :

- (a) si $\dim(X) \geq \dim(S)$, on dit que f est une *submersion* en x ,
- (b) si $\dim(X) \leq \dim(S)$, on dit que f est une *immersion* en x ,
- (c) si $\dim(X) = \dim(S)$, f est un difféomorphisme local en x .

Une autre formulation de ces conditions est de dire que df_x est surjective, resp. injective, resp. bijective. Nous allons transcrire ces définitions dans le cadre de la géométrie algébrique, et étudier les propriétés des morphismes correspondants :

- (a) les morphismes *lisses*,
- (b) les morphismes *non ramifiés*,
- (c) les morphismes *étales*.

Pour cela, supposons qu'un voisinage U de x possède un plongement $j : U \hookrightarrow \mathbb{R}^n \times S$ tel que $j(U)$ est décrit par un nombre fini d'équations $g_i(y, s) = 0$, où les g_i sont des fonctions C^∞ sur $\mathbb{R}^n \times S$, que l'espace tangent $T_x U$ est décrit dans $T_z(\mathbb{R}^n \times S)$, $z = j(x)$, par les équations $(dg_i)_z(h, k) = 0$, et que celles-ci soient linéairement indépendantes. (On obtient un tel plongement en prenant pour U une carte locale en x et pour j le morphisme graphe $\text{id} \times f$.) Soit $p : \mathbb{R}^n \times S \rightarrow S$ la projection. On a donc $f = p \circ j$ et $df_x = dp_z \circ dj_x$. Alors, le noyau $\ker df_x = T_x U \cap \ker dp_z$ est défini dans $\ker dp_z$ par les équations $(dg_i)_z(h, 0) = 0$. La condition de submersion donne :

$$\begin{aligned} df_x \text{ surjective} &\Leftrightarrow \dim(\text{im } df_x) = \dim(T_s S) \\ &\Leftrightarrow \text{codim}(\ker df_x / \ker dp_z) = \text{codim}(T_x U / T_z(\mathbb{R}^n \times S)) \\ &\Leftrightarrow \text{les } (dg_i)_z(h, 0) \text{ sont linéairement indépendantes,} \end{aligned}$$

où l'on a noté $\text{codim}(F/E)$ la codimension d'un sous-espace F d'un espace vectoriel E . En termes du faisceau des 1-formes différentielles, les fonctions $(h, k) \mapsto (dg_i)_z(h, k)$ sont des sections du faisceau $\Omega_{\mathbb{R}^n \times S}^1$ et les fonctions $h \mapsto (dg_i)_z(h, 0)$ sont les différentielles calculées en fixant la variable qui vit dans S , c'est-à-dire des sections du faisceau de formes relatives $\Omega_{\mathbb{R}^n \times S / S}^1$. On arrive à une définition qu'il est facile de formuler dans le langage de la géométrie algébrique.

3.3.1 Définition. Soit $f : X \rightarrow S$ un morphisme de schémas et $x \in X$. On dit que f est lisse en x , de dimension relative r s'il existe un voisinage ouvert U de x et une S -immersion $j : U \hookrightarrow \mathbb{A}_S^n$ telle que

- (1) localement en $y = j(x)$, le faisceau d'idéaux définissant $j(U)$ dans un ouvert de \mathbb{A}_S^n est engendré par $(n - r)$ sections g_{r+1}, \dots, g_n , et
- (2) les différentielles $dg_{r+1}(y), \dots, dg_n(y)$ sont linéairement indépendantes dans $\Omega_{\mathbb{A}_S^n/S}^1 \otimes k(y)$.

On dit que f est lisse s'il est lisse en tous les points.

Il est important de noter que si U est un ouvert qui convient, alors tout ouvert $V \subset U$ contenant x convient aussi. Ensuite, en reformulant comme ci-dessus la condition d'immersion, on arrive à la définition suivante.

3.3.2 Définition. Soit $f : X \rightarrow S$ un morphisme de schémas et $x \in X$. On dit que f est non ramifié en x s'il existe un voisinage ouvert U de x et une S -immersion $j : U \hookrightarrow \mathbb{A}_S^n$ telle que

- (1) localement en $y = j(x)$, le faisceau d'idéaux \mathcal{J} définissant $j(U)$ dans un ouvert de \mathbb{A}_S^n est engendré par un nombre fini de sections, et
- (2) les différentielles $dg(y)$ avec $g \in \mathcal{J}$ engendrent $\Omega_{\mathbb{A}_S^n/S}^1 \otimes k(y)$.

On dit que f est non ramifié s'il est non ramifié en tous les points.

3.3.3 Définition. On dit que $f : X \rightarrow S$ est étale (en un point) s'il est lisse et non ramifié (en ce point).

On voit que, par définition, un morphisme lisse, non ramifié ou étale est localement de présentation finie.

3.3.4 Exemples. L'espace affine $\mathbb{A}_S^n \rightarrow S$ est lisse; il est étale si et seulement si $n = 0$. Toute immersion localement de présentation finie est non ramifiée. Toute immersion ouverte est étale.

3.3.5 Proposition. La classe des morphismes lisses (resp. non ramifiés, resp. étales) est stable par changement de base, par composition et par produit.

Bien sûr, ces énoncés sont les versions globales d'énoncés ponctuels. Voici un exemple. Soient $f : X \rightarrow S$, $g : S' \rightarrow S$ deux morphismes et $f' : X' \rightarrow S'$ le morphisme obtenu par changement de base, où $X' = X \times_S S'$. Soit $x' \in X'$ et $x \in X$ son image. Si f est lisse en x , alors f' est lisse en x' .

Preuve : Il s'agit de vérifications peu difficiles. Donnons quelques indications pour vérifier par exemple que le composé de deux morphismes $f : X \rightarrow S$ lisse en x et $g : S \rightarrow T$ lisse en $s = f(x)$ est lisse en x . Il existe des voisinages ouverts affines $x \in U \subset X$ et $s \in V \subset S$, des immersions

$$j : U \hookrightarrow \mathbb{A}_S^n \quad \text{et} \quad k : V \hookrightarrow \mathbb{A}_T^m$$

et des générateurs g_{r+1}, \dots, g_n de l'idéal de $j(U)$ et h_{p+1}, \dots, h_m de l'idéal de $k(V)$, dont les différentielles sont indépendantes comme indiqué dans la définition 3.3.1. Quitte à remplacer U par $U \cap f^{-1}(V)$, on peut supposer que $f(U) \subset V$. On a le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} U & \xrightarrow{j} & \mathbb{A}^n \times V & \xrightarrow{\ell} & \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^m \times T \\ & \searrow f & \downarrow & & \downarrow \\ & & V & \xrightarrow{k} & \mathbb{A}^m \times T \\ & & & \searrow g & \downarrow \\ & & & & T \end{array}$$

où $\ell := \text{id}_{\mathbb{A}^n} \times k$ et l'idéal de $\ell(\mathbb{A}_V^n)$ est engendré par les images h_i^* des h_i dans $\mathcal{O}_{\mathbb{A}_T^{n+m}}$. Soient g_{r+1}^*, \dots, g_n^* des relevés des g_i par le comorphisme $\ell^\sharp : \mathcal{O}_{\mathbb{A}_T^{n+m}} \rightarrow \ell_* \mathcal{O}_{\mathbb{A}_V^n}$. On vérifie que l'immersion $\ell \circ j$ et la famille de sections $g_{r+1}^*, \dots, g_n^*, h_{p+1}^*, \dots, h_m^*$ vérifient les conditions garantissant que $g \circ f$ est lisse au point x . \square

3.4 Morphismes lisses, non ramifiés, étales : propriétés

Les définitions et les remarques élémentaires étant faites, nous allons maintenant établir certaines propriétés importantes des morphismes lisses, non ramifiés et étales. Les principaux points de repère sont :

- (a) quelques résultats sur le faisceau des 1-formes différentielles (3.4.1, 3.4.3) ;
- (b) le lien entre lissité et régularité pour les schémas sur un corps (3.4.5) ;
- (c) la platitude des morphismes lisses et ses conséquences (3.4.7, 3.4.9, 3.4.10).

Entamons ce programme.

3.4.1 Proposition.

- (1) Soit $X \rightarrow S$ un morphisme lisse de dimension relative r en $x \in X$. Alors, le faisceau $\Omega_{X/S}^1$ est libre de rang r sur un voisinage de x .
- (2) Soit $j : X \rightarrow Z$ une immersion de S -schémas et \mathcal{J} le faisceau d'idéaux qui définit $j(X)$ dans un ouvert de Z . On suppose $X \rightarrow S$ lisse en x et $Z \rightarrow S$ lisse en $j(x)$. Alors, sur un voisinage de x , la suite exacte conormale se complète par un 0 à gauche en une suite exacte scindée

$$0 \longrightarrow \mathcal{J}/\mathcal{J}^2 \longrightarrow j^* \Omega_{Z/S}^1 \longrightarrow \Omega_{X/S}^1 \longrightarrow S.$$

Preuve : (1) D'après la définition 3.3.1, quitte à remplacer X par un voisinage ouvert, il existe une immersion fermée $j : X \hookrightarrow Z$ dans un ouvert Z de l'espace affine \mathbb{A}_S^n , tel que l'idéal \mathcal{J} qui définit $j(X)$ dans Z est engendré par des sections g_{r+1}, \dots, g_n dont les différentielles sont indépendantes dans $\Omega_{Z/S}^1 \otimes k(z)$ où $z = j(x)$. On sait que $\Omega_{Z/S}^1$ est un \mathcal{O}_Z -module libre de rang n (ceci résulte de 3.1.12 pour l'espace affine, et de 3.1.15 pour un ouvert). Soient g_1, \dots, g_r des sections locales de \mathcal{O}_Z dont les différentielles complètent les précédentes en une base de $\Omega_{Z/S}^1 \otimes k(z)$. D'après le lemme de Nakayama, quitte à rétrécir Z , les dg_i engendrent $\Omega_{Z/S}^1$. En envoyant le k -ième vecteur de la base canonique du module libre $\mathcal{O}_Z^{\oplus n}$ sur dg_k , on obtient un morphisme $\mathcal{O}_Z^{\oplus n} \rightarrow \Omega_{Z/S}^1$ surjectif entre deux modules libres de même rang fini, c'est donc un isomorphisme. En projetant sur le facteur direct engendré par g_{r+1}, \dots, g_n , on construit un morphisme $j^*\Omega_{Z/S}^1 \rightarrow \mathcal{J}/\mathcal{J}^2$. Ce morphisme fournit une rétraction pour la flèche $\mathcal{J}/\mathcal{J}^2 \rightarrow j^*\Omega_{Z/S}^1$ de la suite conormale pour j , ce qui montre à la fois que cette flèche est injective, et que la suite conormale est scindée. Alors $\Omega_{X/S}^1$ est facteur direct d'un module libre, donc plat (par un calcul direct). Comme il est par ailleurs de présentation finie, il est localement libre (proposition 2.3.20).

(2) Dans la preuve de (1), on a établi le résultat lorsque Z est un ouvert de l'espace affine. Pour $Z \rightarrow S$ quelconque, on sait d'après (1) que $\Omega_{Z/S}^1$ est libre sur un voisinage de $j(x)$. En relisant la preuve de (1), on constate que c'est tout ce qu'on a utilisé pour montrer que la suite conormale se complète en une suite exacte courte scindée sur un voisinage assez petit de x . \square

3.4.2 Remarque. Le point (2) de la proposition dit que sur un voisinage d'un point lisse x , on a un isomorphisme $j^*\Omega_{Z/S}^1 \simeq \Omega_{X/S}^1 \oplus \mathcal{J}/\mathcal{J}^2$. Comme on l'a indiqué dans la preuve, les deux facteurs directs sont alors libres au voisinage du point x . Ce fait est à rapprocher du fait que le module des formes différentielles d'un produit de schémas est somme directe des modules de formes différentielles des facteurs. La définition de la lissité en un point (alors Z est un ouvert d'un espace affine) dit donc que tout se passe comme si X était localement un « facteur direct » d'un espace affine. C'est une image en tout cas assez fidèle à « l'ordre 1 ».

3.4.3 Proposition. Soit $f : X \rightarrow S$ un morphisme localement de présentation finie, $x \in X$ un point, $s = f(x)$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

- (1) f est non ramifié en x ,
- (2) $\Omega_{X/S,x}^1 = 0$,
- (3) la diagonale $\Delta : X \rightarrow X \times_S X$ est une immersion ouverte au voisinage de x ,
- (4) le $k(s)$ -schéma $X \otimes k(s)$ est non ramifié sur $k(s)$ en x ,
- (5) l'idéal maximal $m_x \subset \mathcal{O}_{X,x}$ est engendré par l'idéal maximal $m_s \subset \mathcal{O}_{S,s}$ et $k(x)$ est une extension finie séparable de $k(s)$.

Pour tout $s \in S$, on notera $X_s = X \times_S \text{Spec}(k(s))$ la fibre de f en s .

Preuve : (1) \Leftrightarrow (2). Comme f est localement de présentation finie, on peut choisir un voisinage ouvert U de x et une immersion fermée $j : U \rightarrow \mathbb{A}_S^n$ telle que l'idéal \mathcal{J} de $j(U)$ est engendré par un nombre fini de sections. La suite exacte conormale montre que les différentielles dg avec $g \in \mathcal{J}$ engendrent $\Omega_{\mathbb{A}_S^n/S}^1 \otimes k(y)$ ($y = j(x)$) si et seulement si $\Omega_{U/S,x}^1 = 0$, ce que l'on voulait.

(2) \Leftrightarrow (3). Identifions X et son image par Δ . Soit U un voisinage ouvert de x dans $X \times_S X$ tel que $X \cap U$ est un sous-schéma fermé de U défini par un idéal \mathcal{J} (voir 3.2.2). Alors $\Omega_{X/S,x}^1 = 0$ si et seulement si $(\mathcal{J}/\mathcal{J}^2)_x = \mathcal{J}_x/\mathcal{J}_x^2 = 0$. Comme \mathcal{J} est un module de type fini, par deux applications successives du lemme de Nakayama ceci est équivalent à dire que $\mathcal{J}_x = 0$, puis que $\mathcal{J} = 0$ sur un ouvert $U' \subset U$, donc que Δ est une immersion ouverte en restriction à U' .

(1) \Rightarrow (4) car les morphismes ramifiés sont stables par changement de base.

(4) \Rightarrow (2). Comme la formation du module des différentielles commute au changement de base sur S (voir 3.1.14), on a $\Omega_{X/S,x}^1 \otimes k(s) = \Omega_{X_s/k(s),x}^1 = 0$. Par le lemme de Nakayama, on en déduit que $\Omega_{X/S,x}^1 = 0$.

(5) \Rightarrow (4). Par (2), il suffit de montrer que $\Omega_{k(x)/k(s)}^1 = 0$. Or $k(x)/k(s)$ étant finie séparable, cela découle de 3.1.13.

(1) \Rightarrow (5). Notons que $m_x = m_s \mathcal{O}_{X,x}$ si et seulement si la projection canonique $\mathcal{O}_{X_s,x} = \mathcal{O}_{X,x}/m_s \rightarrow k(x)$ est un isomorphisme, i.e. $\mathcal{O}_{X_s,x}$ est un corps. Il s'agit donc de montrer que $\mathcal{O}_{X_s,x}$ est un corps extension finie séparable de $k(s)$. Cette condition ne porte que sur la fibre X_s , donc on peut supposer que S est spectre d'un corps k . Par ailleurs, comme par hypothèse $\Omega_{X/k,x}^1 = 0$, quitte à remplacer X par un voisinage de x , on peut d'après le lemme de Nakayama supposer que $\Omega_{X/k}^1 = 0$. Supposons d'abord k algébriquement clos. Soit y un point fermé de X , spécialisation de x . Son corps résiduel est $k(y) = k$ puisque c'est une extension finie de k supposé algébriquement clos. Comme $\Omega_{X/k,y}^1 = 0$, on a $m_y/m_y^2 = 0$ d'après 3.2.10, puis $m_y = 0$ par Nakayama. Ainsi $\mathcal{O}_{X,y}$ est un corps et y est isolé, donc $x = y$. Ainsi $\mathcal{O}_{X,x} = k(y) = k$ extension finie séparable de k . Supposons maintenant k arbitraire et soit k' une clôture algébrique de k , $X' = X \otimes_k k'$, $p : X' \rightarrow X$ la projection, x' un point au-dessus de x . On a $\Omega_{X'/k',x'}^1 = \Omega_{X/k,x}^1 \otimes_k k' = 0$. Comme p est fidèlement plat, on a une injection $\mathcal{O}_{X,x} \hookrightarrow \mathcal{O}_{X',x'} = k'$. Alors $\mathcal{O}_{X,x}$ est algébrique sur k donc contient les inverses de ses éléments, c'est donc un corps, égal à $k(x)$. L'extension $k(x)/k$ est de type fini donc finie, séparable par 3.1.13. \square

Notre prochain objectif est de relier la lissité sur un corps de base à la régularité. Nous aurons besoin du résultat suivant, intéressant pour lui-même : dans le langage des topologies de Grothendieck, que nous n'avons fait qu'évoquer dans le paragraphe 2.4, cet énoncé signifie que *localement pour la topologie étale à la source*, tout morphisme lisse est de la forme $\mathbb{A}_S^n \rightarrow S$.

