Examen du cours de Géométrie Algébrique 2

Tous les documents sont autorisés.

Tous les anneaux sont commutatifs et unitaires.

Exercice 1. Soit $n \geqslant 1$ un entier. Pour tout anneau ou faisceau d'anneaux A, on note $A[\delta_n]$ le quotient de l'anneau de polynômes $A[X]$ par l'idéal (X^{n+1}), où δ_n est la classe de X. Pour tout schéma S on note $S[\delta_n] = \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_S[\delta_n])$.

On fixe un morphisme de $\mathbb{Q}$-schémas $X \to S$. Le but de cet exercice est d'étudier la représentabilité et la lissité d'une généralisation du foncteur tangent, le *foncteur des jets d'ordre n de X/S*:

$$\mathscr{J}_n = \operatorname{Hom}_S(S[\delta_n], X),$$

défini par $\mathscr{J}_n(T) = \operatorname{Hom}_T(T[\delta_n], X_T)$ pour tout S-schéma T, où $X_T = X \times_S T$.

(1) Justifiez que $\operatorname{Hom}_T(T[\delta_n], X_T) = \operatorname{Hom}_S(T[\delta_n], X)$.

(2) Soit $A[\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n]$ le quotient de l'anneau de polynômes $A[X_1, \dots, X_n]$ par l'idéal $(X_1^2, \dots, X_n^2)$, où ε_i est la classe de X_i, et $S[\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n] = \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_S[\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n])$. Montrez par récurrence sur $n \geqslant 1$ que le S-foncteur $\mathscr{T}_n = \operatorname{Hom}_S(S[\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n], X)$ est représentable par un S-schéma.

(3) Pour toute partie $J \subset \{1, \dots, n\}$, soit $\varepsilon_J = \prod_{j \in J} \varepsilon_j$, avec $\varepsilon_\varnothing = 1$. Montrez que $\delta_n \mapsto \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n$ définit un morphisme injectif de $\mathbb{Q}$-algèbres $f : \mathbb{Q}[\delta_n] \to \mathbb{Q}[\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n]$ qui induit un isomorphisme de $\mathbb{Q}[\delta_n]$ sur l'ensemble des $r = \sum r_J \varepsilon_J \in \mathbb{Q}[\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n]$ tels que $\operatorname{card} J = \operatorname{card} J' \Rightarrow r_J = r_{J'}$.

(4) Soient $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_S$-module quasi-cohérent, $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{O}_S$ un morphisme de $\mathcal{O}_S$-modules, $\operatorname{im}(\varphi)$ son image, $T \to S$ un morphisme, $\varphi_T : \mathcal{F}_T \to \mathcal{O}_T$ le morphisme déduit par changement de base. Montrez qu'il existe un morphisme naturel surjectif $\operatorname{im}(\varphi)_T \to \operatorname{im}(\varphi_T)$. Montrez que $\varphi_T = 0$ si et seulement si $T \to S$ se factorise par le sous-schéma fermé de S d'idéal $\operatorname{im}(\varphi)$.

(5) Montrez que le morphisme $\mathscr{J}_n \to \mathscr{T}_n$ déduit du morphisme $S[\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n] \to S[\delta_n]$ de la question (3) induit un isomorphisme de $\mathscr{J}_n$ sur un sous-schéma fermé de $\mathscr{T}_n$.

(6) (a) Montrez que si $X \to S$ est lisse, alors $\mathscr{J}_n \to S$ est lisse.

(b) Montrez que si $X \to S$ est non ramifié, alors $\mathscr{J}_n \to X$ est un isomorphisme.

Correction. (1) Contemplons le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
T[\delta_n] \arrow[r, "v"] \arrow[dr] & X_T \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"] & X \arrow[d] \\
& T \arrow[r] & S
\end{tikzcd}$$

La définition du produit fibré $X_T = X \times_S T$ dit que l'application $\operatorname{Hom}_T(T[\delta_n], X_T) \to \operatorname{Hom}_S(T[\delta_n], X)$, $v \mapsto p_2 \circ v$, est un isomorphisme.

