TD - Feuille 5

Exercice 1 Soit $X = \mathrm{Spec}(A)$ un schéma affine et Y un sous-schéma fermé dont l'idéal est engendré par des éléments $f_0, \ldots, f_n$. Soit $\widetilde{X}$ l'éclatement de X le long de Y.

(1) Donnez une application rationnelle φ, définie sur un ouvert de X que vous préciserez, qui permet de plonger $\widetilde{X}$ dans $X \times \mathbb{P}^n$.

Étant donnés deux idéaux I, J d'un anneau A, on note $(I : J)$ l'idéal formé des $x \in A$ tels que $xJ \subset I$, et $(I : J^\infty) = \cup_{n\geq 0} (I : J^n)$.

(2) Soient $x_0, \ldots, x_n$ des coordonnées homogènes dans $\mathbb{P}^n$, soit U_i l'ouvert standard, et soit J l'idéal de $A[x_0/x_i, \ldots, x_n/x_i]$ engendré par les éléments $f_i(x_k/x_i) - f_k$, pour $1 \leq k \leq n$. Montrez que via le plongement donné par φ, l'idéal de $\widetilde{X}$ dans l'ouvert affine $X \times U_i$ est $(J : (f_i)^\infty)$.

(3) Calculez l'éclatement de la courbe affine plane d'équation $y^2 = x^2(x + 1)$ en son point singulier.

Exercice 2 Soit R un anneau de valuation discrète, π une uniformisante, K son corps des fractions, $k = R/(\pi)$ sont corps résiduel. Soit $X = \mathbb{P}^1_R$ la droite projective sur R.

(1) Calculez l'éclatement $\widetilde{X} \to X$ en un point de la fibre fermée, comme sous-schéma fermé de $\mathbb{P}^3_R$. Montrez que $\widetilde{X}$ est une conique plane.

(2) Montrez que la fibre fermée de $\widetilde{X} \to \mathrm{Spec}(R)$ n'est pas lisse.

Exercice 3 Soient des entiers $a \geq b \geq 2$. Décrivez un algorithme le plus efficace possible pour résoudre par éclatements la singularité cuspidale $y^a = x^b$ sur le corps des nombres complexes, en vous concentrant sur les aspects locaux et non globaux.

Exercice 4 Soit R un anneau de valuation discrète, λ une uniformisante, K son corps des fractions, $k = R/(\lambda)$ son corps résiduel supposé de caractéristique différente de 2. On considère la courbe E/R, complétée projective dans $\mathbb{P}^2_R$ de la courbe donnée par l'équation

$$y^2 = x(x-1)(x-\lambda) \ .$$

La fibre générique E_K, munie du point origine donné par le point à l'infini, est la courbe elliptique de Legendre. Sa loi d'addition est donnée par $P_1 + P_2 = P' = (x', y')$ avec

$$\begin{cases} x' = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)^2 - (x_1 + x_2) + \lambda + 1 \\ \\ y' = -\alpha x' - \beta \end{cases}$$

où $\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ et $\beta = \frac{y_1 x_2 - y_2 x_1}{x_2 - x_1}$.

(1) La loi de groupe de E_K s'étend-elle en une loi de groupe sur E ?

(2) Montrez que le groupe des points de 2-torsion $G = E_K[2]$ est isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$.

(3) Soit $A = (0,0) \in G$ et $\tau : E_K \to E_K$ la translation définie par $P \mapsto P + A$. Donnez son expression en coordonnées homogènes $(x : y : z)$ sur E. S'étend-elle en un morphisme de E ?

(4) Trouver un éclatement $\widetilde{E} \to E$ tel que le morphisme τ s'étend à $\widetilde{E}$. L'action de $G = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ s'étend-elle à $\widetilde{E}$?