# Corrections et ajouts pour le cours de Géométrie Algébrique 2

18 février 2011

Les modifications qui sont trop longues pour être indiquées ici sont rédigées directement dans la version la plus actuelle du cours, désignée ci-dessous comme "le cours", disponible à l'adresse `http://people.math.jussieu.fr/~romagny/M2_1011/cours.pdf`.

### Avertissement

Les modifications sont listées par ordre chronologique. Lorsque l'ajout de certains énoncés modifie la numérotation, j'indique le nouveau numéro de l'énoncé, et entre parenthèse le numéro qu'avait l'énoncé dans la version du polycopié qui a été distribuée le mercredi 12 janvier 2011.

### Modifications faites avant le 16/01

• Lemme 1.3.9 : dans la preuve, lire $f$ au lieu de $x$, trois fois.

• Remarques 1.4.4 : j'ai complété la remarque (1) pour inclure la définition d'un $T$-point d'un foncteur $F$.

• Définition 2.1.1 : *ouvert affine* $V = \mathrm{Spec}(R)$ *de* $f(x)$ *dans* $S$ *tels que* $f(U) \subset V$ *et* $A$ *est une* $R$*-algèbre de présentation finie.*

• Proposition 2.1.2 : j'ai ajouté une propriété dans l'énoncé : *Si le composé* $g \circ f$ *de deux morphismes est localement de présentation finie et si* $g$ *est localement de type fini, alors* $f$ *est localement de présentation finie.*

• Lemme 2.1.3 : la preuve est grandement simplifiée par le fait qu'on n'a en fait pas besoin d'un recouvrement du but $S$. Voir le cours.

• Théorème 2.1.7 : la dernière partie de la preuve, après le lemme 2.1.9, est réécrite. Voir le cours.

• Lemme 2.1.8 : au début de la preuve, dans la démonstration de l'injectivité, il ne faut pas se donner deux systèmes inductifs $(\theta_i, \theta'_i : C \to A_i, i \in I)$ mais deux éléments de l'ensemble $\lim \mathrm{Hom}_B(C, A_i)$ définis comme classes de deux morphismes $\theta_i$ et $\theta'_j$. Voir le cours.

• Définition 2.2.2 : juste après la définition, j'ai énoncé les propriétés de base des morphismes de présentation finie (plutôt que simplement dire qu'on avait des propriétés analogues à celles de 2.1.2).

• Théorème 2.2.4 (**anciennement 2.2.3**) : juste avant l'énoncé du théorème, j'ai ajouté une référence à EGA. Dans la preuve du théorème, lire *dans une autre sous-algèbre* $R_\nu$ au lieu de *dans un autre* $R_\nu$.

• Lemme 2.3.6 : dans la preuve, lire *Pour tout idéal maximal* $q \subset B$ au lieu de *Pour tout idéal premier* $q \subset B$. Juste après la preuve, j'ai ajouté un commentaire pour signaler que le morphisme de $A$ dans le produit de ses localisés en les idéaux maximaux est injectif.

• Lemme 2.3.8 : dans la preuve, lorsqu'on montre que (2) $\Rightarrow$ (1), lire *Par hypothèse* au lieu de *Par fidèle platitude*, deux fois.

• Lemme 2.3.11 : j'ai remplacé l'énoncé par l'assertion plus générale que pour un morphisme de schémas $f$ fidèlement plat, le comorphisme $O_Y \to f_*O_X$ est injectif ; corollaire : $f$ est un épimorphisme. J'ai aussi renommé ce lemme en Proposition. Voir le cours.

• Lemme 2.3.13 : juste après l'énoncé, lire *si* $M$ *est plat, toute solution...* au lieu de $M$ *est plat si et seulement si toute solution...* (N.B. en effet, le lemme n'énonce qu'une implication ; mais la réciproque est vraie, comme précisé dans la phrase suivante.)

• Théorème 2.3.20 : j'ai ajouté une référence à Milne après l'énoncé du théorème. Par ailleurs, j'ai ajouté quelques explications à la fin de la preuve pour la rendre plus claire.

• Lemme 2.3.21 : la preuve donnée nécessite des modifications, aussi bien dans le cas $I = 0$ que dans le cas $I \neq 0$. Voir les détails dans le cours.

• Définition 5.1.1 : $h_G : (\mathrm{Sch}/S)^\circ \to \mathrm{Ens}$, deux fois (dans le texte et dans le diagramme).