(2) Si $n = 1$, $\mathscr{T}_1 = \operatorname{Hom}_S(S[\varepsilon_1], X)$ est le foncteur tangent de X/S représentable par $\mathbb{V}(\Omega^1_{X/S})$. Supposons $\mathscr{T}_n$ représentable par un S-schéma. La remarque essentielle pour le raisonnement qui va suivre est que si A, B, C sont des ensembles, on a l'isomorphisme naturel entre les ensembles d'applications : $\operatorname{Hom}(A \times B, C) = \operatorname{Hom}(A, \operatorname{Hom}(B, C))$, $f \mapsto (a \mapsto f(a, -))$. Lorsqu'on applique cette remarque pour des S-schémas T variables, on obtient des isomorphismes de foncteurs :

$$\begin{aligned}
\mathscr{T}_{n+1} &= \operatorname{Hom}_S(S[\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, \varepsilon_{n+1}], X) \\
&= \operatorname{Hom}_S(S[\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n] \times_S S[\varepsilon_{n+1}], X) \\
&= \operatorname{Hom}_S(S[\varepsilon_{n+1}], \operatorname{Hom}(S[\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n], X)) \\
&= \operatorname{Hom}_S(S[\varepsilon_{n+1}], \mathscr{T}_n).
\end{aligned}$$

Ce dernier foncteur est le foncteur tangent du schéma $\mathscr{T}_n$, qui est représentable par $\mathbb{V}(\Omega^1_{\mathscr{T}_n/S})$. Faisons une petite remarque sur la « taille » de $\mathscr{T}_n$: si (pour simplifier) X/S est lisse de dimension relative r, alors $\mathscr{T}_1 = \mathbb{T}_{X/S}$ est lisse de dimension relative r sur X donc lisse de dimension relative $2r$ sur S. Par récurrence $\mathscr{T}_n$ est lisse de dimension relative $2^n r$ sur S.

(3) Notons $\mathcal{P}_{j,n}$ l'ensemble des parties $J \subset \{1, \dots, n\}$ de cardinal j. Dans $\mathbb{Q}[\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n]$, on a

$$(\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n)^j = \begin{cases} j! \sum\limits_{J \in \mathcal{P}_{j,n}} \varepsilon_J & \text{si } j \leqslant n, \\ 0 \quad \text{si } j \geqslant n+1. \end{cases}$$

Le fait que $(\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n)^{n+1} = 0$ montre que le morphisme $\mathbb{Q}[X] \to \mathbb{Q}[\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n]$ défini en envoyant X sur $\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n$ passe au quotient en un morphisme $f : \mathbb{Q}[\delta_n] \to \mathbb{Q}[\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n]$. Les idéaux de l'anneau artinien $\mathbb{Q}[\delta_n]$ sont les idéaux $(\delta_n)^j$ avec $0 \leqslant j \leqslant n+1$. Le fait que $(\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n)^n \neq 0$ montre donc que le noyau de f est $\{0\}$, i.e. f est injectif. On peut enfin préciser l'image de f. Notons dans la suite $\delta = \delta_n$. Si $q = q_0 + q_1\delta + \cdots + q_n\delta^n$, alors

$$f(q) = \sum_{j=0}^{n} q_j j! \sum_{J \in \mathcal{P}_{j,n}} \varepsilon_J = \sum_{J \subset \{1 \dots n\}} (|J|)! q_{|J|} \varepsilon_J.$$

Comme on travaille avec des $\mathbb{Q}$-schémas, les entiers $(|J|)!$ sont inversibles. On voit que l'image de f est exactement l'ensemble des $r = \sum r_J \varepsilon_J$ de $\mathbb{Q}[\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n]$ tels que r_J ne dépend que de $|J|$, i.e. tels que $\operatorname{card} J = \operatorname{card} J' \Rightarrow r_J = r_{J'}$.