3.4.4 Proposition. *Soit $f : X \rightarrow S$ un morphisme et $x \in X$ un point. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) f est lisse en x de dimension relative n ,

(2) *il existe un voisinage U de x et une factorisation de $f|_U$ en $U \xrightarrow{g} \mathbb{A}_S^n \xrightarrow{p} S$ où g est étale et p est la projection canonique.*

Preuve : Il n'y a que (1) \Rightarrow (2) à prouver. Par définition de la lissité, on peut choisir un voisinage ouvert U de x , une immersion $i : U \hookrightarrow \mathbb{A}_S^N$, des générateurs h_{n+1}, \dots, h_N de l'idéal de $i(U)$ dont les différentielles sont indépendantes en $i(x)$. Comme le faisceau $\Omega_{U/S}^1$ est localement libre (proposition 3.4.1), quitte à rétrécir U on peut aussi choisir des sections g_1, \dots, g_n de \mathcal{O}_U dont les différentielles l'engendrent. Ces sections s'étendent en des fonctions \tilde{g}_i sur un voisinage de x dans \mathbb{A}_S^N . Notons $g : U \rightarrow \mathbb{A}_S^n$ le morphisme déterminé par les g_i , c'est-à-dire $\mathcal{O}_S[t_1, \dots, t_n] \rightarrow \mathcal{O}_U$, $t_i \mapsto g_i$. Considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{(i,g)} & \mathbb{A}_S^N \times_S \mathbb{A}_S^n \\ & \searrow g & \downarrow \text{pr}_2 \\ & & \mathbb{A}_S^n. \end{array}$$

Le morphisme $j := (i, g)$ est une immersion car composé du graphe de g (cf 3.2.3) et de i . Son idéal est engendré par les N sections $h_{n+1}, \dots, h_N, t_1 - \tilde{g}_1, \dots, t_n - \tilde{g}_n$ dont les différentielles sont indépendantes dans $\Omega_{\mathbb{A}_{n+N}/S}^1 \otimes k(j(x))$. Ceci montre qu'au point x , le morphisme g est lisse de dimension relative $N - n = 0$. Alors son faisceau de 1-formes différentielles est nul, donc g est non ramifié (proposition 3.4.3) puis étale. \square

On appelle *dimension de X en x* et on note $\dim_x(X)$ l'infimum des $\dim(U)$ lorsque U varie parmi les voisinages ouverts affines de x dans X . Comme la fonction dimension est à valeurs discrètes, cet infimum est atteint. Par ailleurs, un schéma est dit *régulier* lorsque tous ses anneaux locaux le sont (voir définition 1.3.17).

3.4.5 Proposition. *Soient X un schéma localement de type fini sur un corps k , $x \in X$ un point, $r = \dim_x(X)$. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (1) *X est lisse sur k en x ,*
- (2) *$\Omega_{X/k}^1 \otimes k(x)$ est engendré par r éléments,*
- (3) *Il existe un voisinage U de x et une extension parfaite k'/k telle que $U \otimes_k k'$ est régulier.*
- (4) *Il existe un voisinage U de x tel que pour toute extension k'/k , le schéma $U \otimes_k k'$ est régulier.*

Preuve : (1) \Rightarrow (4). D'après la proposition 3.4.4, il existe un voisinage ouvert U de x et un morphisme étale de k -schémas $g : U \rightarrow \mathbb{A}_k^r$. Quitte à remplacer k par k' et U par U' , on est ramené à prouver que U est régulier. Comme un localisé d'un anneau régulier est régulier (point (1) du théorème 1.3.18), il suffit de prouver que les anneaux locaux des points *fermés* de U sont réguliers. Soit donc $y \in U$ un point fermé, $z = g(y)$ et m_y, m_z les idéaux maximaux de leurs anneaux locaux. Comme l'espace affine est régulier (ceci découle du théorème 1.3.18 par récurrence sur la dimension), l'idéal m_z est engendré

par r éléments, donc m_y également car il est engendré par m_x d'après la proposition 3.4.3. Donc U est régulier.

(4) \Rightarrow (3) est immédiat.

(3) \Rightarrow (2). Pour $y \in X$, posons $\delta(y) = \dim_{k(y)} \Omega_{X/k}^1 \otimes k(y)$ et $U = \{y \in X, \delta(y) \leq r\}$. On doit montrer que $x \in U$. Pour cela, on peut remplacer X par un voisinage de x aussi petit qu'il nous est utile. On peut aussi faire une extension du corps de base, donc d'après l'hypothèse, on peut supposer k parfait et X régulier de dimension r . Montrons qu'alors $U = X$. Comme U est ouvert par semi-continuité supérieure de δ (voir 1.3.2), il suffit de montrer que U contient tous les points fermés. Or un point fermé $y \in X$ possède un corps résiduel extension finie de k , séparable car k est parfait, de sorte que $\Omega_{k(y)/k}^1 = 0$ (voir 3.1.13). La suite exacte conormale se réduit donc à une surjection $m_y/m_y^2 \rightarrow \Omega_{X/k}^1 \otimes k(y) \rightarrow 0$. Comme X est régulier, m_y est engendré par r éléments donc $\Omega_{X/k}^1 \otimes k(y)$ aussi.

(2) \Rightarrow (1). La question étant locale, on peut restreindre X et supposer que $\delta \leq r$ partout. Montrons que x possède un voisinage ouvert affine intègre sur lequel $\Omega_{X/k}^1$ est libre de rang r . Considérons, dans une composante irréductible de X contenant x et de dimension maximale r , un point fermé y spécialisation de x . Soient k' une clôture algébrique de k , $X' = X \otimes_k k'$, y' un point fermé de X' au-dessus de y . Le morphisme d'anneaux locaux $\varphi : \mathcal{O}_y \rightarrow \mathcal{O}_{y'}$ est entier donc $\dim(\mathcal{O}_{y'}) = \dim(\mathcal{O}_y) = r$ par Cohen-Seidenberg 1.3.10, de plus m'/m'^2 est isomorphe à $\Omega_{X'/k'}^1 \otimes k'$ (voir 3.2.10), donc il est engendré par r éléments, donc $\mathcal{O}_{y'}$ est régulier. Cet anneau est donc intègre (1.3.16). Comme φ est plat, il est injectif (voir 2.3.10) donc \mathcal{O}_y est lui aussi intègre. Enfin comme \mathcal{O}_x est un localisé de \mathcal{O}_y , il est intègre. Il est facile d'en déduire que x possède un voisinage intègre, et en tous ses points fermés y , le raisonnement ci-dessus montre que $\delta(y) = r$, donc quitte à rétrécir encore X , on peut supposer $\Omega_{X/k}^1$ libre de rang r d'après 2.3.20. Choisissons une immersion fermée $j : X \hookrightarrow \mathbb{A}_k^n$ et notons \mathcal{J} l'idéal correspondant. La suite exacte conormale

$$\mathcal{J}/\mathcal{J}^2 \longrightarrow j^* \Omega_{\mathbb{A}_k^n/k}^1 \xrightarrow{s} \Omega_{X/k}^1 \longrightarrow 0$$

possède alors une section s , donc il existe $n - r$ sections g_{r+1}, \dots, g_n de \mathcal{J} dont les différentielles engendrent un sous-module facteur direct de $j^* \Omega_{\mathbb{A}_k^n/k}^1$. Par définition, le sous-schéma fermé $X' \subset \mathbb{A}_k^n$ défini par ces sections est lisse sur k en x , de dimension relative r ; il contient X . Choisissons comme ci-dessus un point fermé $y \in X$ spécialisation de x . On a une surjection $a : \mathcal{O}_{X',y} \rightarrow \mathcal{O}_{X,y}$ entre anneaux locaux de même dimension r . Or le raisonnement précédent montre que $\mathcal{O}_{X',y}$ est intègre, donc a est un isomorphisme par 1.3.9. En localisant en x , on trouve que $\mathcal{O}_{X',x} \simeq \mathcal{O}_{X,x}$ et on en déduit par Nakayama que $X = X'$ sur un voisinage de x . \square

3.4.6 Exemple. Comme le suggère la condition (3) de cette proposition, le défaut éventuel de lissité d'un k -schéma de type fini régulier est lié aux phénomènes d'inséparabilité. Ainsi, si ℓ/k est une extension finie purement inséparable (par exemple monogène), alors $X = \text{Spec}(\ell)$ est un schéma régulier de dimension 0, mais il n'est pas lisse sur $\text{Spec}(k)$ car nous avons montré (voir 3.1.13) que son faisceau de 1-formes différentielles est non nul.

Pour finir le paragraphe, nous montrons que les morphismes lisses sont plats, ce qui permet de faire le lien entre la lissité d'un morphisme et la lissité de ses fibres. D'utiles conséquences s'en déduisent.

3.4.7 Proposition. *Soit $f : X \rightarrow S$ un morphisme localement de présentation finie, $x \in X$ un point, $s = f(x)$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (1) f est lisse en x ,
- (2) f est plat en x et la fibre X_s est lisse sur $k(s)$ en x .

Preuve : (1) \Rightarrow (2). Il n'y a qu'à montrer que f est plat en x . On peut prendre un voisinage ouvert de x qui est sous-schéma fermé d'un ouvert Z d'un espace affine \mathbb{A}_S^n défini par l'annulation de sections g_{r+1}, \dots, g_n dont les différentielles sont indépendantes en x . Comme les sous-schémas intermédiaires $V(g_{r+1}, \dots, g_i)$ sont lisses en x , en raisonnant par récurrence, il suffit de prouver la platitude du sous-schéma défini par l'annulation d'une section g telle que $dg \neq 0$ en x . Soient X_s, Z_s les fibres de X, Z en s . On peut raisonner dans l'anneau local $\mathcal{O}_{Z,x}$ et remplacer g par son germe. Supposons que $g \in m_s \mathcal{O}_{Z,x}$, alors $g = a_1 h_1 + \dots + a_u h_u$ avec $a_i \in m_s$, donc $dg = a_1 dh_1 + \dots + a_u dh_u$ et $dg(x) = 0$ puisque $m_s \mathcal{O}_{Z,x} \subset m_x$. Par contraposée $dg(x) \neq 0$ implique que $g_s \neq 0$ dans $\mathcal{O}_{Z_s,x}$. Comme Z_s est lisse sur $k(s)$, l'anneau $\mathcal{O}_{Z_s,x}$ est régulier donc intègre d'après la proposition 1.3.16. Il s'ensuit que l'image de $g \in \mathcal{O}_{Z,x}$ est non-diviseur de zéro modulo m_s . Alors $\mathcal{O}_{X,x} = \mathcal{O}_{Z,x}/(g)$ est plat sur $\mathcal{O}_{S,s}$ d'après le théorème 2.3.15.

(2) \Rightarrow (1). On peut supposer que S est affine d'anneau R et que X est un sous-schéma fermé d'un espace affine \mathbb{A}_S^n défini par un idéal de type fini I . Soit r la dimension relative de X_s en x . Comme X_s est lisse sur $k(s)$ en x , il existe un voisinage de x dans X_s et des éléments $g_{r+1}, \dots, g_n \in I$ dont les images définissent X_s comme sous-schéma de $\mathbb{A}_{k(s)}^n$ et dont les différentielles sont indépendantes en x . Par construction, le sous-schéma fermé $Z \subset \mathbb{A}_S^n$ défini par g_{r+1}, \dots, g_n est lisse sur S en x et contient X , et $X_s \rightarrow Z_s$ est un isomorphisme proche de x . Soit J l'idéal de X dans Z . Comme par hypothèse X est plat en x , la suite $0 \rightarrow J_x \rightarrow \mathcal{O}_{Z,x} \rightarrow \mathcal{O}_{X,x} \rightarrow 0$ reste exacte après l'opération $- \otimes_R k(s)$, d'après 2.3.7. Comme $X_s \rightarrow Z_s$ est un isomorphisme localement en x , on voit que $J_x \otimes k(s)$ s'annule, donc $J_x = 0$ d'après Nakayama. Il en découle que $X \rightarrow Z$ est un isomorphisme localement en x , donc X est lisse en x . \square

3.4.8 Remarque. L'équivalence entre les points (1) et (2) de cette proposition illustre un principe très général sur certaines propriétés comme les propriétés de régularité ou de singularité des schémas. Le principe peut s'énoncer ainsi : *étant donnée une propriété P des schémas sur un corps algébriquement clos, la bonne notion relative associée est de dire que $X \rightarrow S$ vérifie P si et seulement s'il est plat et ses fibres géométriques vérifient P .* Ce principe s'applique par exemple pour définir le fait pour $X \rightarrow S$ d'être réduit, normal, Cohen-Macaulay... Par exemple, un morphisme $X \rightarrow S$ est *régulier* en ce sens si et seulement s'il est lisse. On prendra donc bien garde que même si S est très sympathique, par exemple régulier, ce n'est pas la même chose de dire que X est régulier (resp. normal, ...) sur S ou régulier (resp. normal...) dans un sens absolu.

3.4.9 Corollaire. *Tout morphisme lisse, et en particulier tout morphisme étale, est universellement ouvert.*

Preuve : D'après la proposition 3.4.7, un morphisme lisse est plat et localement de présentation finie. Le résultat découle donc du théorème 2.3.22. \square

3.4.10 Corollaire. *Soit $f : X \rightarrow S$ un morphisme. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (1) f est étale,
- (2) f est lisse de dimension relative 0,
- (3) f est non ramifié et plat.

Preuve : (1) \Rightarrow (2) est clair.

(2) \Rightarrow (3). D'après le corollaire 3.4.1 le faisceau $\Omega_{X/S}^1$ est localement libre de rang 0, donc f est non ramifié d'après le point (2) de la proposition 3.4.3 ; il est plat d'après la proposition 3.4.7.

(3) \Rightarrow (1). Il suffit de montrer que f est lisse. Comme f est plat, il suffit par 3.4.7 de montrer que f est lisse dans les fibres, donc on peut supposer que S est le spectre d'un corps $k = k(s)$. Soit $x \in X$. D'après le point (5) de la proposition 3.4.3, on a $m_x = m_s \mathcal{O}_{X,x} = 0$ donc $\mathcal{O}_{X,x}$ est un corps, égal au corps résiduel $k(x)$, extension finie séparable de k . Le lemme de Nakayama montre qu'il existe un ouvert affine $U \subset X$ contenant x et dans lequel l'idéal premier qui lui correspond est nul, i.e. $U = \{x\}$. Le choix d'un générateur de l'extension séparable $k(x)/k$ (voir le calcul de 3.1.13) donne une immersion fermée $j : U \rightarrow \mathbb{A}_S^1$ qui vérifie les conditions de la définition 3.3.1, donc f est lisse en x . \square

3.5 La propriété de relèvement infinitésimal

3.5.1 Définition. Soit $f : X \rightarrow S$ un morphisme. On dit que f est *formellement lisse* (resp. *formellement non ramifié*, resp. *formellement étale*) si et seulement si pour tout S -schéma Y qui est affine et pour tout sous-schéma fermé $Y_0 \subset Y$ défini par un idéal de carré nul, l'application canonique

$$X(Y) \longrightarrow X(Y_0)$$

est surjective (resp. injective, resp. bijective).

3.5.2 Théorème. *Pour un morphisme $f : X \rightarrow S$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (1) f est lisse (resp. non ramifié, resp. étale),
- (2) f est localement de présentation finie et formellement lisse (resp. formellement non ramifié, resp. formellement étale).

L'énoncé sur les morphismes étales est la conjonction de ceux sur les morphismes lisses et non ramifiés.

Preuve de 3.5.2 (cas non ramifié) : Les conditions (1) et (2) sont locales sur X et sur S donc on peut supposer que $X = \text{Spec}(A)$ et $S = \text{Spec}(R)$. Soit B une R -algèbre et J un idéal de carré nul. Rappelons (voir 3.1.6) que l'ensemble des relèvements $\psi : A \rightarrow B$ d'un morphisme de R -algèbres $\varphi : A \rightarrow B/J$ est en bijection avec $\text{Der}_R(A, J)$.

(1) \Rightarrow (2). Si $X \rightarrow S$ est non ramifié, on a $\Omega_{A/R}^1 = 0$ donc $\text{Der}_R(A, J) = 0$ et l'application $X(B) \rightarrow X(B/J)$ est injective.