**Modifications le 18/01**

• Paragraphe 2.4 sur la théorie de la descente plate : j'ai complété un peu l'introduction du paragraphe, ajouté la définition d'un *faisceau pour la topologie fppf* (définition 2.4.3), et corrigé la démonstration du point (2) du lemme 2.4.1 (qui porte maintenant le numéro 2.4.4). Dans la version précédente de la preuve du lemme, il était affirmé que le morphisme $A = O_S(U) \to B = (f_*O_{S'})(U)$ était plat, ce qui n'est pas le cas en général. Voir le cours.

**Modifications le 23/01**

• Proposition 3.1.10 : à la fin de la preuve, lire $u = v \circ g$ au lieu de $u = g \circ v$.

**Modifications le 25/01**

• Lemme 2.4.4 (**anciennement 2.4.1**) : dans la preuve du point (2), il vaut mieux se ramener dès le départ au cas où $S$ est affine. Cela permet d'assurer, dans le cas d'un morphisme $f : S' \to S$ général, que le morphisme $\alpha$ est un morphisme affine, car tout morphisme d'un schéma affine $X$ dans un schéma séparé $Y$ est affine. (Ceci est faux en général sans hypothèse sur $Y$, voir la note sur les morphismes affines mise sur la page web.) Dans la nouvelle version de la preuve, je me ramène dès le départ au cas $S$ affine. Voir le cours.

• Proposition 3.1.3 : il faut ajouter le fait que la restriction de $d$ à $I$ est $A$-linéaire, ce qui découle de la règle de Leibniz. Alors $d|_I$ induit un morphisme de $B$-modules de $I/I^2$ dans $N$. Ceci fournit la construction correcte de la flèche $\mathrm{Der}_R(A, N_A) \to \mathrm{Hom}_B(I/I^2, N)$. Voir le cours.

• Construction 3.1.8 : lire $1 \otimes x - x \otimes 1$ au lieu de $x \otimes 1 - 1 \otimes x$ (cela n'a pas beaucoup d'importance, mais c'est plus cohérent avec 3.1.6 et cela permet de faire disparaître un signe " - " en-dessous). Modifier en conséquence :

- le calcul de $i$ qui suit : on trouve $i = \sum x_k d(y_k)$ au lieu de $i = \sum y_k d(x_k)$,
- dans 3.1.9, le calcul de $(f \circ d)(x)$. Voir le cours.

• Définition 3.1.18 : lire *morphisme* au lieu de *morphismes*.

• Remarque 3.1.28 : dans la première phrase, lire *pour un anneau local noethérien* $(A, m, k)$ et échanger les mots *tangent* et *cotangent*.

• Numéro 3.1.29 : lire *on a noté $O_M(U)$ l'anneau des fonctions différentiables sur $U$* au lieu de *on a noté $O_M(U)$ et $O_{M,m}$ les anneaux de fonctions différentiables sur $U$ et de germes de fonctions en $m$*.

• Première phrase de la section 3.2 (Morphismes lisses, non ramifiés, étales) : *applications* au lieu de *application*.

• Lemme 3.2.8 : dans la preuve, lire *corollaire* au lieu de *lemme*.

• Lemme 3.3.3 : dans la preuve, lire *le $O_X$-module associé à $M$* au lieu de *le $A$-module associé à $M$*.

**Modifications le 28/01**

• Remarque 3.2.5 : avant la dernière phrase, ajouter la phrase : *Alors, on a un morphisme $\Omega^1_{A/R} \otimes_A B \to I/I^2$ qui est la projection sur le module engendré par $g_{r+1}, \dots, g_n$.* Ensuite, dans la suite exacte finale, lire $\Omega^1_{A/R} \otimes_A B$ au lieu de $j^*\Omega^1_{A/R}$.

• Lemme 3.2.8 : le lemme est repoussé après le corollaire 3.2.12 (qui dit que *tout morphisme lisse (...) est universellement ouvert*) pour être complété. Le nouvel énoncé devient :

*Soit $f : X \to S$ un morphisme. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

*(1) $f$ est étale,*

*(2) $f$ est lisse de dimension relative* 0,

*(3) $f$ est non ramifié et plat.*

et son nouveau numéro est *Corollaire 3.2.11*. La proposition 3.2.9, dont la preuve utilise ce résultat, devient *Proposition 3.2.12*. Voir le cours.

**Modifications le 31/01**

• Corollaire 1.3.2 : à la fin de la preuve, lire *pour* au lieu de *pou*.