(4) Par définition de l'image de φ, on a une factorisation $\mathcal{F} \twoheadrightarrow \operatorname{im}(\varphi) \hookrightarrow \mathcal{O}_S$ avec $\mathcal{F} \twoheadrightarrow \operatorname{im}(\varphi)$ surjec- -tif et $\operatorname{im}(\varphi) \hookrightarrow \mathcal{O}_S$ injectif. Le foncteur d'image inverse des modules quasi-cohérents par $T \to S$ est exact à droite car le produit tensoriel l'est, donc $\mathcal{F}_T \to \operatorname{im}(\varphi)_T$ est surjectif. Comme le noyau de $\mathcal{F} \to \operatorname{im}(\varphi)$ s'envoie sur 0 dans $\mathcal{O}_S$, alors le noyau de $\mathcal{F}_T \to \operatorname{im}(\varphi)_T$ s'envoie sur 0 dans $\mathcal{O}_T$, donc par définition de l'image de φ_T on obtient un morphisme surjectif $\operatorname{im}(\varphi)_T \twoheadrightarrow \operatorname{im}(\varphi_T)$.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}_T \arrow[r, two heads] & \operatorname{im}(\varphi)_T \arrow[r] \arrow[dr, dotted, two heads] & \mathcal{O}_T \\ & & \operatorname{im}(\varphi_T) \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

Ce morphisme n'est pas injectif en général ; donnons un contre-exemple. Soit A un anneau et $\varphi : A \to A$ défini par la multiplication par un élément $f \in A$. Notons $I = \operatorname{im}(\varphi) = fA$ et choisissons le changement de base $A \to A/I$. (La situation de l'exemple est donc $S = \operatorname{Spec}(A)$, $\mathcal{F} = \mathcal{O}_S$, et $T \to S$ est l'immersion fermée d'idéal I.) Alors $\operatorname{im}(\varphi) \otimes A/I = I \otimes A/I = I/I^2$. Par ailleurs, $\varphi \otimes \mathrm{Id}_{A/I} : A/I \to A/I$ est la multiplication par la classe de f modulo I, c'est-à-dire le morphisme nul, donc $\operatorname{im}(\varphi \otimes \mathrm{Id}_{A/I}) = 0$. Le morphisme $\operatorname{im}(\varphi)_T \twoheadrightarrow \operatorname{im}(\varphi_T)$ est donc ici $I/I^2 \to 0$ qui n'est pas injectif si $f \notin (f^2)$, par exemple si f est non nul et non inversible dans un anneau A intègre.

Notons $h : T \to S$ le morphisme de structure. Alors :

$$\begin{aligned} \varphi_T = 0 \quad & \Leftrightarrow \operatorname{im}(\varphi_T) = 0, \\ & \Leftrightarrow \operatorname{im}(\varphi)_T \to \mathcal{O}_T \text{ est le morphisme nul (puisque } \operatorname{im}(\varphi)_T \to \operatorname{im}(\varphi_T) \text{ est surjectif)}, \\ & \Leftrightarrow \operatorname{im}(\varphi) \to h_*\mathcal{O}_T \text{ est nul, par adjonction (noter que } \operatorname{im}(\varphi)_T = h^* \operatorname{im}(\varphi)), \\ & \Leftrightarrow h^\sharp : \mathcal{O}_S \to h_*\mathcal{O}_T \text{ se factorise par } \mathcal{O}_S/\operatorname{im}(\varphi), \\ & \Leftrightarrow h : T \to S \text{ se factorise par le sous-schéma fermé d'idéal } \operatorname{im}(\varphi). \end{aligned}$$

Remarque : il s'agit d'un résultat de représentabilité. En effet, cela signifie simplement que le sous-foncteur F de S (c'est-à-dire, du foncteur de points de S) défini pour tout S-schéma $h : T \to S$ par $F(T) = \{h : T \to S \text{ tel que } \varphi_T = 0\}$ est représentable par le sous-schéma fermé d'idéal $\operatorname{im}(\varphi)$.

(5) Le morphisme $\mathscr{J}_n \to \mathscr{T}_n$ associe à un morphisme $q : T[\delta_n] \to X_T$ le morphisme $r = q \circ f : T[\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n] \to X_T$ obtenu par composition avec le morphisme $f : T[\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n] \to T[\delta_n]$ déduit du morphisme d'algèbres de la question (3).

