Examen du cours de Géométrie Algébrique 2

• L'énoncé est volontairement long ; il est recommandé de commencer par parcourir le sujet entièrement pour repérer les questions qui vous sont sympathiques.
• Tous les documents sont autorisés.
• Il est possible d'écrire en anglais.

Exercice 1. (1) Soient $u : A \to B$ et $v : B \to C$ des morphismes locaux d'anneaux locaux. On suppose que v et $v \circ u$ sont plats. Montrez que u est plat.

(2) Soit $f : X \to S$ un morphisme de schémas localement de présentation finie. Soit $h : S' \to S$ un morphisme de changement de base fidèlement plat. On note $X' = X \times_S S'$ et $f' : X' \to S'$ la projection. Montrez que f est lisse si et seulement si f' est lisse.

Exercice 2. Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique 0. Soient X, Y deux courbes (i.e. des schémas de type fini séparés de dimension 1) lisses et connexes sur k. On note $k(X)$ et $k(Y)$ leurs corps de fonctions. On considère un k-morphisme surjectif $f : X \to Y$.

(1) Montrez que les anneaux locaux des points fermés de X et Y sont des anneaux de valuation discrète.

(2) Montrez que f est plat.

(3) Donnez un exemple dans lequel f n'est pas étale.

(4) On considère la suite exacte cotangente des modules de 1-formes différentielles pour f :

$$f^*\Omega^1_{Y/k} \xrightarrow{i} \Omega^1_{X/k} \longrightarrow \Omega^1_{X/Y} \longrightarrow 0.$$

Montrez que i est injectif sur les fibres au point générique de X. Déduisez-en que i est injectif en tout point $x \in X$.

(5) On appelle *différente* de f et on note $\mathcal{I}_{X/Y}$ le faisceau d'idéaux annulateur de $\Omega^1_{X/Y}$, défini par $\mathcal{I}_{X/Y}(U) = \{s \in \mathcal{O}_X(U)\,,\, s\,(\Omega^1_{X/Y}|_U) = 0\}$ pour tout ouvert $U \subset X$. Montrez que c'est un faisceau inversible, c'est-à-dire qu'il est engendré localement par un élément non diviseur de zéro.

Le sous-schéma fermé $D = V(\mathcal{I}_{X/Y})$ est un diviseur de Cartier appelé le *diviseur de ramification* de f.

(6) Soit ω une section de $\Omega^1_{X/k}$ sur un ouvert U. Pour chaque $x \in U$, choisissons un ouvert U_x et un générateur t_x de $(\mathcal{I}_{X/Y})|_{U_x}$. Montrez que $t_x\omega \otimes \frac{1}{t_x}$ est une section locale de $f^*\Omega^1_{Y/k} \otimes \mathcal{O}_X(D)$, indépendante du choix de t_x. Montrez que ces sections se recollent et qu'on définit ainsi un isomorphisme de faisceaux inversibles $\Omega^1_{X/k} \simeq f^*\Omega^1_{Y/k} \otimes \mathcal{O}_X(D)$.

Exercice 3. On note $M_3(A)$ l'ensemble des matrices $P = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ à coefficients dans un anneau A. Soit $q : \mathbb{Z}^3 \to \mathbb{Z}$ la forme quadratique définie par $q(x,y,z) = xy + z^2$.

(1) Montrez que le foncteur $F : (\mathrm{Sch}/\mathbb{Z})^\circ \to \mathrm{Ens}$ défini pour tout schéma T par :

$$F(T) = \left\{ P \in M_3(\Gamma(T, \mathcal{O}_T)) \, , \, q(P(v)) = q(v) \text{ pour tout } v \in \Gamma(T, \mathcal{O}_T)^3 \right\}$$

est représentable par un sous-schéma fermé G de $\mathbb{A}^9_{\mathbb{Z}}$ dont vous donnerez des équations dans les coordonnées naturelles $a, b, \dots, h, i$.

(2) Soit $e : \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}) \to G$ la section de G donnée par la matrice identité. Calculez $e^*\Omega^1_{G/\mathbb{Z}}$. Le schéma G est-il lisse sur $\mathbb{Z}$?

On note e_3 le troisième vecteur de la base canonique de $\mathbb{Z}^3$.

(3) Montrez que le foncteur $F_2 : (\mathrm{Sch}/\mathbb{F}_2)^\circ \to \mathrm{Ens}$ défini pour tout $\mathbb{F}_2$-schéma T par

$$F_2(T) = \{ P \in G(T) \, , \, P(e_3) = e_3 \}$$

est représentable par un sous-schéma fermé H de $G \otimes \mathbb{F}_2$.

(4) On note $A = \Gamma(G, \mathcal{O}_G)$ et A' le quotient de $A[r,s,t]/(2r - c, 2s - f, 2t - (i-1))$ par l'idéal des éléments de $\mathbb{Z}$-torsion. Donnez une présentation pour A' comme $\mathbb{Z}$-algèbre.

On note $G' = \mathrm{Spec}(A')$ et $\pi : G' \to G$ le morphisme induit par $A \to A'$. Soit $(\mathrm{Plat}/\mathbb{Z})$ la catégorie des schémas *plats* sur $\mathbb{Z}$.

(5) Montrez que le foncteur $F' : (\mathrm{Plat}/\mathbb{Z})^\circ \to \mathrm{Ens}$ défini pour T plat sur $\mathbb{Z}$ par

$$F'(T) = \{ f : T \to G \text{ tel que } (f \otimes \mathbb{F}_2)(T \otimes \mathbb{F}_2) \subset H \}$$

est représentable par G'.

(6) Montrez que la section neutre e se relève de manière unique en une section $\epsilon : \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}) \to G'$. Calculez $\epsilon^*\Omega^1_{G'/\mathbb{Z}}$. Montrez que G' est lisse en tous les points de la section unité.

Le groupe G' est le *groupe de Chevalley O_3 sur $\mathbb{Z}$*.