• Numéro 1.3.4 : lire *ont toutes même longueur* au lieu de *ont toute même longueur*.

• Lemme 1.3.9 : après la phrase *On peut donc supposer que $A$ est intègre*, insérer : *Dans le cas (1) on a $f = 0$ et le résultat est clair ; supposons qu'on est dans le cas (2).*

• Théorème 2.1.7 : à la fin de la preuve, après le lemme 2.1.9, il ne faut pas se donner deux systèmes inductifs mais deux classes, représentées par des morphismes $f_i, f_i' : Z_i \to V$ dont les composées $f, f' : Z \to V$ sont égales.

• Lemme 2.3.13 : dans la preuve, remplacer $\varphi_M : M^s \to M^s$ par $\varphi_M : M^s \to M^r$, et remplacer $k_i \in K$ par $v_i \in K$.

• Section 2.4 : la définition d'un faisceau fppf, que j'avais tirée de Bosch-Lütkebohmert-Raynaud, n'est pas la bonne (c'est un excellent livre, mais je crois que sur ce point il n'est pas parfait). En effet, un faisceau fppf tel que décrit dans *loc. cit.* ne semble pas nécessairement un faisceau Zariski, ce qui est problématique. Une meilleure source est donnée par des notes de Vistoli que j'ai mises en référence dans le polycopié. J'ai modifié la définition de faisceau (c'est maintenant la définition 2.4.2) ainsi que la présentation générale de tout ce qui précède le lemme (2.4.5) et le théorème (2.4.6).

• Section 2.4 : à la fin de cette section, j'ai ajouté quelques lignes sur le faisceau de Picard pour inclure ce que j'avais dit en cours à ce sujet.

• Sections 3.1 et 3.2 : j'ai divisé ces sections en deux.

La première donne deux sections 3.1 et 3.2 :

*3.1. Dérivations et différentielles en algèbre commutative*

*3.2. Dérivations et différentielles sur les schémas*

La seconde donne deux sections 3.3 et 3.4 :

*3.3. Morphismes lisses, non ramifiés, étales : définitions*

*3.4. Morphismes lisses, non ramifiés, étales : propriétés*

De plus j'ai modifié l'ordre des différents résultats dans 3.3 pour améliorer la présentation (du point de vue de la clarté et de la logique). Ceci modifie beaucoup les numéros, j'en suis désolé...

• Définitions 3.2.1 (**anciennement 3.1.18**) : remplacer *Une immersion* par *Une immersion (ouverte, fermée)* et *$Z$ est un sous-schéma* par *$Z$ est un sous-schéma (ouvert, fermé)*. Après la définition, j'ai énoncé quelques propriétés des immersions ouvertes et fermées, et quelques exemples et contre-exemples.

• Section 3.3 (**anciennement 3.2**) : dans l'introduction, j'ai complété l'analogie de géométrie différentielle, avant la définition 3.3.1 (**anciennement 3.2.1**).

• Définition 3.3.2 (**anciennement 3.2.2**) : dans le point (2), lire $dg(y)$ au lieu de $dg$.

• Définition 3.3.3 (**anciennement 3.2.3**) : juste après cette définition, j'ai inséré quelques exemples simples (immersions, espace affine) : Exemples 3.3.4. Voir le cours.

• Proposition 3.4.1 (**anciennement Remarque 3.2.5, corollaire 3.2.6**) : cette proposition réunit la remarque 3.2.5 et le corollaire 3.2.6 pour donner un énoncé plus complet sur la suite exacte conormale pour les immersions de schémas lisses. Voir le cours.

• Proposition 3.4.2 (**anciennement 3.2.7**) : dans la preuve de l'implication (1) $\Rightarrow$ (5), lorsque $k$ est algébriquement clos, le point $x$ n'est pas nécessairement $k$-rationnel s'il n'est pas fermé. On doit passer par un point fermé $y$, spécialisation de $x$. Voir le cours.

• Proposition 3.4.3 (**anciennement 3.2.9**) : lire $(i, g)$ au lieu de $(g, i)$, deux fois.

• Proposition 3.4.4 (**anciennement 3.2.13**) : juste avant l'énoncé de la proposition, ajouter la phrase : *Par ailleurs, un schéma est dit* régulier *lorsque tous ses anneaux locaux le sont (voir définition 1.3.17).* Dans la preuve, la rédaction de l'implication (3) $\Rightarrow$ (2) est améliorée. Voir le cours.