Or on sait que le foncteur $\mathscr{T}_n$ est représentable par un S-schéma que (selon la convention habituelle) nous notons encore $\mathscr{T}_n$. Cela signifie qu'on a des bijections

$$\alpha(T) : \mathrm{Hom}_S(T, \mathscr{T}_n) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_T(T[\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n], X_T)$$

fonctorielles en T, que l'on peut décrire précisément ainsi. Pour $T = \mathscr{T}_n$, notons

$$r^{\mathrm{univ}} : \mathscr{T}_n[\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n] \to X_{\mathscr{T}_n}$$

le $\mathscr{T}_n$-morphisme (universel) image de l'identité $\mathrm{Id}_{\mathscr{T}_n}$ par α. Alors pour T/S quelconque, $\alpha(T)$ associe à un morphisme $h : T \to \mathscr{T}_n$ le morphisme $r = h^* r^{\mathrm{univ}} : T[\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n] \to X_T$ image inverse par h.

Notons $j : S \hookrightarrow S[\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n]$ l'immersion fermée définie par l'idéal $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$. Pour un T-point de $\mathscr{T}_n$ correspondant à un morphisme $r : T[\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n] \to X_T$, notons $u = r \circ j_T$. Alors le comorphisme de r est de la forme

$$\begin{aligned} r^\sharp : \mathcal{O}_X &\longrightarrow r_*\mathcal{O}_{T[\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n]} = \bigoplus_{J \in \mathcal{P}_{j,n}} \varepsilon_J u_* \mathcal{O}_T \\ a &\longmapsto \sum \varepsilon_J r_J^\sharp(a) \end{aligned}$$

où les $r_J^\sharp : \mathcal{O}_X \to u_*\mathcal{O}_T$ sont les composantes de $r^\sharp$ sur la base $\{\varepsilon_J\}$. On notera $s_J : u^*\mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_T$ le morphisme déduit de $r_J^\sharp$ par adjonction. Sur le schéma $T = \mathscr{T}_n$, on dispose de morphismes u^{univ}, s^{univ}, et s_J se déduit de s_J^{univ} par le changement de base $T \to \mathscr{T}_n$. Il résulte de la question (3) (plus exactement, de sa version faisceautique qui est immédiate) que les T-points q de $\mathscr{J}_n$ sont les T-points r de $\mathscr{T}_n$ tels que $|J| = |J'|$ implique $r_J^\sharp = r_{J'}^\sharp$. Ceci est équivalent à dire que pour toute paire (J, J') de parties de même cardinal, le morphisme $r_J^\sharp - r_{J'}^\sharp$ est nul, on encore (par adjonction) que $s_J - s_{J'}$ est nul. D'après la question (4), et en utilisant le fait qu'une intersection de sous-schémas fermés $V(\mathcal{I}_\alpha)$ est le sous-schéma fermé $V(\sum \mathcal{I}_\alpha)$, il est équivalent de dire que $T \to \mathscr{T}_n$ se factorise par le sous-schéma fermé de $\mathscr{T}_n$ défini par l'idéal somme des idéaux $\mathrm{im}(s_J^{\mathrm{univ}} - s_{J'}^{\mathrm{univ}})$, pour tous les J, J' de même cardinal. Ce sous-schéma fermé représente le foncteur $\mathscr{J}_n$.

(6) Montrons d'abord que si $X \to S$ est localement de présentation finie, alors $\mathscr{J}_n \to S$ aussi. Comme $\mathscr{T}_{n+1} = \mathbb{V}(\Omega^1_{\mathscr{T}_n/S})$, il est immédiat par récurrence sur n que $\mathscr{T}_n$ est localement de présentation finie. De plus $\mathscr{J}_n$ est un sous-schéma fermé de $\mathscr{T}_n$ défini par un idéal qui est une somme finie d'idéaux $\mathrm{im}((s^{\mathrm{univ}})_J - (s^{\mathrm{univ}})_{J'})$ qui sont cohérents, comme images de faisceaux cohérents. Il s'ensuit que le faisceau d'idéaux de $\mathscr{J}_n$ dans $\mathcal{O}_{\mathscr{T}_n}$ est de type fini, donc l'immersion fermée $\mathscr{J}_n \to \mathscr{T}_n$ est de présentation finie et finalement $\mathscr{J}_n \to S$ est localement de présentation finie.

