Corrigé de l'examen de Géo. Alg. 2, lundi 21 février

Exercice 1. (1) Soit $\mathcal{S} : \cdots \to P \to Q \to R \to \dots$ une suite exacte de morphismes de A-modules. Comme $v \circ u$ est plat, alors la suite $\mathcal{S} \otimes_A C$ est exacte. Par transitivité du produit tensoriel, on a $\mathcal{S} \otimes_A C = (\mathcal{S} \otimes_A B) \otimes_B C$. Comme tout morphisme local d'anneaux locaux qui est plat est fidèlement plat, alors v est fidèlement plat et on en déduit que la suite $\mathcal{S} \otimes_A B$ est exacte. Donc u est plat.

(2) La propriété est en fait vraie pour les morphismes lisses, non ramifiés ou étales. Donnons la démonstration pour les trois cas.

Comme les morphismes lisses, n.r., étales sont stables par changement de base, alors f' est lisse (resp. n.r., resp. étale) si f l'est.

Réciproquement, supposons f' lisse. Montrons que f est plat en tout point x. Comme $h : S' \to S$ est surjectif, alors f' l'est aussi, choisissons un point $x' \in X'$ au-dessus de x et notons s' son image dans S'. On a des morphismes d'anneaux locaux

$$\mathcal{O}_{S,s} \xrightarrow{u} \mathcal{O}_{X,x} \xrightarrow{v} \mathcal{O}_{X',x'}$$

Comme $S' \to S$ est plat, alors par changement de base f' est plat, donc v est plat. Comme par hypothèse f' est plat et $S' \to S$ est plat, alors le composé $\mathcal{O}_{S,s} \to \mathcal{O}_{S',s'} \to \mathcal{O}_{X',x'}$, c'est-à-dire v, est plat. D'après le point (1), u est plat, comme souhaité.

Montrons que les fibres de f sont lisses. Soit $s \in S$, et fixons un point $s' \in S'$ au-dessus. Notons ℓ une clôture algébrique du corps résiduel $k(s')$. Comme par hypothèse $X'_{s'}$ est lisse, alors $X_s \otimes_{k(s)} \ell = X'_{s'} \otimes_{k(s')} \ell$ est lisse. D'après le lien (pour les schémas de type fini sur un corps) entre lissité en un point et existence d'un voisinage ouvert géométriquement régulier, on en déduit que X_s est lisse. Finalement, un morphisme loc. de présentation finie est lisse si et seulement s'il est plat à fibres lisses. Donc f est lisse.

Si f' non ramifié, alors pour tout $x \in X$, on peut choisir $x' \in X'$ au-dessus et alors $\Omega^1_{X/S,x} \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} k(x') = \Omega^1_{X'/S',x'} \otimes k(x') = 0$. On en déduit que $\Omega^1_{X/S,x} \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} k(x) = 0$ puis $\Omega^1_{X/S} = 0$ sur un voisinage de x. Donc f est non ramifié.

Le cas étale est la conjonction du cas lisse et du cas non ramifié.

Exercice 2. (1) L'anneau local $\mathcal{O}$ d'un point fermé dans une courbe lisse est un anneau noethérien de dimension 1, régulier, donc intègre, dont l'idéal maximal est engendré par un élément t. Par définition d'un anneau de valuation discrète, il suffit de montrer que $\mathcal{O}$ est un anneau principal. Pour tout $x \in \mathcal{O}$ non nul, il existe un plus grand entier $n \geq 0$ tel que t^n divise x, car l'intersection des idéaux (t^n) est nulle d'après le théorème de l'intersection de Krull. Notons $v(x)$ ce plus grand entier, appelé *valuation de x*. Soit $I \subset \mathcal{O}$ un idéal et notons n la plus petite des valuations des éléments de $I \setminus \{0\}$. Il est alors clair que $I = (t^n)$.