(2) \Rightarrow (1). Considérons $B = (A \otimes_R A)/I^2$ qui est une extension de A d'idéal $J = I/I^2$ de carré nul, où I est le noyau de la multiplication $m : A \otimes_R A \rightarrow A$. Par ce qui précède on a $\text{Der}_R(A, J) = 0$. Comme $\Omega_{A/R}^1 = J$, on trouve $\text{Hom}_A(\Omega_{A/R}^1, \Omega_{A/R}^1) = 0$, donc $\Omega_{A/R}^1 = 0$. \square

Avant de passer à la preuve du théorème pour les morphismes lisses, on doit noter que cette fois il n'est pas évident que la condition (2) est de nature locale sur X . Pour passer du local au global, nous aurons besoin d'un argument cohomologique. Nous allons démontrer ce dont nous avons besoin sous forme d'un lemme. Soit X un espace topologique et $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert indicé par un ensemble bien ordonné I . Pour tout faisceau de groupes abéliens \mathcal{F} sur X , et tout entier $k \geq 0$, on définit un groupe abélien

$$C^k(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \stackrel{\text{déf}}{=} \prod_{i_0 < \dots < i_k} \mathcal{F}(U_{i_0, \dots, i_k})$$

où comme d'habitude $U_{i_0, \dots, i_k} = U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_k}$. Pour $k \geq 0$ on définit un morphisme $d^k : C^k(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C^{k+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ qui envoie $s = (s_{i_0, \dots, i_k})$ sur $t = (t_{i_0, \dots, i_{k+1}})$ où

$$t_{i_0, \dots, i_{k+1}} = \sum_{j=0}^{k+1} (-1)^j s_{i_0, \dots, \widehat{i_j}, \dots, i_{k+1}} |_{U_{i_0, \dots, i_{k+1}}}$$

(le chapeau signifie que l'indice qui est dessous est omis). Pour un uplet i_0, \dots, i_k qui n'est pas nécessairement ordonné, il est commode de poser $s_{i_0, \dots, i_k} = 0$ si deux indices sont égaux, et $s_{i_0, \dots, i_k} = \epsilon(\sigma) s_{\sigma i_0, \dots, \sigma i_k}$ où σ est la permutation qui réordonne les indices s'ils sont tous distincts. On vérifie que la formule pour $d^k(s)$ reste correcte avec cette convention. Un calcul montre que $\text{im}(d^k) \subset \text{ker}(d^{k+1})$, ce qui donne un complexe

$$0 \longrightarrow C^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{d^0} C^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{d^1} C^2(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{d^2} \dots$$

et on pose $\check{H}^k(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \text{ker}(d^k) / \text{im}(d^{k-1})$ que l'on appelle le k -ième groupe de cohomologie de Čech de \mathcal{F} relativement au recouvrement \mathcal{U} .

3.5.3 Lemme. Soit X un schéma affine et $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_n\}$ un recouvrement par des ouverts affines distingués dans X . Alors, pour tout \mathcal{O}_X -module quasi-cohérent \mathcal{F} , on a $\check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = 0$.

Preuve : Soit $A = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ et $M = \Gamma(X, \mathcal{F})$. On sait que \mathcal{F} est le \mathcal{O}_X -module associé à M . On doit montrer que tout élément de $\ker(d^1)$ (un 1-cocycle) est dans $\text{im}(d^0)$ (un 1-cobord), c'est-à-dire que pour tout uplet (s_{ij}) tel que $s_{jk} - s_{ik} + s_{ij} = 0$ pour tous i, j, k il existe un uplet (r_i) tel que $s_{ij} = r_j - r_i$. Notons $U_i = D(f_i)$ les ouverts distingués. On a $s_{ij} \in \mathcal{F}(U_{ij}) = M[1/(f_i f_j)]$ et comme il n'y a qu'un nombre fini d'ouverts, il existe un entier N tel que $(f_i f_j)^N s_{ij} \in M$ pour tous i, j . Choisissons une partition de l'unité $a_1 f_1^N + \dots + a_n f_n^N = 1$ pour les f_i^N (voir exercice 2.1.4) et posons

$$r_i = - \sum_c a_c f_c^N s_{ic}.$$

C'est clairement un élément de $M[1/f_i]$. De plus,

$$r_j - r_i = \sum_c a_c f_c^N (s_{ic} - s_{jc}) = \sum_c a_c f_c^N s_{ij} = s_{ij}$$

donc (s_{ij}) est un cobord, comme souhaité. \square

Preuve de 3.5.2 (cas lisse) : (1) \Rightarrow (2). Considérons d'abord la situation où $S = \text{Spec}(R)$, $X = \text{Spec}(B)$ se plonge dans un ouvert $Z = \text{Spec}(A)$ de l'espace affine, $B = A/I$, et on a la suite conormale exacte scindée

$$0 \longrightarrow I/I^2 \longrightarrow \Omega_{A/R}^1 \otimes_A B \longrightarrow \Omega_{B/R}^1 \longrightarrow 0.$$

C'est la situation à laquelle on peut se ramener localement, d'après la proposition 3.4.1. On peut aussi supposer que Z est un ouvert affine distingué de \mathbb{A}_S^n , ce qui sera commode dans quelques lignes. Soit maintenant $Y = \text{Spec}(C)$ un schéma affine et $Y_0 = \text{Spec}(C/J)$ un sous-schéma fermé défini par un idéal de carré nul. Montrons que tout R -morphisme $\bar{\varphi} : B \rightarrow C/J$ se relève en un morphisme $\varphi : B \rightarrow C$. Comme Z est distingué, on a $A = R[X][1/f]$ où $X = (X_1, \dots, X_n)$ est un uplet d'indéterminées. Par la propriété universelle des anneaux de polynômes, l'application $R[X] \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C/J$ se relève en un morphisme $\chi : R[X] \rightarrow C$. Or l'image de f dans C est inversible car inversible modulo l'idéal nilpotent J , donc χ se factorise en $\psi : A \rightarrow C$. Comme $\psi(I) \subset J$, on a une application B -linéaire induite $\psi' : I/I^2 \rightarrow J$. Utilisant le fait que la suite exacte conormale ci-dessus est scindée, on peut étendre ψ' à $\Omega_{A/R}^1 \otimes_A B$ en envoyant un supplémentaire de I/I^2 sur zéro :

$$\begin{array}{ccccccc} & & I & \hookrightarrow & A & & \\ & & \downarrow & & \downarrow d_{A/R} & & \\ 0 & \longrightarrow & I/I^2 & \longrightarrow & \Omega_{A/R}^1 \otimes_A B & \longrightarrow & \Omega_{B/R}^1 \longrightarrow 0. \\ & & \searrow \psi' & & \downarrow \psi'' = \psi' \oplus 0 & & \\ & & & & J & & \end{array}$$

La dérivation induite $\partial = \psi'' \circ d_{A/R} : A \rightarrow J$ coïncide avec ψ sur I , donc $\psi - \partial : A \rightarrow C$ se factorise en un morphisme $\varphi : B \rightarrow C$ qui relève $\bar{\varphi} : B \rightarrow C/J$.

Passons au cas général. On se donne un schéma affine Y , un sous-schéma fermé Y_0 défini par un idéal \mathcal{J} de carré nul, et un morphisme $\bar{\varphi} : Y_0 \rightarrow X$. Nous devons construire un relèvement $\varphi : Y \rightarrow X$. Comme $Y_0 \hookrightarrow Y$ est un homéomorphisme, on connaît déjà l'application continue sous-jacente à φ , qui est $\bar{\varphi}$, ainsi que le faisceau $\varphi^*\mathcal{O}_X$, qui est $\bar{\varphi}^*\mathcal{O}_X$, et il ne reste qu'à construire le comorphisme $\varphi^\sharp : \bar{\varphi}^*\mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_Y$. Dans la suite, nous identifierons ouverts de Y_0 et ouverts de Y . Tout $x \in X$ possède un voisinage ouvert affine U_x avec une immersion fermée dans un ouvert affine de \mathbb{A}_S^n , comme plus haut. Comme Y est quasi-compact, on peut recouvrir chaque $(\bar{\varphi})^{-1}(U_x)$ par des ouverts affines distingués dans Y puis extraire de cette collection un sous-recouvrement fini $\mathcal{U} := (Y_i)$ de Y . Notons $\bar{\varphi}_i := \bar{\varphi}|_{Y_i}$. D'après le cas particulier traité plus haut, pour chaque i le morphisme $\bar{\varphi}_i$ possède un relèvement $\varphi_i : Y_i \rightarrow X$. Sur l'intersection Y_{ij} , la différence $\varphi_i^\sharp - \varphi_j^\sharp$ est une dérivation (voir 3.1.6)

$$\partial_{ij} : \bar{\varphi}^*\mathcal{O}_X|_{Y_{ij}} \rightarrow \mathcal{J}|_{Y_{ij}}$$

et les ∂_{ij} sont des sections sur Y_{ij} du \mathcal{O}_{Y_0} -module quasi-cohérent

$$\mathcal{F} := \mathcal{D}er_{\mathcal{O}_S}(\bar{\varphi}^*\mathcal{O}_X, \mathcal{J}) = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{Y_0}}(\bar{\varphi}^*\Omega_{X/S}^1, \mathcal{J}).$$

Évidemment, pour tous i, j, k on a

$$\partial_{jk} - \partial_{ik} + \partial_{ij} = (\varphi_j^\sharp - \varphi_k^\sharp) - (\varphi_i^\sharp - \varphi_k^\sharp) + (\varphi_i^\sharp - \varphi_j^\sharp) = 0$$

de sorte que (∂_{ij}) définit un 1-cocycle de \mathcal{F} relativement à \mathcal{U} . Par le lemme 3.5.3, il existe des dérivations $\delta_i : \bar{\varphi}^*\mathcal{O}_X|_{Y_i} \rightarrow \mathcal{J}|_{Y_i}$ telles que $\partial_{ij} = \delta_j - \delta_i$. Ceci signifie que les morphismes $\varphi'_i := \varphi_i^\sharp + \delta_i$ coïncident sur les intersections et donc se recollent pour donner un morphisme $\varphi' : \bar{\varphi}^*\mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_Y$ qui relève $\bar{\varphi}^\sharp$.

(2) \Rightarrow (1). Soit $x \in X$. Pour montrer que f est lisse en x , on peut se restreindre à des voisinages de x et $s = f(x)$ et supposer que $S = \text{Spec}(R)$ et $X = \text{Spec}(B)$ est un sous-schéma fermé de $Z := \mathbb{A}_S^n = \text{Spec}(A)$ défini par un idéal I . Montrons que la suite conormale

$$0 \longrightarrow I/I^2 \longrightarrow \Omega_{A/R}^1 \otimes_A B \longrightarrow \Omega_{B/R}^1 \longrightarrow 0$$

est exacte en I/I^2 et localement scindée. Considérons l'extension définie par la projection canonique $\nu : A/I^2 \rightarrow A/I$:

$$0 \longrightarrow I/I^2 \longrightarrow A/I^2 \xrightarrow{\nu} A/I \longrightarrow 0,$$

En appliquant la propriété de relèvement (2) au morphisme $\text{id} : A/I \rightarrow A/I$, on trouve un morphisme $\varphi : A/I \rightarrow A/I^2$ tel que $\nu \circ \varphi = \text{id}$. Alors les morphismes id_{A/I^2} et $\varphi \circ \nu$ sont deux relèvements de ν , et leur différence est une R -dérivation

$$\tau := \text{id}_{A/I^2} - \varphi \circ \nu : A/I^2 \longrightarrow I/I^2.$$

Par composition avec la projection canonique, on trouve une dérivation

$$A \xrightarrow{\text{can}} A/I^2 \xrightarrow{\tau} I/I^2$$

induisant un morphisme $\Omega_{A/R}^1 \rightarrow I/I^2$ qui montre à la fois que la suite conormale complétée par un 0 à gauche est exacte, et scindée. Comme Z est lisse, le faisceau $\Omega_{A/R}^1 \otimes_A B$ est libre sur B , donc les termes de la suite exacte sont projectifs i.e. localement libres. Dès lors, quitte à rétrécir le voisinage de x , ils sont libres. Choisissons des éléments $g_{r+1}, \dots, g_n \in I$ dont les images dans I/I^2 forment une base. Par Nakayama, les g_i engendrent I , et leurs différentielles sont bien sûr indépendantes en x . Ceci prouve que f est lisse en x . \square

4 Diviseurs et faisceaux inversibles

Il y a au moins deux raisons majeures pour s'intéresser aux diviseurs et aux faisceaux inversibles. La première est l'étude de la géométrie *interne* des variétés, qui passe tout d'abord par les sous-variétés de petite dimension (points, courbes) et de petite codimension (diviseurs). La seconde est l'étude de la géométrie *externe* des variétés, et en particulier de leurs morphismes vers l'espace projectif, ce qui comme on va le voir revient à comprendre les faisceaux inversibles. Il est remarquable qu'il existe des liens très étroits entre ces deux thèmes, c'est-à-dire entre diviseurs et faisceaux inversibles.

4.1 Diviseurs de Cartier

4.1.1 Fonctions méromorphes. Dans un anneau A , on note $\mathcal{S}(A)$ l'ensemble des éléments *non diviseurs de 0* ou *réguliers* (c'est synonyme), et A_{tot} l'*anneau total des fractions* de A , localisé de A par rapport à la partie multiplicative $\mathcal{S}(A)$. Décrivons la construction du faisceau des fonctions méromorphes, qui est la version faisceautique de A_{tot} .

4.1.2 Définition. Soit X un schéma. On dit qu'une section f de \mathcal{O}_X sur un ouvert $U \subset X$ est *régulière* si l'endomorphisme de \mathcal{O}_U -modules $f : \mathcal{O}_U \rightarrow \mathcal{O}_U$ est injectif. On note $\mathcal{S}_X(U)$ l'ensemble des sections régulières de \mathcal{O}_X sur U .

Le lecteur démontrera en exercice les assertions suivantes :

- (1) \mathcal{S}_X est un sous-faisceau de \mathcal{O}_X .
- (2) $f \in \mathcal{S}_X(U)$ si et seulement si pour tout $x \in U$, le germe f_x est régulier dans l'anneau $\mathcal{O}_{X,x}$.
- (3) $\mathcal{S}_X(U)$ est inclus dans l'ensemble $\mathcal{S}(\mathcal{O}_X(U))$ des éléments réguliers de $\mathcal{O}_X(U)$.
- (4) $\mathcal{S}_X(U) = \mathcal{S}(\mathcal{O}_X(U))$ si U est *affine* (utiliser la fidèle platitude de $A \rightarrow \prod A_p$, cf 2.3.9).

Notons que dans le cas non affine, l'inclusion $\mathcal{S}_X(U) \subset \mathcal{S}(\mathcal{O}_X(U))$ est stricte en général : un exemple est donné dans [K11], qui montre que la définition de [EGA] IV.20.1.3 n'est pas bonne. Ce n'est donc pas la même chose de dire que f est régulière comme section de \mathcal{O}_X sur U ou comme élément de l'anneau $\mathcal{O}_X(U)$.

4.1.3 Définition. Le *faisceau des fonctions méromorphes* \mathcal{M}_X est le faisceau associé au préfaisceau $U \mapsto \mathcal{S}_X(U)^{-1}\mathcal{O}_X(U)$.

On a un morphisme canonique injectif $\mathcal{O}_X \hookrightarrow \mathcal{M}_X$ qui fait de \mathcal{M}_X une \mathcal{O}_X -algèbre, et en particulier un \mathcal{O}_X -module. Si X est réduit et localement noethérien, \mathcal{M}_X est quasi-cohérent, mais ce n'est pas le cas en général. Étant donnée une fonction méromorphe $\varphi \in \Gamma(X, \mathcal{M}_X)$, on dit que φ est *définie sur* U si $\varphi|_U \in \mathcal{O}_X(U)$. Comme \mathcal{O}_X est un faisceau, on voit qu'il y a un plus grand ouvert sur lequel φ est définie, qui est la réunion de tous les ouverts sur lesquels elle est définie ; on l'appelle le *domaine de définition* de φ .

Le morphisme $\mathcal{O}_X \hookrightarrow \mathcal{M}_X$ induit un morphisme injectif $\mathcal{O}_X^\times \hookrightarrow \mathcal{M}_X^\times$ sur les sous-groupes d'éléments inversibles. On vérifie facilement que

$$\mathcal{O}_X \cap \mathcal{M}_X^\times = \mathcal{S}_X \quad \text{et} \quad \mathcal{S}_X \cap \mathcal{S}_X^{-1} = \mathcal{O}_X^\times.$$

4.1.4 Exemples. Soit X un schéma intègre, de corps de fonctions $K = \mathcal{O}_{X,\eta}$. Soit $j : \{\eta\} \hookrightarrow X$ l'inclusion du point générique dans X . Alors pour tout ouvert U , on a $\mathcal{S}_X(U) = \mathcal{O}_X(U) \setminus \{0\}$ donc $\mathcal{M}_X(U) = K$. Ceci montre que $\mathcal{M}_X = j_*\mathcal{O}_{X,\eta} = \tilde{K}$, le faisceau constant égal à K . Plus généralement, si X est un schéma réduit noethérien, on a $\mathcal{M}_X = \bigoplus_{j_{\eta,*}} \mathcal{O}_{X,\eta}$, la somme portant sur les points génériques des composantes irréductibles de X .

4.1.5 Définitions.

(1) On appelle *diviseur de Cartier sur* X une section globale du faisceau $\mathcal{M}_X^\times/\mathcal{O}_X^\times$. On note $\text{Div}(X)$ le groupe des diviseurs de Cartier sur X .