(a) Supposons que $X \to S$ est lisse. Pour montrer que $\mathscr{J}_n \to S$ est lisse, il suffit de montrer qu'il est formellement lisse. Pour cela, on se donne une S-immersion fermée de schémas affines $Y_0 \hookrightarrow Y$ définie par un idéal de carré nul. Alors les schémas $Y_0[\delta_n]$ et $Y[\delta_n]$ sont affines, et l'immersion fermée $Y_0[\delta_n] \hookrightarrow Y[\delta_n]$ est elle aussi définie par un idéal de carré nul (le même que précédemment mais vu dans $\mathcal{O}_{Y[\delta_n]}$). Comme $X \to S$ est formellement lisse, tout S-morphisme $Y_0[\delta_n] \to X$ se relève en un S-morphisme $Y[\delta_n] \to X$. Ceci démontre que $\mathscr{J}_n(Y) \to \mathscr{J}_n(Y_0)$ est surjectif, c'est ce qu'on voulait démontrer.

(b) Supposons $X \to S$ non ramifié. Alors $\Omega^1_{X/S} = 0$ donc $\mathscr{T}_1 = \mathbb{V}(\Omega^1_{X/S}) \to X$ est un isomorphisme. Par récurrence, on voit que $\mathscr{T}_n \to X$ est un isomorphisme. Alors $\mathscr{J}_n \hookrightarrow \mathscr{T}_n \simeq X$ est une immersion fermée. Comme par ailleurs $\mathscr{J}_n \to X$ possède une section évidente, qui est celle obtenue en envoyant un T-point $T \to X$ sur la composée $T[\delta_n] \to T \to X$, l'immersion fermée $\mathscr{J}_n \to X$ est un isomorphisme.

Exercice 2. (1) Soit $r \geqslant 0$ un entier. Un morphisme de schémas $f : X \to S$ dont toutes les fibres $X_s = f^{-1}(s)$ sont de dimension r et tel que $\Omega^1_{X/S}$ est localement libre de rang r est-il lisse ?

(2) Soient S le spectre d'un anneau A, λ un élément de A, et X le sous-schéma fermé de $\mathbb{A}^2_S = \mathrm{Spec}(A[x, y])$ d'équation $y^2 = x(x-1)(x-\lambda)$.

(a) Le morphisme $X \to S$ est-il plat ?
(b) Quels sont les points où $X \to S$ n'est pas lisse ?

Correction. (1) La réponse est non, car un tel morphisme n'est pas nécessairement plat. Par exemple, si $f : X \hookrightarrow S$ est une immersion fermée, alors toutes les fibres sont de dimension $r = 0$ et $\Omega^1_{X/S} = 0$. Mais si de plus le morphisme f est localement de présentation finie et $X \neq \varnothing, S$, il n'est pas plat.
(2) (a) Montrons que $X \to S$ est plat. Comme $\mathbb{A}^2_S$ est plat sur S, d'après le théorème de platitude des hypersurfaces, il suffit de vérifier que $y^2 - x(x-1)(x-\lambda)$ est non diviseur de 0 dans les anneaux locaux des fibres $\mathbb{A}^2_{k(s)}$. Notons λ_s l'image de λ dans le corps résiduel $k(s)$. Il est clair que $y^2 - x(x-1)(x-\lambda_s)$ est non diviseur de 0 car c'est un polynôme non nul de l'anneau intègre $k(s)[x, y]$.
(b) Comme $X \to S$ est lisse si et seulement s'il est plat à fibres lisses, pour tester la lissité en un point $t \in X$, il suffit de le faire dans la fibre au point s image de t. Remplaçons S par le spectre du corps résiduel $k = k(s)$ et X par X_s. Comme sous-schéma fermé du plan affine défini par une équation non diviseur de 0, le schéma X/k est de dimension 1 en tous ses points. On sait alors (voir prop. 3.4.5 du cours) que X/k est lisse en t si et seulement si $\delta(t) \leqslant 1$, où $\delta(t) = \dim_{k(t)} \Omega^1_{X/k} \otimes k(t)$. Notons $a(x) = x(x-1)(x-\lambda)$, $\ell = k(t)$ le corps résiduel, et notons les images de x, y dans ℓ par les mêmes lettres. On a :