**Modifications le 02/02**

• Proposition 3.4.4 (**anciennement 3.2.13**) : dans la preuve de (1) $\Rightarrow$ (4), après *on est ramené à prouver que $U$ est régulier*, insérer : *Comme un localisé d'un anneau régulier est régulier (point (1) du théorème 1.3.18), il suffit de prouver que les anneaux locaux des points fermés de $U$ sont réguliers. Soit donc $y \in U$ un point fermé, $z = g(y)$...*

• Exemple 3.4.5 : j'ai inséré l'exemple d'un $k$-schéma régulier non lisse, spectre d'une extension finie inséparable de $k$, après la preuve de la proposition précédente. Voir le cours.

**Modifications le 07/02**

• Remarque 1.4.15 : j'ai ajouté en 1.4.15 une remarque sur la définition des fibres d'un morphisme, et l'anneau local d'un point dans une fibre. (La remarque 1.4.15 précédente devient 1.4.16.) Voir le cours.

• Proposition 3.2.7 : j'ai complété l'énoncé de cette proposition pour donner des énoncés plus explicites.

• Remarque 3.4.2 : j'ai inséré une remarque pour faire un commentaire sur le scindage (local) de la suite conormale d'une immersion de schémas lisses. Voir le cours.

• Exercice 4.3.2 : j'ai ajouté cet exercice qui propose le calcul de la dimension de l'espace des polynômes de degré $d$ en $n + 1$ variables.

**Modifications le 08/02**

• Théorème 2.2.4 : à la fin de la preuve, lire *cocycle* au lieu de *cocyle*.

• Lemme 3.5.3 : dans la preuve, lire $s_{ij} \in F(U_{ij})$ au lieu de $s_{ij} \in F(U_i)$.

• Proposition 4.2.7 : dans la preuve, lire *cocycle* au lieu de *cocyle*, deux fois.

**Modifications le 10/02**

Les ajouts qui suivent sont des compléments à la partie 5 sur les schémas en groupes. Ce sont des rafinements qui peuvent évidemment être oubliés en ce qui concerne l'examen !

• Ajout d'une section 5.2 : *Schémas en modules et foncteur $V(F)$*. On y démontre que le foncteur $V$, qui envoie un $O_S$-module quasi-cohérent $F$ sur le schéma $V(F)$, est pleinement fidèle. Voir le cours.

• Ajout d'une section 5.4 : *Fibré tangent.* Tout ce qui concernait le fibré tangent dans la section sur les fibrés vectoriels est maintenant présenté à part dans cette nouvelle section. Un résultat est ajouté : la proposition 5.4.4, qui porte sur le fibré tangent et le faisceau des 1-formes différentielles d'un schéma en groupes. Voir le cours.

**Modifications le 13/02**

• Remarque 4.1.6 : juste après la remarque, lire *des fonctions méromorphes* $f_i \in ((A_i)_{tot})^\times$ au lieu de *des fonctions méromorphes* $f_i \in (A_i)_{tot}$.

• Proposition 4.2.4 : lire *engendré par* $-D$ au lieu de *engendré par* $D^{-1}$.

• Proposition 4.2.7 : dans la preuve, lire *la condition de cocycle* $\alpha_{jk}\alpha_{ik}^{-1}\alpha_{ij} = 1$ au lieu de *la condition de cocycle* $\alpha_{jk}\alpha_{ik}^{-1}\alpha_{ij} = 0$.

• Définition 5.1.1 : lire $(S - Sch)^\circ$ (ou $(Sch/S)^\circ$) au lieu de $S - Sch$, cinq fois.

• Définition 5.1.1 : j'ai ajouté une remarque 5.1.2 après la définition pour mentionner la notion de *foncteur en groupes.*

• Section 5.2 : j'ai ajouté en 5.2.1 des définitions formelles de *schéma en anneaux, schéma en groupes agissant sur un schéma, schéma en modules.*

• Proposition 5.4.2 (**anciennement 5.2.6**) : j'ai corrigé quelques détails dans le calcul final de $Hom_X(T, T_{X/S})$. Voir le cours.

**Modifications le 18/02**

• Rappels d'algèbre commutative de 1.3.4 : lire *La réunion des premiers associés est le complémentaire de l'ensemble des non diviseurs de* 0 au lieu de *La réunion des premiers associés est l'ensemble des non diviseurs de* 0.