(2) On dit qu'un diviseur de Cartier est *effectif* si c'est une section globale du sous-faisceau $(\mathcal{O}_X \cap \mathcal{M}_X^\times)/\mathcal{O}_X^\times$. On note $\text{Div}^+(X)$ le sous-monoïde des diviseurs de Cartier effectifs.

(3) On dit qu'un diviseur de Cartier est *principal* s'il est dans l'image du morphisme $\text{div} : \Gamma(X, \mathcal{M}_X^\times) \rightarrow \text{Div}(X)$ induit par le quotient $\mathcal{M}_X^\times \rightarrow \mathcal{M}_X^\times/\mathcal{O}_X^\times$. On dit que deux diviseurs de Cartier sont *linéairement équivalents* s'ils diffèrent par un diviseur principal. On note $\text{Divpr}(X)$ le sous-groupe des diviseurs de Cartier principaux et $\text{CaCl}(X) = \text{Div}(X)/\text{Divpr}(X)$.

4.1.6 Remarque. Par construction $\text{Div}(X)$ est donc l'ensemble des sections globales du *faisceau des diviseurs de Cartier* $\mathcal{D}iv_X = \mathcal{M}_X^\times/\mathcal{O}_X^\times$. De même $\text{Div}^+(X)$ est l'ensemble des sections globales du *faisceau des diviseurs de Cartier effectifs* $\mathcal{D}iv_X^+ = \mathcal{S}_X/\mathcal{O}_X^\times = (\mathcal{O}_X \cap \mathcal{M}_X^\times)/\mathcal{O}_X^\times$. De plus $\mathcal{D}iv_X$ est engendré par $\mathcal{D}iv_X^+$, et c'est même son symétrisé (le *symétrisé* d'un monoïde commutatif est le plus petit groupe qui le contient, obtenu en ajoutant formellement les opposés des éléments du monoïde, comme on construit \mathbb{Z} à partir de \mathbb{N}).

De manière concrète, si $D \in \text{Div}(X)$, il existe un recouvrement ouvert affine $U_i = \text{Spec}(A_i)$ et des fonctions méromorphes $f_i \in ((A_i)_{\text{tot}})^\times$ telles que $D|_{U_i} = \text{div}(f_i)$ et $f_i(f_j)^{-1} \in \mathcal{O}_X^\times(U_i \cap U_j)$ pour tous i, j .

La structure de groupe sur l'ensemble des diviseurs est de nature multiplicative, mais la tradition est de la noter additivement : par exemple, on écrit $\text{div}(fg) = \text{div}(f) + \text{div}(g)$ et $\text{div}(f^{-1}) = -\text{div}(f)$. La relation \leq sur $\text{Div}(X)$ définie par « $D \leq D'$ si et seulement

si $D' - D$ est effectif » est une relation d'ordre compatible à la structure de groupe. Par ailleurs, la relation d'équivalence définie par le sous-groupe des diviseurs principaux est notée \sim et appelée l'*équivalence linéaire*. Enfin mentionnons qu'on appelle *support de D* l'ensemble des $x \in X$ tels que $D_x \neq 0$; c'est un fermé.

4.1.7 Proposition. *Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de schémas. Supposons que l'on est dans l'un des deux cas suivants :*

- (1) *f est plat, ou*
- (2) *X et Y sont intègres et f est dominant.*

Alors il existe un morphisme de groupes $f^ : \text{Div}(Y) \rightarrow \text{Div}(X)$ qui préserve les diviseurs effectifs.*

Preuve : Considérons le comorphisme $f^\# : \mathcal{O}_Y \rightarrow f_*\mathcal{O}_X$. Dans le cas (1), pour tout $x \in X$ le morphisme $\mathcal{O}_{Y,f(x)} \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$ est plat donc envoie un élément régulier sur un élément régulier. Dans le cas (2), $f^\#$ est un morphisme injectif entre faisceaux d'algèbres intègres. Dans les deux cas, on a $f^\#(\mathcal{S}_Y) \subset f_*\mathcal{S}_X$. Alors, compte tenu du fait (élémentaire) que $(f_*\mathcal{A})^\times = f_*(\mathcal{A}^\times)$ pour tout faisceau de \mathcal{O}_X -algèbres \mathcal{A} , il y a des morphismes induits $\mathcal{M}_Y \rightarrow f_*\mathcal{M}_X$ puis

$$\text{Div}_Y = \mathcal{M}_Y^\times / \mathcal{O}_Y^\times \rightarrow f_*\mathcal{M}_X^\times / f_*\mathcal{O}_X^\times \rightarrow f_*(\mathcal{M}_X^\times / \mathcal{O}_X^\times) = f_*\text{Div}_X.$$

En passant aux sections globales, on trouve une flèche

$$\text{Div}(Y) = \Gamma(Y, \text{Div}_Y) \rightarrow \Gamma(Y, f_*\text{Div}_X) = \Gamma(X, \text{Div}_X) = \text{Div}(X)$$

comme souhaité. □

Pour conclure cette partie, indiquons comment associer à un diviseur de Cartier effectif $D \in \text{Div}^+(X)$ un sous-schéma fermé $Y(D) \subset X$ qui le détermine. Par hypothèse, D est une section de $\mathcal{S}_X / \mathcal{O}_X^\times$ de sorte que le faisceau d'idéaux $\mathcal{J}_D := D \cdot \mathcal{O}_X$ est bien défini. Le schéma $Y(D)$ est le sous-schéma fermé associé à cet idéal. Concrètement, D est localement défini par une équation $f \in \mathcal{S}_X(U)$, unique aux inversibles près, et $\mathcal{J}_D|_U = f \cdot \mathcal{O}_U$. Il est clair que réciproquement l'idéal \mathcal{J}_D détermine localement l'équation f à une section de \mathcal{O}_X^\times près, donc D lui-même. Il est fréquent d'appeler $Y(D)$ un diviseur de Cartier, et cet abus de langage est inoffensif.

4.1.8 Remarque. Nous avons eu l'occasion plusieurs fois de constater que les immersions fermées définies localement par l'annulation d'un élément régulier jouissent de très bonnes propriétés, par exemple en ce qui concerne la dimension (1.3.9, 1.3.12) ou la platitude (2.3.15). Pour obtenir une notion stable par composition, on appelle *immersion fermée régulière* une immersion fermée $j : Y \rightarrow X$ telle que pour tout $y \in Y$, il existe un voisinage affine $U = \text{Spec}(A)$ de $x = j(y)$ tel que l'idéal de définition de $j(Y) \cap U$ est engendré par une suite finie (f_1, \dots, f_r) telle que f_i est un élément régulier de $A/(f_1, \dots, f_{i-1})$ pour tout i . On appelle *immersion régulière* une immersion qui est composée d'une immersion fermée régulière suivie d'une immersion ouverte. L'entier r est bien défini et localement constant; on l'appelle la *codimension* de l'immersion régulière (que X soit ou non de dimension finie). Avec cette terminologie, on voit facilement que l'application $D \mapsto Y(D)$ établit une bijection entre diviseurs de Cartier effectifs et sous-schémas fermés régulièrement immergés de codimension 1 de X .

4.2 Faisceaux inversibles et groupe de Picard

4.2.1 Définition. Soit X un schéma. Un *faisceau inversible* sur X est un \mathcal{O}_X -module localement libre de rang 1.

Si \mathcal{L} et \mathcal{L}' sont deux faisceaux inversibles, alors le produit tensoriel $\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}'$ et le *dual* $\mathcal{L}^\vee = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}, \mathcal{O}_X)$ sont encore des faisceaux inversibles. De plus, le morphisme canonique $\mathcal{L}^\vee \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{O}_X$ défini par $\varphi \otimes f \mapsto \varphi(f)$ est un isomorphisme. Compte tenu de l'existence d'isomorphismes canoniques

- (a) d'associativité : $(\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}') \otimes \mathcal{L}'' \simeq \mathcal{L} \otimes (\mathcal{L}' \otimes \mathcal{L}'')$,
- (b) de commutativité : $\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}' \simeq \mathcal{L}' \otimes \mathcal{L}$,

l'ensemble des classes d'isomorphisme de faisceaux inversibles sur X est un groupe commutatif dont l'élément neutre est la classe du faisceau structural $[\mathcal{O}_X]$. Dans ce groupe, l'inverse de $[\mathcal{L}]$ est $[\mathcal{L}^\vee]$ et c'est pourquoi on appelle aussi \mathcal{L}^\vee l'*inverse* de \mathcal{L} et on le note aussi \mathcal{L}^{-1} .

4.2.2 Définition. On appelle *groupe de Picard* le groupe des classes d'isomorphisme de faisceaux inversibles sur X , et on le note $\text{Pic}(X)$.

4.2.3 Proposition. *Pour tout morphisme de schémas $f : Y \rightarrow X$, le morphisme $\mathcal{L} \mapsto f^*\mathcal{L}$ induit un morphisme de groupes $f^* : \text{Pic}(X) \rightarrow \text{Pic}(Y)$.*

Preuve : Il suffit de noter que $f^*\mathcal{O}_X \simeq \mathcal{O}_Y$ et $f^*(\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}') \simeq f^*\mathcal{L} \otimes f^*\mathcal{L}'$. □

4.2.4 Proposition. *Soit X un schéma. Pour tout diviseur de Cartier D , notons $\mathcal{O}_X(D)$ le sous- \mathcal{O}_X -module de \mathcal{M}_X engendré par $-D$. Alors $D \mapsto [\mathcal{O}_X(D)]$ définit un morphisme de groupes $\text{Div}(X) \rightarrow \text{Pic}(X)$ qui se factorise en un morphisme injectif $\text{CaCl}(X) \hookrightarrow \text{Pic}(X)$.*

En termes concrets, localement D est défini par une équation f et $\mathcal{O}_X(D)$ par $1/f$. Il est clair que tout faisceau inversible qui est un sous- \mathcal{O}_X -module de \mathcal{M}_X est de la forme $\mathcal{O}_X(D)$, car le choix d'un générateur local d'un faisceau inversible est unique aux inversibles près.

Preuve : Notons d'abord que le sous-faisceau $\mathcal{O}_X(D) \subset \mathcal{M}_X$ est inversible. Ceci vient du fait que sur chaque ouvert U sur lequel D est défini par un élément régulier f , le morphisme $\mathcal{O}_U(D) = (1/f)\mathcal{O}_U \rightarrow \mathcal{O}_U, s/f \mapsto s$ est un isomorphisme. Vérifions qu'on obtient un morphisme de groupes. Soient D, D' deux diviseurs de Cartier, localement définis par des équations f et f' . Alors $D + D'$ est défini par ff' donc $\mathcal{O}_X(D + D')$ est engendré localement par $1/(ff')$. Or, localement toujours, on a $\mathcal{O}_X(D) \otimes \mathcal{O}_X(D') = (1/f)\mathcal{O}_X \otimes (1/f')\mathcal{O}_X$ qui est isomorphe à $1/(ff')\mathcal{O}_X$ comme sous-faisceau de \mathcal{M}_X . Pour finir, supposons que $\mathcal{O}_X(D)$ est trivial et notons f l'image de la section globale 1 par la composée $\mathcal{O}_X \simeq \mathcal{O}_X(D) \hookrightarrow \mathcal{M}_X$. C'est une fonction méromorphe globale qui définit D localement. En d'autres termes $D = \text{div}(f)$, i.e. $D \in \text{Divpr}(X)$. □

En fait, dans la plupart des cas rencontrés en pratique, le morphisme $\text{Div}(X) \rightarrow \text{Pic}(X)$ est surjectif et induit un isomorphisme $\text{CaCl}(X) \simeq \text{Pic}(X)$, ou de manière équivalente,

tout faisceau inversible \mathcal{L} se plonge dans le faisceau des fonctions méromorphes \mathcal{M}_X . C'est le cas par exemple si X est quasi-projectif sur un schéma noethérien S . C'est le cas aussi si X est intègre. Nous nous contenterons ici de la preuve dans le cas intègre.

4.2.5 Proposition. *Si X est intègre, le morphisme $\text{Div}(X) \rightarrow \text{Pic}(X)$ est surjectif.*

Preuve : Soit $[\mathcal{L}] \in \text{Pic}(X)$. Compte tenu des commentaires précédents, il suffit de montrer qu'il existe un morphisme injectif $\mathcal{L} \hookrightarrow \mathcal{M}_X$. L'hypothèse d'intégrité entraîne que le faisceau des fonctions méromorphes \mathcal{M}_X est le faisceau constant défini par le corps des fonctions K de X , qui est aussi l'anneau local de X au point générique η . Soit $s \in \mathcal{L}_\eta$ un germe non nul, qui est donc un générateur du K -espace vectoriel \mathcal{L}_η . Alors on a un morphisme bien défini et injectif $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{M}_X$, $f \mapsto f_\eta/s_\eta$. \square

4.2.6 Description cohomologique de $\text{Pic}(X)$. Pour un schéma X , un faisceau de groupes abéliens \mathcal{F} sur X , un recouvrement ouvert \mathcal{U} , on a défini dans 3.5 le k -ième groupe de cohomologie de Čech de \mathcal{F} relativement à \mathcal{U} , noté $\check{H}^k(\mathcal{U}, \mathcal{F})$. Si $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ et $\mathcal{V} = (V_j)_{j \in J}$ sont deux recouvrements ouverts, on appelle *refinement* une application $\lambda : J \rightarrow I$ telle que $V_j \subset U_{\lambda(j)}$ pour tout $j \in J$. On note simplement $\mathcal{V} \prec \mathcal{U}$; cette relation est filtrante car deux recouvrements ouverts $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ et $\mathcal{V} = (V_j)_{j \in J}$ ont toujours un refinement commun $\mathcal{W} = (W_{(i,j)})_{(i,j) \in I \times J}$ avec $W_{(i,j)} = U_i \cap V_j$. Si $\mathcal{V} \prec \mathcal{U}$, pour tout k , on a une application canonique de restriction $C^k(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C^k(\mathcal{V}, \mathcal{F})$ qui envoie une collection (s_{i_0, \dots, i_k}) sur la collection $(s_{\lambda(j_0), \dots, \lambda(j_k)}|_{V_{i_0, \dots, i_k}})$. Ces applications commutent aux opérateurs de Čech d^k et induisent des applications $\check{H}^k(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow \check{H}^k(\mathcal{V}, \mathcal{F})$. Le k -ième groupe de cohomologie de Čech de X à coefficients dans \mathcal{F} est défini comme la limite inductive

$$\check{H}^k(X, \mathcal{F}) \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \varinjlim \check{H}^k(\mathcal{U}, \mathcal{F}).$$

4.2.7 Proposition. *Il existe un isomorphisme canonique $\text{Pic}(X) \simeq \check{H}^1(X, \mathcal{O}_X^\times)$.*

On notera que le faisceau \mathcal{O}_X^\times n'est pas quasi-cohérent et que le lemme d'annulation 3.5.3 ne s'applique pas.

Preuve : Soit $[\mathcal{L}] \in \text{Pic}(X)$. Choisissons un recouvrement ouvert $\mathcal{U} = (U_i)$ sur lequel existent des trivialisations $\varphi_i : \mathcal{L}|_{U_i} \rightarrow \mathcal{O}_{U_i}$. Sur les intersections, l'isomorphisme $\varphi_j^{-1}\varphi_i$ est la multiplication par une section $\alpha_{ij} \in \mathcal{O}_X(U_{ij})^\times$. La collection de fonctions de transition $\alpha = (\alpha_{ij})$ satisfait la condition de cocycle $\alpha_{jk}\alpha_{ik}^{-1}\alpha_{ij} = 1$, et la collection β obtenue par un refinement $\mathcal{V} \prec \mathcal{U}$ est la restriction de α . Compte tenu du fait que l'ensemble des raffinements est filtrant, ce qui précède montre que la classe $[\alpha] \in \check{H}^1(X, \mathcal{O}_X^\times)$ est bien définie et ne dépend que de $[\mathcal{L}]$.

Réciproquement, considérons une classe $[\alpha] \in \check{H}^1(X, \mathcal{O}_X^\times)$, définie par un cocycle (α_{ij}) sur un certain recouvrement ouvert $\mathcal{U} = (U_i)$. Considérons les \mathcal{O}_{U_i} -modules inversibles $\mathcal{L}_i = \mathcal{O}_{U_i}$ et les isomorphismes de recollement $\mathcal{L}_i|_{U_{ij}} \rightarrow \mathcal{L}_j|_{U_{ij}}$ donnés par la multiplication par α_{ij} . La condition de cocycle dit que ces isomorphismes sont compatibles sur les intersections triples, de sorte que les \mathcal{L}_i se recollent en un faisceau inversible \mathcal{L} . Si on représente la classe $[\alpha]$ par un cocycle cohomologue $\alpha'_{ij} = \alpha_{ij}\rho_i/\rho_j$ et que l'on fabrique un

faisceau \mathcal{L}' en recollant les $\mathcal{L}'_i = \mathcal{O}_{U_i}$ selon les isomorphismes de multiplication par α'_{ij} , on a des isomorphismes $\rho_i : \mathcal{L}'_i \rightarrow \mathcal{L}_i$ et des compatibilités exprimées par des diagrammes commutatifs :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}'_i|_{U_{ij}} & \xrightarrow{\alpha'_{ij}} & \mathcal{L}'_j|_{U_{ij}} \\ \rho_i \downarrow & & \downarrow \rho_j \\ \mathcal{L}_i|_{U_{ij}} & \xrightarrow{\alpha_{ij}} & \mathcal{L}_j|_{U_{ij}}. \end{array}$$

Ainsi les ρ_i se recollent en un isomorphisme $\rho : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}'$, donc $[\mathcal{L}] = [\mathcal{L}']$. \square

Voici un premier exemple de calcul de groupe de Picard, qui inclut par exemple le cas de l'espace affine sur un corps. Cet exemple sera utilisé dans 4.3.3.