(2) Notons $k(X)$ et $k(Y)$ les corps de fonctions des deux courbes. Soit $x \in X$ et $y = f(x)$. Si x et y sont les points génériques, alors l'extension d'anneaux locaux est $k(Y) \to k(X)$ qui est plate. Sinon x et y sont des points fermés, et leurs anneaux locaux sont des anneaux de valuations discrète. Or on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} k(Y) \arrow[r, hook] & k(X) \\ \mathcal{O}_{Y,y} \arrow[u, hook, "a"] \arrow[r] & \mathcal{O}_{X,x} \arrow[u, hook, "b"'] \end{tikzcd}$$

dans lequel a et b sont injectifs. Il en découle que $\mathcal{O}_{Y,y} \to \mathcal{O}_{X,x}$ est injectif. En particulier, $\mathcal{O}_{X,x}$ est sans torsion comme $\mathcal{O}_{Y,y}$-module, donc il est plat.

(3) Soit $n \geq 2$ un entier. Considérons $X = Y = \mathbb{A}^1_k$ et $f : X \to Y$ défini par $x \mapsto x^n$. Sur les anneaux de fonctions, c'est le morphisme $A = k[u] \to B = k[v]$ qui envoie u sur v^n. Dans la suite exacte cotangente

$$\Omega^1_{A/k} \otimes B = Bdu \longrightarrow \Omega^1_{B/k} = Bdv \longrightarrow \Omega^1_{B/A} \longrightarrow 0$$

on a $\Omega^1_{A/k} \otimes B = Bdu$, $\Omega^1_{B/k} = Bdv$ et la première flèche est définie par $du \mapsto nv^{n-1}dv$. Alors $\Omega^1_{B/A} \simeq B/(nv^{n-1})$ qui est non nul. Donc f est ramifié.

(4) Localisons au point générique η de X. On a

$$\mathcal{O}_{X,\eta} = k(X) \quad , \quad \Omega^1_{X/k,x} = \Omega^1_{k(X)/k} \quad , \quad (f^*\Omega^1_{Y/k})_x = \Omega^1_{k(Y)/k} \otimes k(X)$$

et la suite exacte cotagente devient

$$\Omega^1_{k(Y)/k} \otimes k(X) \longrightarrow \Omega^1_{k(X)/k} \longrightarrow \Omega^1_{k(X)/k(Y)} \longrightarrow 0.$$

Comme on est en caractéristique 0, l'extension de corps finie $k(X)/k(Y)$ est séparable donc $\Omega^1_{k(X)/k(Y)} = 0$. On sait par ailleurs que, par lissité, $\Omega^1_{X/k}$ et $f^*\Omega^1_{Y/k}$ sont localement libres de rang 1 ; alors i_η est un morphisme entre deux $k(X)$-espaces vectoriels de dimension 1 et de conoyau nul, donc i_η est injectif.

Soit maintenant $x \in X$ un point, $y = f(x)$, $\mathcal{O}_x = \mathcal{O}_{X,x}$, $\mathcal{O}_y = \mathcal{O}_{Y,y}$. De plus, on a $\Omega^1_{k(X)/k} = \Omega^1_{\mathcal{O}_x/k} \otimes_{\mathcal{O}_x} k(X)$ et idem en y. On peut donc comparer les suites cotangentes localisée en x (ligne du bas) et localisée en η (ligne du haut) :

$$\begin{tikzcd}
\Omega^1_{\mathcal{O}_y/k} \otimes_{\mathcal{O}_y} k(X) \arrow[r, "i_\eta"] & \Omega^1_{\mathcal{O}_x/k} \otimes_{\mathcal{O}_x} k(X) \arrow[r] & \Omega^1_{k(X)/k(Y)} = 0 \arrow[r] & 0 \\
\Omega^1_{\mathcal{O}_y/k} \otimes_{\mathcal{O}_y} \mathcal{O}_x \arrow[u, "j"] \arrow[r, "i_x"] & \Omega^1_{\mathcal{O}_x/k} \arrow[u] \arrow[r] & \Omega^1_{\mathcal{O}_x/\mathcal{O}_y} \arrow[u] \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

La première flèche verticale j est obtenue en appliquant le foncteur $(\Omega^1_{\mathcal{O}_y/k} \otimes_{\mathcal{O}_y} -)$ au morphisme injectif $\mathcal{O}_x \to k(X)$. Comme $\Omega^1_{\mathcal{O}_y/k}$ est $\mathcal{O}_y$-plat, le résultat est un morphisme j injectif. Comme i_η est un injectif, on en déduit que i_x est injectif.

