Soit $f : X \to S$ un morphisme de schémas. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) il existe un recouvrement ouvert affine $\{V_i\}$ de S tel que $f^{-1}(V_i)$ est affine, pour tout i.

(2) pour tout ouvert affine V de S, $f^{-1}(V)$ est affine.

(3) pour tout schéma affine V et tout morphisme $V \to S$, le produit fibré $X \times_S V$ est un schéma affine.

Si ces conditions sont vérifiées, on dit que f est un *morphisme affine* ou que X *est affine sur* S. Les propriétés élémentaires des morphismes affines, dont l'équivalence entre les trois conditions ci-dessus, sont discutées dans Hartshorne, chap. II, ex. 5.17, et dans les 10 premières pages de EGA2 (Publ. Math. IHES no. 8, disponible sur internet à l'adresse `http://www.numdam.org`) que vous pouvez feuilleter avec profit (N.B. au temps de la rédaction de EGA, on appelait *préschéma* ce qu'on appelle aujourd'hui *schéma*, et *schéma* ce qu'on appelle aujourd'hui *schéma séparé*).

Voici quelques faits que vous pourrez démontrer en exercice.

1. Soit S un schéma. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) tout morphisme $\mathrm{Spec}(A) \to S$ depuis un schéma affine est affine,

(2) la diagonale $\Delta : S \to S \times S$ est un morphisme affine.

En particulier, tout morphisme $\mathrm{Spec}(A) \to S$ est affine si S est séparé.

2. Voici un exemple d'un morphisme $\mathrm{Spec}(A) \to S$ qui n'est pas affine. Soit k un corps, $U = \mathbb{A}^2 = \mathrm{Spec}(k[x, y])$ le plan affine, $O \in U$ l'origine, $U_0 = U \setminus \{O\}$. Alors l'application de restriction $\Gamma(U, O_U) \to \Gamma(U_0, O_{U_0})$ est un isomorphisme (pour calculer les fonctions globales sur U_0, le recouvrir par $D(x)$ et $D(y)$). En conséquence, U_0 n'est pas affine.

Soit S le *plan affine avec origine dédoublée*, i.e. le schéma obtenu en recollant deux copies U, V du plan affine le long des ouverts complémentaires de l'origine U_0, V_0. Les schémas U, V s'identifient à des ouverts affines de S qui le recouvrent. Le schéma S est non séparé. L'immersion ouverte $U \to S$ n'est pas un morphisme affine.

3. Pour tout entier $n \geq 2$, on a les mêmes résultats que dans l'exercice précédent avec $\mathbb{A}^n$ au lieu de $\mathbb{A}^2$. En revanche, le cas $n = 1$ est particulier. Soit $U = \mathbb{A}^1 = \mathrm{Spec}(k[x])$ la droite affine, $O \in U$ l'origine, $U_0 = U \setminus \{O\}$. Alors U_0 est affine. Soit X la droite affine avec origine dédoublée, obtenue comme ci-dessus en recollant deux copies U, V de la droite affine. Alors le schéma X est non séparé, mais sa diagonale est un morphisme affine et l'immersion ouverte $U \to X$ est un morphisme affine.