4.2.8 Proposition. *Soit A un anneau intègre factoriel et $X = \text{Spec}(A)$. Alors, on a $\text{Pic}(X) = 0$.*

Preuve : Notons K le corps de fractions de A . Comme X est affine, tout faisceau inversible \mathcal{L} est le faisceau associé au A -module de type fini $M = \Gamma(X, \mathcal{L})$, localement libre de rang 1. Alors le morphisme injectif $M \rightarrow M \otimes_A K \simeq K$ montre que M se plonge dans K . On peut donc supposer que $M \subset K$, puis en choisissant des générateurs $a_i/b_i \in K$ pour M et en remplaçant M par bM où b est le produit des b_i , on peut supposer que $M \subset A$. Choisissons un recouvrement par des ouverts affines distingués $U_i = D(a_i)$, $i = 1, \dots, n$, qui trivialisent \mathcal{L} , et $t_i \in A$ premier à a_i tel que $M[1/a_i] = t_i A[1/a_i]$. Par la propriété de faisceau pour \mathcal{L} , on a l'intersection dans K :

$$M = M\left[\frac{1}{a_1}\right] \cap \dots \cap M\left[\frac{1}{a_n}\right] = (M\left[\frac{1}{a_1}\right] \cap A) \cap \dots \cap (M\left[\frac{1}{a_n}\right] \cap A) = t_1 A \cap \dots \cap t_n A = tA$$

où t est le pgcd des t_i . Donc $[\mathcal{L}] = 0$. \square

4.3 Foncteur de points de l'espace projectif

Rappelons que dans la convention de Grothendieck, qui est celle que nous adoptons ici, l'espace projectif $\mathbb{P}^n(k)$ en tant qu'ensemble est l'ensemble des hyperplans linéaires de k^{n+1} . L'espace projectif en tant que S -schéma est défini par le Proj relatif

$$\mathbb{P}_S^n = \text{Proj}_S(\mathcal{O}_S[x_0, \dots, x_n]).$$

On peut éviter la construction relative en posant $\mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^n = \text{Proj}(\mathbb{Z}[x_0, \dots, x_n])$ puis $\mathbb{P}_S^n = \mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^n \times_{\mathbb{Z}} S$. Dans la suite, travaillons sur un anneau de base R pour simplifier. Le schéma \mathbb{P}_R^n est recouvert par les ouverts affines standard $U_i = D_+(x_i) = \text{Spec}(R[x_0/x_i, \dots, x_n/x_i])$. Il porte un faisceau inversible canonique $\mathcal{O}(1) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}_R^n}(1)$ tel que $\mathcal{O}(1)|_{U_i} = x_i \mathcal{O}_{U_i}$ est l'ensemble des éléments de degré 1 dans l'anneau gradué $R[x_0, \dots, x_n, 1/x_i]$. Pour $d \geq 0$, la puissance tensorielle $\mathcal{O}(1)^{\otimes d}$ s'identifie au faisceau $\mathcal{O}(d)$ engendré sur U_i par $(x_i)^d$.

4.3.1 Lemme. Si $d \geq 0$, le module $\Gamma(\mathbb{P}_R^n, \mathcal{O}(d))$ est l'ensemble des polynômes homogènes de degré d en x_0, \dots, x_n à coefficients dans R . Si $d < 0$, on a $\Gamma(\mathbb{P}_R^n, \mathcal{O}(d)) = 0$.

Preuve : Il est clair qu'un polynôme homogène $f(x_0, \dots, x_n)$ de degré d se restreint sur U_i en un élément de la forme $(x_i)^d a_i$ avec $a_i = f(x_0/x_i, \dots, x_n/x_i) \in \mathcal{O}_{U_i}$, donc définit une section globale de $\mathcal{O}(d)$. Réciproquement, soit s une section globale de $\mathcal{O}(d)$. Pour chaque i , on peut écrire $s|_{U_i} = (x_i)^d a_i$ où a_i est un polynôme en les variables $x_{k/i} = x_k/x_i$. Sur les intersections $U_{ij} = U_i \cap U_j$, on a l'égalité $(x_i)^d a_i = (x_j)^d a_j$. Si $d \geq 0$, comme le membre de droite n'a pas de pôle en x_i , chaque monôme de a_i est de degré $\leq d$. Il s'ensuit que $(x_i)^d a_i$ est un polynôme homogène de degré d en x_0, \dots, x_n . Si $d = -e < 0$, on a $a_i/(x_i)^e = a_j/(x_j)^e$. Si ces polynômes sont non nuls, le membre de gauche possède un pôle selon x_i mais pas le membre de droite, ce qui est impossible. \square

4.3.2 Exercice. Montrez que le rang de $\Gamma(\mathbb{P}_R^n, \mathcal{O}(d)) = R[x_0, \dots, x_n]_{\deg=d}$ est égal à $\binom{n+d}{d}$:

- (1) en calculant $1/(1-t)^{n+1}$ de deux manières différentes,
- (2) en montrant que l'application qui à $x_0^{i_0} \dots x_n^{i_n}$ associe la partie $\{i_0, i_0+i_1+1, \dots, i_0+i_1+\dots+i_{n-1}+n-1\}$ est une bijection entre la base monomiale canonique de $R[x_0, \dots, x_n]_{\deg=d}$ et l'ensemble des parties à n éléments de l'ensemble $\{0, \dots, d+n-1\}$.

4.3.3 Proposition. Soit k un corps et $X = \mathbb{P}_k^n$. Alors le morphisme $d \mapsto \mathcal{O}(d)$ induit un isomorphisme $\text{Pic}(X) \simeq \mathbb{Z}$.

Preuve : L'application $\mathbb{Z} \rightarrow \text{Pic}(X)$, $d \mapsto \mathcal{O}(d)$ est bien définie et est un morphisme de groupes. Montrons qu'elle est surjective. Soit \mathcal{L} un faisceau inversible sur X . D'après le lemme 4.2.8, sur chaque ouvert standard $U_i = D_+(x_i)$ il existe une trivialisatation $\varphi_i : \mathcal{L}|_{U_i} \rightarrow \mathcal{O}_{U_i}$. Comme les fonctions inversibles sur $U_i \cap U_j$ sont les fonctions $u(x_i/x_j)^d$ avec $u \in k^*$ et $d \in \mathbb{Z}$, chaque fonction de transition $\alpha_{ij} = \varphi_j \varphi_i^{-1} : \mathcal{O}_{U_{ij}} \rightarrow \mathcal{O}_{U_{ij}}$ est la multiplication par un élément $u_{ij}(x_i/x_j)^{d_{ij}}$, $u_{ij} \in k^*$, $d_{ij} \in \mathbb{Z}$. La relation de cocycle

$$u_{ik}(x_i/x_k)^{d_{ik}} = u_{jk}(x_j/x_k)^{d_{jk}} u_{ij}(x_i/x_j)^{d_{ij}}$$

montre que $d_{ik} = d_{ij} = d_{jk} = d$ est indépendant des indices et que $u_{ik} = u_{jk} u_{ij}$. On trouve alors $u_{ij} = u_{ik}/u_{jk}$ qui est indépendant de k . Si l'on note $v_i = u_{ik_0}$ pour un certain indice k_0 fixé, on trouve $u_{ij} = v_i/v_j$. Quitte à remplacer φ_i par $v_i^{-1} \varphi_i$, on peut alors supposer que $u_{ij} = 1$. Finalement les fonctions de transition de \mathcal{L} sont les fonctions $(x_i/x_j)^d$, qui sont les fonctions de transition de $\mathcal{O}(d)$, donc $\mathcal{L} \simeq \mathcal{O}(d)$. Finalement le fait que $\mathbb{Z} \rightarrow \text{Pic}(X)$ est injectif provient de 4.3.1 et 4.3.2. \square

4.3.4 Définition. Soit X un schéma, $x \in X$ un point, \mathcal{L} un faisceau inversible sur X , V un sous-groupe de $\Gamma(X, \mathcal{L})$. On dit que \mathcal{L} est engendré par les sections de V en x si les germes s_x pour $s \in V$ engendrent la fibre \mathcal{L}_x . Comme \mathcal{L} est un faisceau inversible, par Nakayama ceci est équivalent à dire qu'il existe $s \in V$ telle que $s(x) \neq 0$.

On note $V \otimes \mathcal{O}_X$, ou parfois simplement V , le \mathcal{O}_X -module défini par $(V \otimes \mathcal{O}_X)(U) = V \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_X(U)$. Si X est un S -schéma, on note $V \otimes_S \mathcal{O}_X$ le \mathcal{O}_X -module défini par $(V \otimes_S \mathcal{O}_X)(U) = V \otimes_{\Gamma(S, \mathcal{O}_S)} \mathcal{O}_X(U)$.

4.3.5 Lemme. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (1) \mathcal{L} est engendré sur X par les sections de V ,
- (2) le morphisme $V \otimes \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{L}$ défini par restriction des sections est surjectif.

En particulier, la donnée de n sections globales de \mathcal{L} qui l'engendrent est équivalente à la donnée d'un morphisme surjectif de \mathcal{O}_X -modules $\mathcal{O}_X^{\oplus n} \rightarrow \mathcal{L}$.

Preuve : C'est une reformulation des définitions. □

L'exemple fondamental de faisceau inversible engendré par ses sections globales est le faisceau $\mathcal{O}(1)$ sur \mathbb{P}_S^n (lemme 4.3.1). En fait, l'existence de la surjection $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_S^n}^{\oplus(n+1)} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}_S^n}(1)$ caractérise l'espace projectif. Plus précisément, pour tout morphisme $f : T \rightarrow \mathbb{P}_S^n$, l'application du foncteur f^* produit un faisceau inversible $\mathcal{L} = f^*\mathcal{O}(1)$ et une surjection $\varphi : \mathcal{O}_T^{n+1} \rightarrow \mathcal{L}$, et nous allons maintenant constater que ceci décrit complètement le foncteur de points de l'espace projectif.

4.3.6 Théorème. *Soit S un schéma. Alors, on a des bijections canoniques fonctorielles en T :*

$$\begin{aligned} \text{Hom}_S(T, \mathbb{P}_S^n) &= \{ \text{paires } (\mathcal{L}, \varphi) ; \mathcal{L} \text{ un } \mathcal{O}_T\text{-module inversible, } \varphi : \mathcal{O}_T^{n+1} \rightarrow \mathcal{L} \text{ surjectif} \} / \sim \\ &= \{ \text{sous-}\mathcal{O}_T\text{-modules quasi-cohérents } \mathcal{F} \subset \mathcal{O}_T^{n+1} \text{ t.q. } \mathcal{O}_T^{n+1}/\mathcal{F} \text{ est inversible} \} \end{aligned}$$

où $(\mathcal{L}, \varphi) \sim (\mathcal{L}', \varphi')$ si et seulement s'il existe un isomorphisme $\tau : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}'$ tel que $\varphi' = \tau \circ \varphi$.

Preuve : Notons $P = \mathbb{P}_S^n$. La bijection entre sous-modules $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}_T^{n+1}$ et quotients $\mathcal{O}_T^{n+1} \rightarrow \mathcal{L}$ à équivalence près est élémentaire. Étant donné un morphisme $f : T \rightarrow P$, on peut tirer en arrière la surjection $\mathcal{O}_P^{n+1} \rightarrow \mathcal{O}_P(1)$ via f pour obtenir un faisceau inversible $\mathcal{L} = f^*\mathcal{O}(1)$ et une surjection $\varphi : \mathcal{O}_T^{n+1} \rightarrow \mathcal{L}$. Réciproquement, supposons donnée la paire (\mathcal{L}, φ) et construisons un morphisme $f : T \rightarrow P$. Supposons d'abord $S = \text{Spec}(A)$ et écrivons $P = \mathbb{P}_A^n = \text{Proj}(A[x_0, \dots, x_n])$. Soient U_i les ouverts standard. Notons s_i l'image par φ du i -ième élément de la base canonique de \mathcal{O}_T^{n+1} et V_i l'ensemble des $t \in T$ tels que $s_i(t) \neq 0$. D'après le lemme de Nakayama, les V_i sont des ouverts et comme φ est surjectif, ils recouvrent T . De plus, le faisceau \mathcal{L} est engendré sur V_i par s_i , donc pour tout j il existe $u_{ij} \in \mathcal{O}_T(V_i)$ tel que $s_j = u_{ij}s_i$. On définit alors un morphisme de A -algèbres $A[x_0/x_i, \dots, x_n/x_i] \rightarrow \mathcal{O}_T(V_i)$ tel que $x_j/x_i \mapsto u_{ij}$. D'après 1.4.7, ceci définit de manière équivalente un morphisme $f_i : V_i \rightarrow U_i \subset P$. En regardant sur les intersections $U_i \cap U_j$, on voit que la condition de cocycle $u_{ik} = u_{ij}u_{jk}$ est vérifiée, ce qui implique que f_i et f_j coïncident sur $U_i \cap U_j$ et donc se recollent en $f : T \rightarrow P$. Lorsque S est quelconque, on peut le recouvrir par des ouverts affines S_λ et la canonicité de la construction précédente fait que les morphismes f_λ obtenus se recollent. Nous laissons à la lectrice le soin de vérifier que la correspondance ainsi décrite est une bijection. □

4.3.7 Remarque. Posons $\mathcal{E} = \mathcal{O}_S^{n+1}$. Il est naturel d'appeler *hyperplan de \mathcal{E}* un sous- \mathcal{O}_S -module quasi-cohérent $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ tel que \mathcal{E}/\mathcal{F} est un faisceau inversible. On voit donc que l'énoncé 4.3.6 est la généralisation naturelle de la description originelle de l'espace projectif comme classifiant les hyperplans.

4.4 Diviseurs de Weil

Supposons maintenant que X est un schéma noethérien. On rappelle (voir 1.1.3) que fermés irréductibles $Z \subset X$ et points $x \in X$ se correspondent, en associant à Z son point générique et à x son adhérence.

4.4.1 Définitions. Soit $x \in X$ et Z son adhérence.

(1) On dit que x est un *point de codimension 1*, ou que Z est un *cycle premier de codimension 1*, si $\dim(\mathcal{O}_{X,x}) = 1$. On note $X^{(1)}$ l'ensemble des points de codimension 1, identifiés aux cycles de codimension 1, et $Z^1(X)$ le groupe abélien libre de base $X^{(1)}$. On appelle *cycle de codimension 1*, ou *diviseur de Weil*, un élément de $Z^1(X)$. Un diviseur de Weil est donc une somme finie $Z = \sum n_i Z_i$ où Z_i est un cycle premier et n_i est sa *multiplicité*.

(2) On dit qu'un diviseur de Weil $Z = \sum n_i Z_i$ est *effectif* si $n_i \geq 0$ pour tout i .

(3) On appelle *support* d'un diviseur de Weil Z la réunion des cycles premiers apparaissant dans Z avec une multiplicité non nulle.

4.4.2 Remarques. (1) Si $X = \text{Spec}(A)$, la codimension de x est la hauteur de l'idéal p_x .

(2) Ces définitions se faisceautisent. Précisément, posons $\mathcal{Z}_X^1(U) = Z^1(U)$ pour tout ouvert U de X . Si $x \in U$, on sait que l'on a $\dim(\mathcal{O}_{U,x}) = \dim(\mathcal{O}_{X,x})$. Il en découle que si $U \subset V$ est une inclusion d'ouverts et Z un cycle de codimension 1 de V , alors $Z \cap U$ est soit vide, soit un cycle de codimension 1 de U . Ainsi, l'application $Z \mapsto Z \cap U$ s'étend en une application de restriction $\mathcal{Z}_X^1(V) \rightarrow \mathcal{Z}_X^1(U)$ donc \mathcal{Z}_X^1 est un faisceau. Bien sûr, on a $Z^1(X) = \Gamma(X, \mathcal{Z}_X^1)$.

(3) On définit exactement pareil les cycles de codimension k et les objets $X^{(k)}$, $Z^k(X)$, \mathcal{Z}_X^k .

Nous allons maintenant montrer qu'à tout diviseur de Cartier, on peut associer un diviseur de Weil. Nous utiliserons pour cela la notion de longueur d'un module, dont nous rappelons deux propriétés.

4.4.3 Lemme. Notons $\text{lg}_A(M)$ la longueur d'un module M sur un anneau A .

(1) Soit $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ une suite exacte de A -modules. On a :

$$\text{lg}_A(M) = \text{lg}_A(M') + \text{lg}_A(M'').$$

(2) Soit $A \rightarrow B$ un morphisme surjectif d'anneaux et M un B -module. Alors $\text{lg}_B(M) = \text{lg}_A(M)$.