(5) Localement sur un voisinage U assez petit d'un point $x \in X$, les faisceaux $f^*\Omega^1_{Y/k}$ et $\Omega^1_{X/k}$ sont libres de rang 1. Alors, le morphisme i est déterminé par l'image d'un générateur de $(f^*\Omega^1_{Y/k})|_U$, et cette image est de la forme $t\omega$ où ω est un générateur de $(\Omega^1_{X/k})|_U$. La fonction $t \in \mathcal{O}_X(U)$ est non nulle car i est injectif, donc non diviseur de zéro car $\mathcal{O}_X(U)$ est intègre. D'après la suite exacte cotangente, on a $(\Omega^1_{X/Y})|_U \simeq \mathcal{O}_U/t\mathcal{O}_U$. On en déduit que $I_f = t\mathcal{O}_U$ qui est engendré par une fonction non diviseur de zéro.

(6) Notons $t = t_x$. Comme t annule $\Omega^1_{X/Y}$, l'image de $t\omega$ dans $\Omega^1_{X/Y}$ est nulle, donc $t\omega$ est une section locale de $f^*\Omega^1_{Y/k}$. Ainsi $t\omega \otimes (1/t)$ est une section locale de $f^*\Omega^1_{Y/k} \otimes \mathcal{O}(D)$. Si on remplace t par un autre générateur local u de $\mathcal{I}_{X/Y}$, alors $u = \alpha t$ pour une fonction locale inversible α. Alors

$$u\omega \otimes (1/u) = \alpha t\omega \otimes (1/\alpha t) = t\omega \otimes (1/t)$$

donc cette section ne dépend pas du choix de t. Ceci implique que les sections ainsi définies sur un recouvrement ouvert de U coïncident sur les intersections, donc définissent une section de $f^*\Omega^1_{Y/k} \otimes \mathcal{O}(D)$ sur U. On obtient un morphisme de faisceaux inversibles $\varphi : \Omega^1_{X/k} \simeq f^*\Omega^1_{Y/k} \otimes \mathcal{O}_X(D)$, et il ne reste qu'à montrer que c'est un isomorphisme. Ceci peut être vérifié localement. Or on a vu dans la question (5) que localement $f^*\Omega^1_{Y/k} = t\Omega^1_{X/k}$, donc il y a une application $t\omega' \otimes (a'/t) \mapsto a'\omega'$ qui est inverse pour φ.

Exercice 3. Notons $S = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$.

(1) Se donner une matrice à coefficients dans $\Gamma(T, \mathcal{O}_T)$ revient à se donner des sections globales $a, b, \dots, i$. Cette matrice vérifie $q_T \circ P = q_T$ si l'on a $q(P(v)) = q(v)$ pour toute section $v = (x, y, z)$ de $\mathcal{E}_T$, c'est-à-dire :

$$(ax + by + cz)(dx + ey + fz) + (gx + hy + iz)^2 = xy + z^2.$$

En prenant $T = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[X, Y, Z])$ et $v = (X, Y, Z)$, on peut identifier et on trouve :

$$\begin{array}{ll} ad + g^2 = 0 & ae + bd + 2gh = 1 \\ be + h^2 = 0 & af + cd + 2gi = 0 \\ cf + i^2 = 1 & bf + ce + 2hi = 0. \end{array}$$

On voit donc que F est représenté par le schéma $G = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[a, b, c, d, e, f, g, h, i]/I)$ où I est l'idéal engendré par les six équations ci-dessus.