$$\Omega^1_{X/k} \otimes \ell = \frac{\ell dx \oplus \ell dy}{2ydy - a'(x)dx}.$$

Pour que $\delta(t) = 2$, il faut et suffit que x, y vérifient le système $y^2 - a(x) = 2y = a'(x) = 0$.

Si $p = \mathrm{car}(\ell) = 2$, ce système est équivalent à $x^2 = \lambda$ et $y^2 = \lambda(1+\lambda)$. Sur une clôture algébrique de ℓ, il y a un et un seul point singulier, de coordonnées $(x, y) = (\sqrt{\lambda}, \sqrt{\lambda(1+\lambda)})$.

Si $p = \mathrm{car}(\ell) \neq 2$, l'équation $2y = 0$ impose $y = 0$. Il reste le système $a(x) = a'(x) = 0$, qui a une solution si et seulement si $a(x)$ possède une racine double. On trouve donc deux solutions données par $\lambda \in \{0, 1\}$ et $(x, y) = (\lambda, 0)$.

En conclusion, dans X, l'ensemble des points singuliers est la réunion des trois fermés

$$Z_1 = V(2, x^2 + \lambda, y^2 + \lambda(1+\lambda)), \quad Z_2 = V(\lambda, x, y) \quad \text{et } Z_3 = V(\lambda - 1, x - 1, y).$$

L'ouvert où $X \to S$ est lisse est le complémentaire de $Z_1 \cup Z_2 \cup Z_3$.

Exercice 3. (a) Montrez qu'un morphisme lisse de schémas $X \to S$ admet une section localement pour la topologie étale sur S, c'est-à-dire qu'il existe un morphisme étale $S' \to S$ tel que le morphisme $X \times_S S' \to S'$ admet une section.
(b) Donnez un exemple qui montre que ce n'est pas toujours vrai pour la topologie de Zariski.

Correction. (a) Soit x un point de X. Comme $f : X \to S$ est lisse en x, par un résultat du cours (proposition 3.4.4) il existe un ouvert $U \subset X$ contenant x et un morphisme étale $g : U \to \mathbb{A}^n_S$ tel que $f|_U = p \circ g : U \to S$, où $p : \mathbb{A}^n_S \to S$ est le morphisme de structure. Soit $\sigma : S \to \mathbb{A}^n_S$ une section de p, par exemple la section $x_1 = \cdots = x_n = 0$ après choix d'un système de coordonnées $x_1, \ldots, x_n$ pour $\mathbb{A}^n_S$. Soit $S' = U \times_{g, \mathbb{A}^n_S, \sigma} S$ la préimage par g de la section σ. Comme les morphismes étales sont stables par changement de base, le morphisme $\sigma' : S' \to S$ est étale. On a ainsi obtenu un S-morphisme $S' \to U \to X$, ou si on veut un S'-morphisme $S' \to X \times_S S'$, qui est une section pour $X \times_S S' \to S'$, comme demandé.

$$\begin{tikzcd}
S' \arrow[r] \arrow[d, "\sigma'"'] & S \arrow[d, "\sigma"] \arrow[dr, equal] & \\
U \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "f|_U"'] & \mathbb{A}^n_S \arrow[r, "p"] & S
\end{tikzcd}$$

(b) En général, il n'est pas possible d'obtenir de telles sections localement pour la topologie de Zariski : par exemple si $S = \mathrm{Spec}(\mathbb{R})$ et $X = \mathrm{Spec}(\mathbb{C})$ qui est étale sur S, le seul ouvert non vide de S est S et il n'existe aucune section de $X \to S$.