Dans ces formules, on sous-entend que le membre de gauche est fini si et seulement si le membre de droite l'est.

Preuve : Lire 1.3.4 pour des rappels sur la notion de longueur. La démonstration de (1) et (2) est facile et laissée en exercice. \square

Soit $D \in \text{Div}^+(X)$ un diviseur de Cartier effectif sur X et $Y(D)$ le sous-schéma fermé de dimension 1 qui lui est associé; si $D = \text{div}(f)$ localement, alors $Y(D)$ est défini par l'idéal engendré par f . Comme $Y(D)$ est de codimension 1, seuls les points génériques de ses composantes irréductibles sont de codimension 1 dans X , ce qui montre que $X^{(1)} \cap Y(D)$ est fini.

4.4.4 Définition. Soit $D \in \text{Div}^+(X)$. On définit le *diviseur de Weil associé* à D par

$$[D] \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{x \in X^{(1)} \cap Y(D)} \text{lg}_{\mathcal{O}_{X,x}}(\mathcal{O}_{Y(D),x})\overline{\{x\}}.$$

Puisque $\mathcal{O}_{Y(D),x} = \mathcal{O}_{X,x}/(f)$ pour une équation locale f de D , le lemme 4.4.3 montre que la longueur qui apparaît est aussi la longueur de $\mathcal{O}_{Y(D),x}$ comme module sur lui-même, c'est-à-dire sa longueur comme anneau artinien, notée simplement $\text{lg}(\mathcal{O}_{Y(D),x})$.

4.4.5 Proposition. Soit X un schéma noethérien.

- (1) L'application $[-] : \text{Div}^+(X) \rightarrow Z^1(X)$ est additive.
- (2) L'application $[-]$ s'étend de manière unique en un morphisme de groupes $\text{Div}(X) \rightarrow Z^1(X)$.

Preuve : (1) Soient D, D' deux diviseurs de Cartier effectifs et $x \in X$. Si $x \notin D \cap D'$, il n'y a rien à dire. Si $x \in D \cap D'$, soient f et f' des équations locales pour D et D' sur un voisinage de x . Comme f est non diviseur de zéro, on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x}/(f') \xrightarrow{\times f} \mathcal{O}_{X,x}/(ff') \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x}/(f) \longrightarrow 0.$$

Ainsi $\text{lg}(\mathcal{O}_{Y(D+D'),x}) = \text{lg}(\mathcal{O}_{Y(D),x}) + \text{lg}(\mathcal{O}_{Y(D'),x})$ d'après le lemme 4.4.3. En sommant sur tous les x , ceci montre que $[D + D'] = [D] + [D']$.

(2) Ce qui précède est valable pour tout ouvert $U \subset X$, et donne une application additive de faisceaux $[-] : \mathcal{D}iv_X^+ \rightarrow \mathcal{Z}_X^1$. Comme $\mathcal{D}iv_X$ est le faisceau symétrisé de $\mathcal{D}iv_X^+$, cette application additive s'étend de manière unique en une application $\mathcal{D}iv_X \rightarrow \mathcal{Z}_X^1$. En passant aux sections globales, on a le résultat. Notons que le passage par les faisceaux est nécessaire pour la raison suivante : le fait que $\mathcal{D}iv_X$ est le symétrisé de $\mathcal{D}iv_X^+$, et en particulier l'engendre, n'est pas toujours vrai au niveau des sections globales. Dit autrement, l'application surjective de faisceaux $\mathcal{D}iv_X^+ \times \mathcal{D}iv_X^+ \rightarrow \mathcal{D}iv_X$, $(s, t) \mapsto s/t$, n'est pas toujours surjective sur les sections globales. \square

4.4.6 Définitions. Sur un schéma noethérien X , on appelle *diviseurs de Weil principaux* les diviseurs de Weil de la forme $[\text{div}(f)]$, pour une certaine fonction méromorphe f . On dit que deux diviseurs de Weil sont *linéairement équivalents*, ou *rationnellement équivalents*, s'ils diffèrent par un diviseur principal. On appelle *groupe des classes (de diviseurs)* le quotient de $Z^1(X)$ par le sous-groupe des diviseurs principaux, et on le note $\text{Cl}(X)$.

Le sous-groupe des diviseurs de Weil principaux est donc l'image de $\text{Divpr}(X)$ par le morphisme $\text{Div}(X) \rightarrow Z^1(X)$. On dispose d'un morphisme sur les quotients $\text{CaCl}(X) \rightarrow \text{Cl}(X)$.

Pour finir, nous poursuivons la comparaison entre diviseurs de Weil et de Cartier en regardant le cas des schémas normaux. Rappelons qu'un schéma est dit *normal*, resp. *localement factoriel*, resp. *régulier*, si ses anneaux locaux sont normaux, resp. factoriels, resp. réguliers. On a les implications : régulier \Rightarrow localement factoriel \Rightarrow normal (voir théorème 1.3.18). Dans un schéma normal, pour tout point x de codimension 1, l'anneau $\mathcal{O}_{X,x}$ est normal de dimension 1, c'est-à-dire régulier de dimension 1, ou encore un anneau de valuation discrète ; on dit qu'il est *régulier en codimension 1*. Dans ce cas, la longueur $\text{lg}_{\mathcal{O}_{X,x}}(\mathcal{O}_{Y(D),x})$ n'est autre que la valuation de l'équation locale f .

4.4.7 Théorème. *Soit X un schéma noethérien intègre normal. Alors, les applications*

$$[-] : \text{Div}(X) \rightarrow Z^1(X) \quad \text{et} \quad [-] : \text{CaCl}(X) \rightarrow \text{Cl}(X)$$

sont injectives ; elles sont bijectives si et seulement si X est localement factoriel.

Preuve : Notons K le corps de fonctions de X . Soit $D \in \text{Div}(X)$ tel que $[D] = 0$. Pour tout ouvert affine $U = \text{Spec}(A)$ sur lequel $D = \text{div}(f)$, et pour tout $x \in U^{(1)}$, on a donc $\text{lg}(\mathcal{O}_{Y(D),x}) = \text{lg}(\mathcal{O}_{X,x}/(f)) = 0$. Ceci signifie que f est inversible dans $\mathcal{O}_{X,x}$. En particulier $f \in \bigcap_{x \in U^{(1)}} \mathcal{O}_{X,x}$ donc $f \in A$ puisque X est normal (voir corollaire 1.3.6). Par ailleurs, l'inverse de f dans K vérifie les mêmes propriétés donc est lui aussi dans A , donc $f \in A^\times$. Ainsi $D|_U = 0$ puis $D = 0$.

Comme X est intègre, tous ses sous-schémas fermés localement principaux sont des diviseurs de Cartiers effectifs. Ainsi $\text{Div}(X) \rightarrow Z^1(X)$ est surjective si et seulement si tous les diviseurs de Weil sont localement principaux. Par ailleurs, d'après le lemme de Nakayama, un faisceau quasi-cohérent d'idéaux \mathcal{J} est localement principal (sur un certain recouvrement ouvert) si et seulement si \mathcal{J}_x est principal dans $\mathcal{O}_{X,x}$ pour tout x . Comme les diviseurs de Weil passant par x sont définis dans $\mathcal{O}_{X,x}$ par les idéaux premiers de hauteur 1, on voit que $[-]$ est surjective si et seulement si pour tout $x \in X$, les idéaux premiers de hauteur 1 sont principaux. Ceci signifie que $\mathcal{O}_{X,x}$ est factoriel (corollaire 1.3.7).

Ceci démontre le théorème pour la flèche $[-] : \text{Div}(X) \rightarrow Z^1(X)$; le résultat pour la seconde en découle facilement, étant donné que les diviseurs de Weil principaux sont images des diviseurs de Cartier principaux. \square

5 Introduction aux schémas en groupes

5.1 Schémas en groupes

En associant à tout groupe son ensemble sous-jacent, on définit un foncteur $(\text{Gr}) \rightarrow (\text{Ens})$ appelé *foncteur d'oubli* (car on « oublie » la structure de groupe).

5.1.1 Définition. Un *S-schéma en groupes* est un couple (G, i_G) composé d'un *S*-schéma G et d'un foncteur $i_G : (\text{Sch}/S)^\circ \rightarrow (\text{Gr})$ qui factorise le foncteur de points de G :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & h_G & & \\
 & \searrow & \text{---} & \nearrow & \\
 (\text{Sch}/S)^\circ & \xrightarrow{i_G} & (\text{Gr}) & \xrightarrow{\text{oubli}} & (\text{Ens})
 \end{array}$$

5.1.2 Remarque. Un foncteur $F : (\text{Sch}/S)^\circ \rightarrow (\text{Gr})$ est appelé un *S-foncteur en groupes*. On peut donc dire qu'un schéma en groupes est un foncteur en groupes représentable. (Et un schéma est un foncteur en ensembles représentable.)

Il en découle que si G est un *S*-schéma en groupes, les ensembles $h_G(T)$ sont des groupes, fonctoriellement en le *S*-schéma T . On peut donc voir les applications de multiplication $m_T : h_G(T) \times h_G(T) \rightarrow h_G(T)$, d'élément neutre $e_T \in h_G(T)$, d'inversion $i_T : h_G(T) \rightarrow h_G(T)$ comme des morphismes de foncteurs $m : h_{G \times_S G} = h_G \times h_G \rightarrow h_G$, $e : h_S \rightarrow h_G$ et $i : h_G \rightarrow h_G$. Il découle du lemme de Yoneda que ces morphismes sont induits par des morphismes de *S*-schémas :

$$\begin{aligned}
 & \text{multiplication } m : G \times_S G \rightarrow G, \\
 & \text{neutre } e : S \rightarrow G, \\
 & \text{inverse } i : G \rightarrow G.
 \end{aligned}$$

Dans la suite, pour alléger, oublions les indices "S" dans les produits fibrés. Les axiomes de groupe vérifiés par les morphismes m_T, e_T, i_T se traduisent par des diagrammes commutatifs :

(A) Associativité :

$$\begin{array}{ccc}
G \times G \times G & \xrightarrow{\text{id}_G \times m} & G \times G \\
m \times \text{id}_G \downarrow & & \downarrow m \\
G \times G & \xrightarrow{m} & G
\end{array}$$

(N) Neutre :

$$\begin{array}{ccc}
G & \xrightarrow{\text{id}_G \times e} & G \times G \\
\parallel & \searrow \text{id}_G & \downarrow m \\
S \times G & & G \\
e \times \text{id}_G \downarrow & & \downarrow m \\
G \times G & \xrightarrow{m} & G
\end{array}$$

(I) Inverse :

$$\begin{array}{ccc}
G & \xrightarrow{\text{id}_G \times i} & G \times G \\
\text{str.} \searrow & & \downarrow m \\
S & & G \\
i \times \text{id}_G \downarrow & \searrow e & \downarrow m \\
G \times G & \xrightarrow{m} & G
\end{array}$$

Réciproquement, la donnée de (G, m, e, i) tels que les diagrammes (A), (N), (I) soient commutatifs détermine une structure de schéma en groupes sur G .

5.1.3 Remarques. (1) Comme l'ensemble sous-jacent à $G \times G$ n'est pas l'ensemble produit, l'ensemble $|G|$ muni des applications $|m|$, $|e|$, $|i|$ n'est pas un groupe en général.

(2) Pour définir un morphisme entre deux schémas X et Y , ou tester l'égalité de deux tels morphismes, le lemme de Yoneda nous permet de le faire au niveau des foncteurs de points. Ceci est très précieux car on se ramène alors à définir des applications ensemblistes $X(T) \rightarrow Y(T)$ pour tout T , ce qui est plus simple tant du point de vue mathématique que du point de vue des notations. Par exemple, les axiomes de groupes sont plus faciles à énoncer en formules ensemblistes du type $m(x, m(y, z)) = m(m(x, y), z)$ que par la commutativité de diagrammes compliqués tel que (A) ci-dessus...

5.1.4 Exemples.

(1) Soit le foncteur sur les S -schémas défini par $F(T) = \Gamma(T, \mathcal{O}_T)^\times$, muni de la loi de multiplication des inversibles de l'anneau $\Gamma(T, \mathcal{O}_T)$. Il s'agit clairement d'un foncteur en groupes. On voit en utilisant le lemme 1.4.7 qu'il est représentable par le schéma $\mathbb{G}_{m,S} = \text{Spec}(\mathcal{O}_S[T, T^{-1}])$. Les morphismes m, e, i sont donnés par

$$m^\# : \mathcal{O}_S[T, T^{-1}] \longrightarrow \mathcal{O}_S[T, T^{-1}] \otimes \mathcal{O}_S[T, T^{-1}] \quad , \quad T \mapsto T \otimes T$$

$$e^\# : \mathcal{O}_S[T, T^{-1}] \longrightarrow \mathcal{O}_S \quad , \quad T \mapsto 1$$

$$i^\# : \mathcal{O}_S[T, T^{-1}] \longrightarrow \mathcal{O}_S[T, T^{-1}] \quad , \quad T \mapsto T^{-1}.$$

La formule pour m^\sharp est un peu plus parlante si l'on note

$$\mathcal{O}_S[T, T^{-1}] \otimes \mathcal{O}_S[T, T^{-1}] = \mathcal{O}_S[T_1, T_2, T_1^{-1}, T_2^{-1}]$$

avec $T_1 = T \otimes 1$ et $T_2 = 1 \otimes T$. Elle s'écrit simplement $m^\sharp(T) = T_1 T_2$.

(2) Soit $n \geq 1$ un entier et $F(T)$ l'ensemble des racines n -ièmes de l'unité dans $\Gamma(T, \mathcal{O}_T)$. C'est clairement un sous-foncteur en groupes du précédent, représentable par le schéma $\mu_{n,S} = \text{Spec}(\mathcal{O}_S[T]/(T^n - 1))$.

(3) Soit $F(T) = \Gamma(T, \mathcal{O}_T)$ vu comme groupe additif. Il s'agit d'un foncteur en groupes, représentable par le schéma $\mathbb{G}_{a,S} = \text{Spec}(\mathcal{O}_S[T])$.

(4) Si S est de caractéristique $p > 0$, c'est-à-dire si le morphisme $S \rightarrow \text{Spec}(\mathbb{Z})$ se factorise par le spectre du corps premier \mathbb{F}_p , notons $F(T)$ l'ensemble des $x \in \Gamma(T, \mathcal{O}_T)$ tels que $x^{p^n} = 0$. Il s'agit d'un sous-foncteur en groupes de $\mathbb{G}_{a,S}$ représenté par le schéma $\alpha_{p^n} = \text{Spec}(\mathcal{O}_S[T]/(T^{p^n}))$.

(5) Soit $F(T)$ l'ensemble des matrices inversibles de taille (n, n) à coefficients dans l'anneau $\Gamma(T, \mathcal{O}_T)$. C'est un foncteur en groupes représentable par le schéma

$$\text{GL}_{n,S} = \text{Spec}(\mathcal{O}_S[T_{ij}, 1/\det]_{1 \leq i, j \leq n})$$

où \det est le déterminant de la matrice à coefficients (T_{ij}) . Les matrices de déterminant 1 définissent un sous-schéma en groupes fermé $\text{SL}_{n,S}$.

(6) Soit q une forme quadratique sur le \mathcal{O}_S -module libre \mathcal{O}_S^n (une forme quadratique est par définition une forme telle que pour tout scalaire a et tous vecteurs x, y , on a $q(ax) = a^2 q(x)$ et $(x, y) \mapsto q(x+y) - q(x) - q(y)$ est une forme bilinéaire symétrique). Alors le foncteur des matrices inversibles $M \in \text{GL}_{n,S}(T)$ qui préservent q , i.e. telles que $q(M(x)) = q(x)$, est représentable par un sous-groupe fermé de $\text{GL}_{n,S}$ noté $\text{O}(q)$ et appelé *groupe orthogonal de q* .

(7) Les courbes elliptiques et plus généralement les variétés abéliennes définissent des schémas en groupes. Contrairement aux précédents, ils ne sont pas affines.

5.1.5 Définition. Soient G, H deux S -schémas en groupes. Un *morphisme de S -schémas en groupes* est un morphisme de S -schémas $f : G \rightarrow H$ tel que le morphisme induit $h_f : h_G \rightarrow h_H$ est un morphisme de foncteurs en groupes.

Bien sûr, il revient au même de dire que f préserve les applications de structure (m_G, e_G, i_G) et (m_H, e_H, i_H) , ce qui peut s'exprimer par de beaux (mais volumineux) diagrammes commutatifs.

5.1.6 Définition. Soit $f : G \rightarrow H$ un morphisme de S -schémas en groupes. Le *noyau de f* est le morphisme $i : K \rightarrow G$ où $K = G \times_{f, H, e_H} S$ et i est la première projection. On le note $\ker(f)$.

Pour un morphisme de schémas $g : M \rightarrow G$, convenons d'écrire simplement $f \circ g = 1_H$ lorsque $f \circ g$ se factorise par le neutre e_H . Alors, la propriété universelle du produit fibré fait que le noyau vérifie la propriété universelle qu'on attend de lui : pour tout morphisme de S -schémas en groupes $g : M \rightarrow G$ tel que $f \circ g = 1_H$, il existe un unique morphisme $g' : M \rightarrow K$ tel que $g = i \circ g'$.