(2) Nous avons plongé G dans $\mathbb{A}^9$, utilisons la suite exacte conormale correspondante. Notons A l'anneau de fonctions de G et B celui de $\mathbb{A}^9$. On a :

$$I/I^2 \xrightarrow{\mathbf{d}} \Omega^1_{B/\mathbb{Z}} \otimes_B A \longrightarrow \Omega^1_{A/\mathbb{Z}} \longrightarrow 0$$

où $\mathbf{d}$ est induite par la dérivation de B (on note $\mathbf{d}$ au lieu de d pour ne pas confondre avec l'indéterminée d déjà présente). La section e est donnée par le morphisme d'anneaux $e^\sharp : A \to \mathbb{Z}$ qui envoie a, e, i sur 1 et les autres variables sur 0. Par exactitude à droite du produit tensoriel, on peut tensoriser le long de $e^\sharp$ pour obtenir une suite exacte :

$$(I/I^2) \otimes \mathbb{Z} \xrightarrow{\mathbf{d}} (\Omega^1_{B/\mathbb{Z}} \otimes_B A) \otimes \mathbb{Z} \longrightarrow \Omega^1_{A/\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

Nous voulons calculer le module de droite, donc le conoyau de $\mathbf{d}$. Le calcul est facilité par l'évaluation en e : ainsi, dans $\Omega^1_{B/\mathbb{Z}} \otimes_B A$ on a

$$\mathbf{d}(ad + g^2) = a\mathbf{d}d + d\mathbf{d}a + 2g\mathbf{d}g,$$

mais après produit tensoriel avec $e^\sharp$, il reste $\mathbf{d}(ad + g^2) = \mathbf{d}d$. En faisant de même, on trouve les six équations :

$$\begin{array}{ll} \mathbf{d}(ad + g^2) = \mathbf{d}d & \mathbf{d}(ae + bd + 2gh - 1) = \mathbf{d}a + \mathbf{d}e \\ \mathbf{d}(be + h^2) = \mathbf{d}b & \mathbf{d}(af + cd + 2gi) = \mathbf{d}f + 2\mathbf{d}g \\ \mathbf{d}(cf + i^2 - 1) = 2\mathbf{d}i & \mathbf{d}(bf + ce + 2hi) = \mathbf{d}c + 2\mathbf{d}h. \end{array}$$

On sait que $\Omega^1_{B/\mathbb{Z}} = B\mathbf{d}a \oplus \cdots \oplus B\mathbf{d}i$ donc $(-) \otimes \mathbb{Z} = \mathbb{Z}\mathbf{d}a \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}\mathbf{d}i$. L'image de $\mathbf{d}$ est engendrée par les éléments qui précèdent, donc le calcul de $\Omega^1_{A/\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{Z} = \mathrm{coker}(\mathbf{d})$ donne :

$$\Omega^1_{A/\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{Z} = \frac{\mathbb{Z}\mathbf{d}a \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}\mathbf{d}i}{\langle \mathbf{d}d, \mathbf{d}b, 2\mathbf{d}i, \mathbf{d}a + \mathbf{d}e, \mathbf{d}f + 2\mathbf{d}g, \mathbf{d}c + 2\mathbf{d}h \rangle} = \frac{\mathbb{Z}\mathbf{d}a \oplus \mathbb{Z}\mathbf{d}g \oplus \mathbb{Z}\mathbf{d}h \oplus \mathbb{Z}\mathbf{d}i}{\langle 2\mathbf{d}i \rangle}.$$

Le $\mathcal{O}_G$-module $e^*\Omega^1_{G/S}$ est le faisceau associé à ce module. On voit qu'il n'est pas localement libre, puisqu'il contient l'élément de 2-torsion $\mathbf{d}i$. En revanche, au-dessus de $\mathbb{Z}[1/2]$ le faisceau $e^*\Omega^1_{G/S}$ est libre de rang 3.

(3) Il est immédiat qu'une matrice P stabilise le vecteur e_3 si et seulement si $c = f = i - 1 = 0$. Donc F_2 est représentable par le $\mathbb{F}_2$-schéma H, sous-schéma fermé de $G \otimes \mathbb{F}_2$ défini par ces équations. (Si on veut, on a $H = \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_2[a, b, d, e, g, h]/(ad + g^2, be + h^2, ae + bd - 1))$ – se rappeler qu'on est en caractéristique 2 – mais c'est moins utile que de connaître les équations ci-dessus.)