5.1.7 Exemples. On reconnaîtra dans les exemples (2), (4), (5) ci-dessus des morphismes et des noyaux.

5.2 Schémas en modules et foncteur $\mathbb{V}(\mathcal{F})$

Nous avons observé qu'un schéma en groupes est simplement un *foncteur en groupes représentable* i_G , c'est-à-dire que le composé avec le foncteur d'oubli :

$$(\text{Sch}/S)^\circ \xrightarrow{i_G} \text{Gr} \xrightarrow{\text{oubli}} \text{Ens}$$

est représentable. Sur le même modèle que la définition 5.1.1, introduisons quelques autres notions importantes (desquelles on peut faire des variantes...).

5.2.1 Définitions. Soit S un schéma.

(1) Soit (Ann) la catégorie des anneaux. Un S -schéma en anneaux A est un foncteur en anneaux $(\text{Sch}/S)^\circ \rightarrow (\text{Ann})$ représentable.

(2) Soit \mathcal{C} la catégorie des *groupes agissant sur un ensemble*, dont les objets sont les paires (G, X) composées d'un groupe G agissant sur un ensemble X , et dont les morphismes sont les paires évidentes de morphismes. Il y a deux foncteurs d'oubli évidents $\mathcal{C} \rightarrow (\text{Gr})$ et $\mathcal{C} \rightarrow (\text{Ens})$. Un S -schéma X muni d'une action d'un S -schéma en groupes G est un foncteur $i_{G,X} : (\text{Sch}/S)^\circ \rightarrow \mathcal{C}$ tel que le composé $(\text{Sch}/S)^\circ \rightarrow \mathcal{C} \rightarrow (\text{Gr})$ est représentable par G et le composé $(\text{Sch}/S)^\circ \rightarrow \mathcal{C} \rightarrow (\text{Ens})$ est représentable par X .

(3) Soit (Mod) la catégorie des *modules sur un anneau*, dont les objets sont les paires (A, M) composées d'un anneau A et d'un A -module M . Un S -schéma en A -modules M est un foncteur $i_{A,M} : (\text{Sch}/S)^\circ \rightarrow (\text{Mod})$ tel que le composé $(\text{Sch}/S)^\circ \rightarrow \mathcal{C} \rightarrow (\text{Ann})$ est représentable par A et le composé $(\text{Sch}/S)^\circ \rightarrow \mathcal{C} \rightarrow (\text{Gr})$ est représentable par M .

Voici des exemples familiers.

5.2.2 Exemple. (1) Soit $F(T) = \Gamma(T, \mathcal{O}_T)$ vu comme anneau. Il s'agit d'un foncteur en anneaux représentable par le schéma $\mathbb{G}_{a,S}$ de 5.1.4(3). Comme tel, on le note en général lui aussi $\mathbb{G}_{a,S}$.

(2) Soit \mathcal{F} un \mathcal{O}_S -module quasi-cohérent. Alors, le foncteur des sections de \mathcal{F} défini par $F(T) = \Gamma(T, \mathcal{F}_T)$ est un foncteur en $\mathbb{G}_{a,S}$ -modules. Nous verrons plus loin qu'il n'est pas représentable en général.

(3) Avec les mêmes notations, considérons le foncteur défini par $F(T) = \Gamma(T, (\mathcal{F}_T)^\vee)$. C'est un foncteur en $\mathbb{G}_{a,S}$ -modules qui, d'après le lemme 1.4.12, est représentable par le schéma $\mathbb{V}(\mathcal{F}) = \text{Spec}(\text{Sym}(\mathcal{F}))$.

Nous consacrons la fin de ce paragraphe à $\mathbb{V}(\mathcal{F})$: nous apportons un complément au lemme 1.4.12 en montrant (5.2.4) que \mathcal{F} est déterminé par le $\mathbb{G}_{a,S}$ -module $\mathbb{V}(\mathcal{F})$.

5.2.3 Lemme. Soient S un schéma, \mathcal{F} un \mathcal{O}_S -module quasi-cohérent et $\mathbb{G}_a = \text{Spec}(\mathcal{O}_S[X])$ (spectre relatif sur S). Alors la structure de \mathbb{G}_a -module de $\mathbb{V}(\mathcal{F})$ est donnée par le morphisme $\varphi : \mathbb{G}_a \times_S \mathbb{V}(\mathcal{F}) \rightarrow \mathbb{V}(\mathcal{F})$ déterminé par l'unique morphisme de \mathcal{O}_S -algèbres $\varphi^\# : \text{Sym}(\mathcal{F}) \rightarrow \text{Sym}(\mathcal{F})[X]$ qui envoie $z \in \text{Sym}^1(\mathcal{F})$ sur zX .

Preuve : Pour alléger, nous omettons l'indice S dans les produits fibrés. Notons aussi $\mathcal{S} = \text{Sym}(\mathcal{F})$ et $\mathcal{S}_i = \text{Sym}^i(\mathcal{F})$. Soit $\mu : \mathbb{G}_a \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ le morphisme qui définit la structure de \mathbb{G}_a -module de \mathbb{V} . D'après le lemme de Yoneda, pour montrer que $\mu = \varphi$ il suffit de montrer que pour tout S -schéma $h : T \rightarrow S$, on a $\mu(T) = \varphi(T)$. Regardons d'abord μ . On a $\mathbb{G}_a(T) = \Gamma(T, \mathcal{O}_T)$ et $\mathbb{V}(T) = \Gamma(T, (\mathcal{F}_T)^\vee)$ et $\mu(T) : \Gamma(T, \mathcal{O}_T) \times \Gamma(T, (\mathcal{F}_T)^\vee) \rightarrow \Gamma(T, (\mathcal{F}_T)^\vee)$ est le morphisme $(\lambda, s) \mapsto \lambda s$ donné par la structure de \mathcal{O}_S -module de \mathcal{F} . Notons que s est par définition un morphisme de \mathcal{F}_T dans \mathcal{O}_T , et peut être vu par adjonction comme un morphisme de \mathcal{F} dans $h_*\mathcal{O}_T$ (les mêmes remarques valent pour λs). Ainsi $\mu(\lambda, s)$ vu comme T -point de \mathbb{V} est le morphisme $f_\mu : T \rightarrow \mathbb{V}$ donné sur les algèbres par l'unique morphisme $f_\mu^\# : \mathcal{S} \rightarrow h_*\mathcal{O}_T$ tel que $f_\mu^\#|_{\mathcal{S}_1} = \lambda s$. Regardons maintenant φ . Le T -point $\varphi(\lambda, s)$ est le composé $f_\varphi := \varphi \circ (\lambda, s)$ où $(\lambda, s) : T \rightarrow \mathbb{G}_a \times \mathbb{V}$ est le morphisme donné sur les algèbres par l'unique morphisme $\mathcal{S}[X] \rightarrow h_*\mathcal{O}_T$ qui envoie X sur λ et est égal à s en restriction à \mathcal{S}_1 . On voit donc que la composée $\varphi \circ (\lambda, s)$ est le morphisme composé $f_\varphi^\# : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}[X] \rightarrow h_*\mathcal{O}_T$ par lequel $z_1 \in \mathcal{S}_1 \mapsto z_1 X \mapsto s(z_1)\lambda = (\lambda s)(z_1)$. Ainsi $f_\varphi^\#|_{\mathcal{S}_1} = \lambda s = f_\mu^\#|_{\mathcal{S}_1}$, donc $f_\varphi^\# = f_\mu^\#$ i.e. $\varphi(\lambda, s) = \mu(\lambda, s)$ pour tout (λ, s) , donc $\varphi = \mu$. \square

5.2.4 Proposition. *Soit S un schéma. Alors, le foncteur contravariant $\mathcal{F} \mapsto \mathbb{V}(\mathcal{F})$ de la catégorie des \mathcal{O}_S -modules quasi-cohérents dans la catégorie des schémas en $\mathbb{G}_{a,S}$ -modules est pleinement fidèle.*

Dans la preuve, on utilisera des foncteurs de la forme $F = \text{Hom}_S(X, Y)$ tels que définis dans l'exercice 2.4.5(2), i.e. $F(T) = \text{Hom}_T(X_T, Y_T)$ où $X_T = X \times_S T$. Lorsque T décrit les ouverts de S , ce foncteur est un faisceau ; d'après 2.4.5(2) et le théorème 2.4.7, c'est même un faisceau pour la topologie fppf sur S .

Preuve de 5.2.4 : Soit \mathcal{F} un \mathcal{O}_S -module quasi-cohérent et $\mathbb{V} = \mathbb{V}(\mathcal{F})$. Les S -schémas \mathbb{V} et \mathbb{G}_a sont tous deux des schémas en \mathbb{G}_a -modules ; notons $\mathbb{V}^* := \text{Hom}_{\mathbb{G}_a\text{-Mod}}(\mathbb{V}, \mathbb{G}_a)$ le foncteur « module dual » de \mathbb{V} , foncteur des morphismes de \mathbb{G}_a -modules. Restreint aux ouverts de S , c'est un faisceau, et nous allons construire un isomorphisme canonique $\mathcal{F} = \mathbb{V}^*$. (En fait, si l'on étend le faisceau \mathcal{F} en un S -foncteur en posant $\mathcal{F}(T) = \Gamma(T, \mathcal{F}_T)$, on obtient un isomorphisme de S -foncteurs.)

Soit $f : \mathbb{V} \rightarrow S$ le morphisme de structure. On dispose d'un isomorphisme de faisceaux $\alpha : f_*\mathcal{O}_{\mathbb{V}} = \text{Sym}(\mathcal{F}) \rightarrow \text{Hom}_S(\mathbb{V}, \mathbb{G}_a)$ qui associe à une section z de $f_*\mathcal{O}_{\mathbb{V}}$ le morphisme d'algèbres $u^\# : \mathcal{O}_S[Y] \rightarrow \text{Sym}(\mathcal{F})$ qui envoie Y sur z , puis le morphisme $u = \alpha(z) : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{G}_a$ ainsi déterminé (voir l'exemple (1) dans 1.4.10). Notons $\varphi : \mathbb{G}_a \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ et $\psi : \mathbb{G}_a \times \mathbb{G}_a \rightarrow \mathbb{G}_a$ les actions de \mathbb{G}_a . Alors, par définition, $u : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{G}_a$ est un morphisme de \mathbb{G}_a -modules si et seulement si le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{G}_a \times \mathbb{V} & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{V} \\ \text{id} \times u \downarrow & & \downarrow u \\ \mathbb{G}_a \times \mathbb{G}_a & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{G}_a. \end{array}$$

Notons $\mathbb{G}_a = \text{Spec}(\mathcal{O}_S[X])$ le schéma en anneaux et $\mathbb{G}_a = \text{Spec}(\mathcal{O}_S[Y])$ le schéma en mo-

dules sur le précédent. Ce qui précède veut dire que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_S[Y] & \longrightarrow & \mathcal{O}_S[X, Y] \\ u^\# \downarrow & & \downarrow \text{id} \otimes u^\# \\ \text{Sym}(\mathcal{F}) & \longrightarrow & \text{Sym}(\mathcal{F})[X]. \end{array}$$

Notons $z = \sum_{0 \leq i \leq n} z_i$ avec $z_i \in \text{Sym}^i(\mathcal{F})$. Le morphisme $u^\#$ est déterminé par $u^\#(Y) = z$. Compte tenu du lemme 5.2.3, que l'on utilise à la fois pour $\mathbb{V}(\mathcal{F})$ et pour $\mathbb{G}_a = \mathbb{V}(\mathcal{O}_S)$, le trajet du haut envoie Y sur XY puis sur $X \sum z_i$. Le trajet du bas envoie Y sur $\sum z_i$ puis sur $\sum z_i X^i$. La commutativité du diagramme impose que $z_i = 0$ si $i \neq 1$. Dit autrement, $u = \alpha(z)$ est un morphisme de \mathbb{G}_a -modules si et seulement si z est une section de $\text{Sym}^1(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$. En conclusion α induit un isomorphisme entre \mathcal{F} et $\text{Hom}_{\mathbb{G}_a\text{-Mod}}(\mathbb{V}, \mathbb{G}_a)$.

La proposition en découle ainsi. Soient $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ des \mathcal{O}_S -modules quasi-cohérents. Alors l'application qui associe à un morphisme de S -schémas en modules $u : \mathbb{V}(\mathcal{F}_2) \rightarrow \mathbb{V}(\mathcal{F}_1)$ le morphisme $u^* : \mathbb{V}(\mathcal{F}_1)^* = \mathcal{F}_1 \rightarrow \mathbb{V}(\mathcal{F}_2)^* = \mathcal{F}_2$ est une bijection réciproque pour l'application $\text{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{G}_a\text{-Mod}}(\mathbb{V}(\mathcal{F}_2), \mathbb{V}(\mathcal{F}_1))$. \square

5.3 Fibrés vectoriels

La définition, en provenance directe de la géométrie différentielle, est la suivante :

5.3.1 Définitions. Soient S un schéma et $r \geq 0$ un entier.

(1) Un *fibré vectoriel de rang r sur S* est un morphisme de schémas $\pi : E \rightarrow S$ tel qu'il existe un recouvrement ouvert (U_i) de S et des isomorphismes de U_{ij} -schémas $\varphi_i : E \times_S U_i \simeq \mathbb{A}^r \times U_i$ tels que pour tous i, j , l'isomorphisme

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \mathbb{A}^r \times U_{ij} \rightarrow \mathbb{A}^r \times U_{ij}$$

est un isomorphisme linéaire, i.e. de la forme $X \mapsto A_{ij}X$ pour une certaine matrice A_{ij} de taille (r, r) à coefficients dans $\mathcal{O}_S(U_{ij})$. L'isomorphisme φ_i est appelé une *trivialisat*ion de E au-dessus de U_i . Lorsque $r = 1$, on parle de *fibré en droites*.

(2) Une *section de E au-dessus d'un ouvert $U \subset S$* est un morphisme de S -schémas $f : U \rightarrow E$.

Nous allons voir qu'il y a trois points de vue équivalents sur ces objets : fibrés vectoriels, schémas en $\mathbb{G}_{a,S}$ -modules localement libres, et \mathcal{O}_S -modules localement libres.

5.3.2 Lemme. Soit $\mathbb{G}_{a,S}$ le groupe additif vu comme schéma en anneaux (voir 5.2.2). Soit E un fibré vectoriel de rang r sur S . Alors, il existe des applications $m : E \times_S E \rightarrow E$, $e : S \rightarrow E$, $i : E \rightarrow E$, $\lambda : \mathbb{G}_{a,S} \times_S E \rightarrow E$ faisant de E un schéma en $\mathbb{G}_{a,S}$ -modules localement libres de rang r . Réciproquement, tout schéma en $\mathbb{G}_{a,S}$ -modules localement libres de rang r possède une unique structure de fibré vectoriel de rang r .

Preuve : Il est clair que le fibré trivial $E = \mathbb{A}_S^r = (\mathbb{G}_{a,S})^r$ possède une structure de $\mathbb{G}_{a,S}$ -module libre de rang r . Pour E quelconque, il s'agit surtout de construire des morphismes m, e, i, λ , car ensuite le caractère localement libre est clair. Indiquons juste comment construire m . Fixons un recouvrement ouvert (U_i) qui trivialisent E . Sur chaque U_i , on dispose de trivialisations $\varphi_i : E|_{U_i} \simeq \mathbb{A}^r \times U_i$ que l'on utilise pour transporter l'addition de \mathbb{A}^r de la manière suivante : on définit m_i comme la composée

$$E|_{U_i} \times E|_{U_i} \xrightarrow{(\varphi_i, \varphi_i)} \mathbb{A}^r \times \mathbb{A}^r \xrightarrow{+} \mathbb{A}^r \xrightarrow{\varphi_i^{-1}} E|_{U_i}.$$

Via les foncteurs de points, comme dans la remarque 5.1.3(2), on se ramène à la formulation ensembliste $m_i(x, y) = \varphi_i^{-1}(\varphi_i(x) + \varphi_i(y))$. Sur une intersection U_{ij} , par définition on dispose d'une transformation linéaire $A = A_{ij}$ telle que $\varphi_j = A\varphi_i$. On trouve

$$\varphi_j^{-1}(\varphi_j(x) + \varphi_j(y)) = \varphi_i^{-1}A^{-1}(A\varphi_i x + A\varphi_i y) = \varphi_i^{-1}A^{-1}A(\varphi_i x + \varphi_i y) = \varphi_i^{-1}(\varphi_i(x) + \varphi_i(y)).$$

Il s'ensuit que les m_i se recollent en un morphisme $m : E \times_S E \rightarrow E$. La réciproque ne pose pas de vraie difficulté. \square

5.3.3 Proposition. *Soit S un schéma, $r \geq 0$ un entier. Les foncteurs*

$$\mathcal{E} \mapsto E = \text{Spec}_{\mathcal{O}_S}(\text{Sym}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{E}^\vee))$$

$$E \mapsto \text{le faisceau } \mathcal{E} \text{ des sections de } E \rightarrow S$$

définissent des équivalences inverses entre la catégorie des faisceaux localement libres de rang r sur S et la catégorie des fibrés vectoriels de rang r sur S .