(4) En tenant compte des relations $2r = c$, $2s = f$ et $2t = i - 1$ dans A' et en injectant dans les relations dans A, on trouve :

$$\begin{array}{ll} ad + g^2 = 0 & ae + bd + 2gh = 1 \\ be + h^2 = 0 & a(2s) + (2r)d + 2g(2t + 1) = 0 \\ (2r)(2s) + (2t + 1)^2 = 1 & b(2s) + (2r)e + 2h(2t + 1) = 0. \end{array}$$

La troisième s'écrit $4rs + 4t^2 + 4t = 0$. Dans l'anneau A' qui est quotient par l'idéal de torsion, on doit donc avoir $rs + t^2 + t = 0$. Pour la même raison, les deux dernières équations donnent $as + rd + g(2t + 1) = 0$ et $bs + re + h(2t + 1) = 0$. On montre facilement qu'il n'y a pas d'autre élément de torsion, donc que

$$A' = \mathbb{Z}[a, b, r, d, e, s, g, h, t]/K$$

où $K = (\text{les 3 éq. inchangées}, rs + t^2 + t, as + rd + g(2t + 1), bs + re + h(2t + 1))$.

(5) L'idéal qui définit H comme sous-schéma fermé de G est l'idéal $J = (2, c, f, i - 1)$. Par ailleurs, l'idéal qui définit la fibre en 2 d'un $\mathbb{Z}$-schéma est l'idéal engendré par 2.

Un morphisme $f : T \to G$ qui se factorise par H sur la fibre en 2 est donné par un morphisme $u = f^\sharp : A \to \Gamma(T, \mathcal{O}_T)$ tel que $u(J) \subset (2)$. Un tel morphisme correspond à une matrice P dont les coefficients $a, \ldots, i$ (on note par les mêmes lettres les variables dans A et dans $\Gamma(T, \mathcal{O}_T)$...) tels qu'il existe u, v, w avec $c = 2u$, $f = 2v$, $i - 1 = 2w$. Comme T est plat sur S, ses anneaux locaux sont sans torsion, donc $\Gamma(T, \mathcal{O}_T)$, qui est un sous-anneau du produit des anneaux locaux, est aussi sans torsion ; donc u, v, w sont uniques. Il est clair que le morphisme u s'étend donc de manière unique en un morphisme $u' : A' \to \Gamma(T, \mathcal{O}_T)$ tel que $u'(r) = u$, $u'(s) = v$, $u'(t) = w$. Ceci démontre que F' est représentable par $G' = \mathrm{Spec}(A')$.

(6) Un relèvement $\epsilon : S \to G'$ est donné par un morphisme $\epsilon^\sharp : A' \to \mathbb{Z}$ qui composé avec $A \to A'$ donne $e^\sharp : A \to \mathbb{Z}$. Notant $a, b, r, d, e, s, g, h, t$ les images par $\epsilon^\sharp$ dans $\mathbb{Z}$, on doit donc avoir : $a = 1$, $b = 0$, $2r = 0$, $d = 0$, $e = 1$, $2s = 0$, $g = 0$, $h = 0$, $2t = 0$. Ceci détermine $r = s = t = 0$ donc $\epsilon^\sharp$ existe et est unique. En faisant un calcul similaire à celui de la question (2), on trouve que $\epsilon^*\Omega^1_{G'/S}$ est le faisceau associé au module

$$\Omega^1_{A'/\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{Z} = \frac{\mathbb{Z}\mathbf{d}a \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}\mathbf{d}t}{\langle \mathbf{d}d, \mathbf{d}b, \mathbf{d}a + \mathbf{d}e, \mathbf{d}t, \mathbf{d}s + \mathbf{d}g, \mathbf{d}r + \mathbf{d}h \rangle} = \mathbb{Z}\mathbf{d}a \oplus \mathbb{Z}\mathbf{d}g \oplus \mathbb{Z}\mathbf{d}h.$$

Pour montrer que G' est lisse en tous les points g de la section ϵ, il suffit de montrer que le plongement de G' dans $\mathbb{A}^9$ en coordonnées $a, b, r, d, e, s, g, h, t$ satisfait les conditions de la définition de la lissité (la définition « différentielle » donnée dans le cours). Or le calcul qu'on vient de faire montre qu'en un tel point g, les différentielles des équations qui définissent G' sont linéairement indépendantes, puisqu'elles sont au nombre de 6 et le quotient par ces équations est de dimension 3.