Preuve : Soit \mathcal{E} un faisceau localement libre de rang r . Si l'on pose $\mathcal{F} = \mathcal{E}^\vee$, on a

$$(\mathcal{F}_T)^\vee = ((\mathcal{E}^\vee)_T)^\vee = ((\mathcal{E}_T)^\vee)^\vee = \mathcal{E}_T$$

canoniquement et fonctoriellement en $T \rightarrow S$, d'après 1.2.4 et 1.4.11. D'après la proposition 1.4.12, le schéma $E = \text{Spec}_{\mathcal{O}_S}(\text{Sym}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{E}^\vee))$ représente le foncteur défini par $F(T) = \Gamma(T, \mathcal{E}_T)$ et est donc naturellement un foncteur en $\mathbb{G}_{a,S}$ -modules localement libres, donc E est un fibré vectoriel.

Soit E un fibré vectoriel. On voit que le faisceau \mathcal{E} est la restriction du foncteur de points de E aux ouverts de S . Par le lemme ci-dessus, pour tout $T \rightarrow S$ l'ensemble $E(T)$ est un $\mathbb{G}_{a,S}(T)$ -module localement libre rang r . En particulier, ceci est vrai pour T égal à un ouvert U de S . Donc \mathcal{E} est un faisceau localement libre de rang r .

Le fait que $\mathcal{E} \mapsto E$ et $E \mapsto \mathcal{E}$ soient des équivalences de catégories inverses l'une de l'autre résulte de la proposition 1.4.12. \square

5.3.4 Proposition. *Soit S un schéma, \mathcal{F} un \mathcal{O}_S -module de présentation finie, $X = \mathbb{V}(\mathcal{F}) = \text{Spec}(\text{Sym}(\mathcal{F}))$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (1) X est lisse,

- (2) X est plat,
- (3) \mathcal{F} est plat,
- (4) X est un fibré vectoriel.

Preuve : (1) \Rightarrow (2) résulte de 3.4.7.

(2) \Rightarrow (3). Si X est plat, alors $\text{Sym}(\mathcal{F}) = \mathcal{O}_S \oplus \mathcal{F} \oplus \text{Sym}^2(\mathcal{F}) \oplus \dots$ est plat sur S . Or on voit facilement, en utilisant la caractérisation de la platitude par l'exactitude à gauche du foncteur produit tensoriel, que si un module $M = N \oplus P$ est plat, alors N et P sont plats. Ainsi \mathcal{F} est plat.

(3) \Rightarrow (4) Comme \mathcal{F} est de présentation finie, s'il est plat il est localement libre (2.3.20) donc X est un fibré vectoriel.

(4) \Rightarrow (1). Localement sur S pour la topologie de Zariski, on a $X \simeq \mathbb{A}_S^r$ qui est lisse. \square

5.4 Fibrés tangents

Nous allons maintenant étudier un exemple important de foncteur $\mathbb{V}(\mathcal{F})$: le *fibré tangent*. Nous utilisons la notation classique $A[\epsilon] := A[x]/(x^2)$ pour l'*anneau des nombres duaux* sur A , et nous notons $S[\epsilon] := S \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[\epsilon]$. La définition est motivée par la proposition 3.2.10.

5.4.1 Définitions. Soit X un S -schéma.

(1) Le *fibré tangent* de X/S est le S -foncteur $\mathbb{T}_{X/S} = \text{Hom}_S(S[\epsilon], X)$ défini par

$$\mathbb{T}_{X/S}(T) \stackrel{\text{déf}}{=} \text{Hom}_T(T[\epsilon], X_T) = \text{Hom}_S(T[\epsilon], X) = X(T[\epsilon]).$$

L'immersion fermée $i : T \hookrightarrow T[\epsilon]$ définie par $\epsilon = 0$ donne des applications $X(T[\epsilon]) \rightarrow X(T)$, fonctorielles en T/S . Ceci définit un foncteur $\pi : \mathbb{T}_{X/S} \rightarrow X$, $v \mapsto v \circ i$.

(2) Pour tout morphisme de S -schémas $f : Y \rightarrow X$, l'*espace tangent de X le long de Y* (ou *au point Y*) est le foncteur défini par $\mathbb{T}_{X/S,Y} := \mathbb{T}_{X/S} \times_{\pi, X, f} Y$.

À l'aide de $\pi : \mathbb{T}_{X/S} \rightarrow X$, on peut voir $\mathbb{T}_{X/S}$ comme un X -foncteur (cf remarque 1.4.18).

5.4.2 Proposition. On a un isomorphisme canonique de X -foncteurs :

$$\mathbb{T}_{X/S} = \mathbb{V}(\Omega_{X/S}^1).$$

En particulier $\mathbb{T}_{X/S}$ est représentable, et si $X \rightarrow S$ est lisse c'est un fibré vectoriel sur X .

Preuve : Soit $u : T \rightarrow X$ un X -schéma. Si v est un T -point du X -foncteur $\mathbb{T}_{X/S}$, vu comme S -morphisme $v : T[\epsilon] \rightarrow X$, on a par définition $v \circ i = u$. Alors l'application continue $|v| : T[\epsilon] \rightarrow X$ est égale à $|u|$ puisque $|i|$ est l'identité, et le comorphisme $v^\# : \mathcal{O}_X \rightarrow v_* \mathcal{O}_{T[\epsilon]} = u_* \mathcal{O}_T \oplus u_* \mathcal{O}_T \epsilon$ est de la forme $v^\#(x) = u^\#(x) + \epsilon \partial(x)$ pour une certaine application de \mathcal{O}_T -modules $\partial : \mathcal{O}_X \rightarrow u_* \mathcal{O}_T$. Finalement v est entièrement déterminé par ∂ .

Or le fait que v^\sharp est un morphisme d'algèbres équivaut au fait que ∂ est une dérivation : en effet, $v^\sharp(xy) = v^\sharp(x)v^\sharp(y)$ si et seulement si

$$u^\sharp(xy) + \epsilon\partial(xy) = (u^\sharp(x) + \epsilon\partial(x))(u^\sharp(y) + \epsilon\partial(y)) = u^\sharp(xy) + \epsilon(\partial(x) + \partial(y)).$$

On a donc montré que

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_X(T, \mathbb{T}_{X/S}) &= \mathrm{Der}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{O}_X, u_*\mathcal{O}_T) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\Omega_{X/S}^1, u_*\mathcal{O}_T) \\ &= \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_T}(\Omega_{X_T/T}^1, \mathcal{O}_T) = \Gamma(T, (\Omega_{X_T/T}^1)^\vee). \end{aligned}$$

On reconnaît le foncteur de points de $\mathbb{V}(\Omega_{X/S}^1)$ (proposition 1.4.12). La dernière assertion provient du fait que si $X \rightarrow S$ est lisse, le faisceau $\Omega_{X/S}^1$ est localement libre sur X d'après la proposition 3.4.1. \square

5.4.3 Définition. Soient G un S -schéma en groupes et $e : S \rightarrow G$ sa section neutre. L'algèbre de Lie de G/S est l'espace tangent de G au point e , notée $\mathrm{Lie}(G) = \mathbb{T}_{G/S,e}$.

La définition se reformule en : $\mathrm{Lie}(G)(T) = \ker(G(T[\epsilon]) \rightarrow G(T))$.

5.4.4 Proposition. Soit $\pi : G \rightarrow S$ un S -schéma en groupes de section neutre $e : S \rightarrow G$. Alors, on a des isomorphismes canoniques :

- (1) $\mathbb{T}_{G/S} = G \times \mathrm{Lie}(G)$,
- (2) $\Omega_{G/S}^1 = \pi^*e^*\Omega_{G/S}^1$.

Le point (1) est l'analogie du fait bien connu que le fibré tangent d'un groupe de Lie est trivial ; il signifie simplement qu'un vecteur tangent en un point $g \in G$ est le translaté par g d'un vecteur tangent en le neutre e . Le point (2) dit que les formes différentielles en l'origine s'étendent en des formes différentielles invariantes sur tout le groupe.

Preuve : (1) Soient T un S -schéma et $v : T[\epsilon] \rightarrow G$ un S -morphisme. Posons $g = v \circ i :$

$$T \xrightarrow{i} T[\epsilon] \xrightarrow{v} G,$$

c'est un T -point de G . Pour tout point $x \in G(T)$, notons γ_x la multiplication à gauche par x dans $G \times_S T$. Notons g^{-1} l'inverse de g dans le groupe $G(T)$. Alors $\gamma_{g^{-1}} \circ v$ est un point de l'algèbre de Lie de G . Ainsi le morphisme de foncteurs

$$\mathbb{T}_{G/S} \longrightarrow G \times \mathrm{Lie}(G) \quad , \quad v \mapsto (g = v \circ i, \gamma_{g^{-1}} \circ v)$$

est un isomorphisme, d'inverse $(g, h) \mapsto \gamma_g \circ h$.

(2) Le point précédent dit que si on part de $\mathbb{T}_{G/S}$ et qu'on fait le changement de base par e (on tombe alors sur $\mathrm{Lie}(G)$) puis le changement de base par π , on retombe sur $\mathbb{T}_{G/S}$. Notons par ailleurs que la formation du schéma $\mathbb{V}(\mathcal{F})$ commute au changement de base, au sens où pour tout morphisme $S' \rightarrow S$, le morphisme canonique $\mathbb{V}(\mathcal{F}_{S'}) \rightarrow \mathbb{V}(\mathcal{F}) \times_S S'$ est un isomorphisme : cela résulte simplement du fait que la formation de

l'algèbre symétrique commute au changement de base. Par la proposition 5.4.2, on sait que $\mathbb{T}_{G/S} = \mathbb{V}(\Omega_{G/S}^1)$. Appliquant e^* puis π^* , on trouve $\text{Lie}(G) = \mathbb{V}(e^*\Omega_{G/S}^1)$ puis $\mathbb{T}_{G/S} = G \times \text{Lie}(G) = \mathbb{V}(\pi^*e^*\Omega_{G/S}^1)$. Finalement $\mathbb{V}(\Omega_{G/S}^1) = \mathbb{V}(\pi^*e^*\Omega_{G/S}^1)$ d'où le résultat compte tenu du fait que le foncteur \mathbb{V} est pleinement fidèle (proposition 5.2.4). \square

Nous terminerons ce cours par une jolie utilisation du fibré tangent.

5.4.5 Théorème. *Soient S un schéma et \mathcal{F} un \mathcal{O}_S -module de présentation finie. On définit un S -foncteur par $F(T) = \Gamma(T, \mathcal{F}_T)$. Alors F est représentable si et seulement si \mathcal{F} est localement libre (de rang fini).*

Preuve : Comme \mathcal{F} est de présentation finie, s'il est localement libre, son rang est fini. Si c'est le cas, le faisceau $\mathcal{E} = \mathcal{F}^\vee$ est aussi localement libre de rang fini, et $F(T) = \Gamma(T, (\mathcal{E}_T)^\vee)$. On sait par la proposition 1.4.12 que ce foncteur est représentable par le schéma $\mathbb{V}(\mathcal{E})$.

Réciproquement, supposons que F est représentable par un S -schéma G , qui est donc un schéma en $\mathbb{G}_{a,S}$ -modules. Montrons que G est localement de présentation finie sur S . Soit $A = \varinjlim A_i$ une limite inductive filtrante de S -algèbres. Comme I est filtrant, pour tout choix de i_0 , le sous-ensemble $I_0 = \{i \in I, i \geq i_0\}$ est cofinal donc la limite inductive sur I_0 est canoniquement isomorphe à la limite inductive sur I . On peut donc remplacer I par I_0 et supposer qu'il possède un élément minimal i_0 . Notons $A_0 = A_{i_0}$. Alors $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_S} A_0$ est le faisceau associé à son A_0 -module de sections globales M . On a canoniquement

$$\varinjlim G(A_i) = \varinjlim \Gamma(\text{Spec}(A_i), \mathcal{F}_{A_i}) = \varinjlim M \otimes_{A_0} A_i = M \otimes_{A_0} \varinjlim A_i = M \otimes_{A_0} A = G(A)$$

car le produit tensoriel commute aux limites inductives filtrantes ([Ma], theorem A1). Alors, le théorème 2.1.7 implique que G est localement de présentation finie sur S . Maintenant, soient $Y = \text{Spec}(A)$ un schéma affine et $Y_0 = \text{Spec}(A_0)$ un sous-schéma fermé défini par un idéal $I \subset A$ de carré nul. L'application $G(A) \rightarrow G(A_0)$ se décrit ainsi :

$$\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_S} A \rightarrow \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_S} A_0 = \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_S} A/I(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_S} A).$$

Elle est clairement surjective, et le théorème 3.5.2 implique que G est lisse sur S .

En particulier $\Omega_{G/S}^1$ est localement libre. Par la proposition 5.4.2, le tangent $\mathbb{T}_{G/S} = \mathbb{V}(\Omega_{G/S}^1)$ est un fibré vectoriel sur G et $\text{Lie}(G) = \mathbb{T}_{G/S} \times_{\pi, G, e} S = \mathbb{V}(e^*\Omega_{G/S}^1)$ est un fibré vectoriel sur S , où l'on a noté $e : S \rightarrow G$ la section nulle de G . Or par définition, on a

$$\mathbb{T}_{G/S}(T) = F(T[\epsilon]) = \Gamma(T[\epsilon], \mathcal{F}_{T[\epsilon]}) = \Gamma(T, \mathcal{F}_T) \oplus \Gamma(T, \mathcal{F}_T)\epsilon$$

et $\text{Lie}(G)(T)$ est le sous-ensemble des éléments $f_1 + f_2\epsilon$ nuls modulo ϵ , i.e. tels que $f_1 = 0$. Ainsi $\text{Lie}(G)(T) = \Gamma(T, \mathcal{F}_T)\epsilon \simeq \Gamma(T, \mathcal{F}_T) = F(T)$. Finalement on a des isomorphismes canoniques

$$F = \text{Lie}(G) = \mathbb{V}(e^*\Omega_{G/S}^1).$$

En évaluant sur des ouverts U de S , on trouve

$$F(U) = \mathcal{F}(U) = (e^*\Omega_{G/S}^1)^\vee(U)$$

donc $\mathcal{F} = (e^*\Omega_{G/S}^1)^\vee$ qui est localement libre sur S . \square

On peut trouver dans un article de N. Nitsure [Ni] une généralisation de ce dernier résultat au cas d'un faisceau cohérent sur un S -schéma projectif.

Références

- [BLR] S. BOSCH, W. LÜTKEBOHMERT, M. RAYNAUD, *Néron models*, Ergebnisse der Math. 3. Folge, Bd. 21, Springer (1990).
- [Ca] A. CARUTH, *A short proof of Krull's intersection theorem*, Colloq. Math. 64 (1993), no. 2, 153–154.
- [EGA] J. DIEUDONNÉ, A. GROTHENDIECK, *Éléments de Géométrie Algébrique*, Publ. Math. IHÉS 4, 8, 11, 17, 20, 24, 28, 32 (1961–1967).
- [Ei] D. EISENBUD, *Commutative algebra with a view toward algebraic geometry*, Graduate Texts in Math., Springer-Verlag (1995).
- [EiHa] D. EISENBUD, J. HARRIS, *The geometry of schemes*, Graduate Texts in Mathematics 197, Springer-Verlag (2000).
- [EiHo] D. EISENBUD, M. HOCHSTER, *A Nullstellensatz with nilpotents and Zariski's main lemma on holomorphic functions*, J. Algebra 58 (1979), no. 1, 157–161.
- [Ha] R. HARTSHORNE, *Algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics 52, Springer-Verlag (1977).
- [K11] S. KLEIMAN, *Misconceptions about K_X* , Enseign. Math. (2) 25 (1979), no. 3-4, 203–206 (1980).
- [K12] S. KLEIMAN, *The Picard scheme*, Fundamental algebraic geometry, 1–104, Math. Surveys Monogr. 123, AMS (2005).
- [Liu] Q. LIU, *Algebraic geometry and arithmetic curves*, Oxford Graduate Texts in Mathematics no. 6, Oxford University Press (2002).
- [Ma] H. MATSUMURA, *Commutative ring theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 8. Cambridge University Press (1989).
- [Mi] J. MILNE, *Étale cohomology*, Princeton Mathematical Series, 33. Princeton University Press (1980).
- [Ni] N. NITSURE, *Representability of Hom implies flatness*, Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci. 114 (2004), no. 1, 7–14.
- [Vi] A. VISTOLI, *Grothendieck topologies, fibered categories and descent theory*, Fundamental algebraic geometry, 1–104, Math. Surveys Monogr. 123, AMS (2005). Ces notes sont mises à jour et corrigées sur la page web d'Angelo Vistoli : <http://homepage.sns.it/vistoli/>.
- [Wei] C. WEIBEL, *An introduction to homological algebra*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 38. Cambridge University Press (1994).